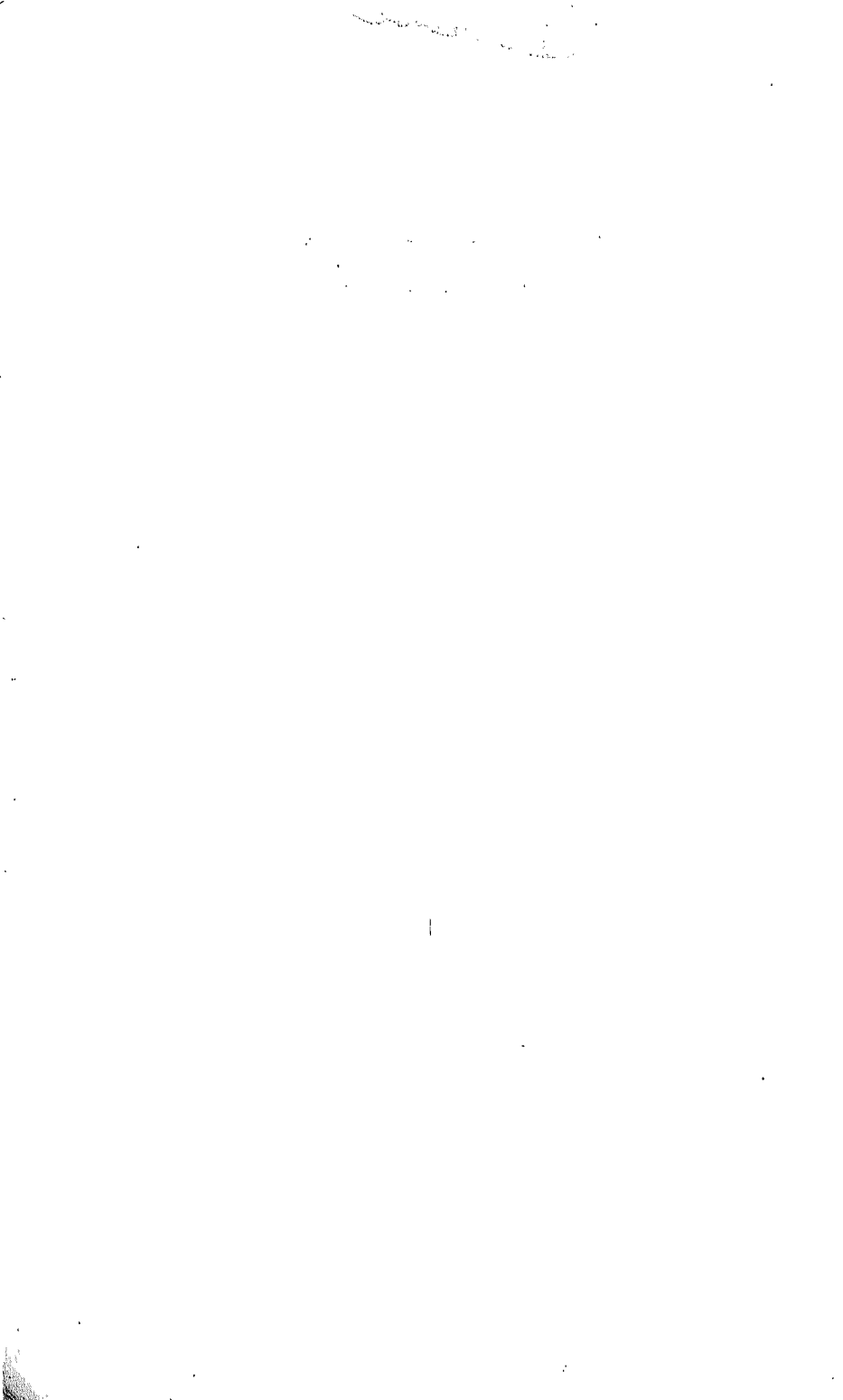


UNA INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA MODAL



RAMÓN JANSANA

UNA INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA MODAL

tecnos

Impresión de cubierta:
Gráficas Molina

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia, grabación magnética o cualquier almacenamiento de información y sistema de recuperación, sin permiso escrito de Editorial Tecnos, S.A.

© RAMÓN JANSANA FERRER, 1990
© EDITORIAL TECNOS, S.A., 1990
Josefa Valcárcel, 27 - 28027 Madrid
ISBN: 84-309-1830-2
Depósito Legal: M-11053-1990

Printed in Spain. Impreso en España por Azalzo. Tracia, 17, Madrid

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	Pág. 9
Cap. 1: EL LENGUAJE DE LA LÓGICA MODAL SENTENCIAL	15
Fórmulas. Principio de inducción. Definición por recursión. Subfórmulas. Sustitución. Ejercicios.	
Cap. 2: LÓGICAS Y LÓGICAS NORMALES	22
Lógicas clásicas, regulares y normales. Lógicas axiomatizables y recursivamente axiomatizables. Deducibilidad. Consistencia. La lógica K. Consecuencia tautológica. Ejercicios.	
Cap. 3: SEMÁNTICA PARA LA LÓGICA MODAL.....	36
Marcos. Modelos. Validez. Lógica de una clase de marcos. Completitud. Corrección. Submarcos y submodelos generados por índices. Consecuencia fuerte y débil. Ejercicios.	
Cap. 4: LÓGICA MODAL Y CONDICIONES DE PRIMER ORDEN	53
Propiedades de relaciones. Correspondencia entre fórmulas modales y propiedades de las relaciones. Correspondencia entre fórmulas modales y sentencias de primer y segundo orden. Ejercicios.	
Cap. 5: MODELOS CANÓNICOS.....	67
Conjuntos de fórmulas consistentes y L-consistentes. Modelos canónicos. Completitud de las lógicas modales. Teoremas de existencia de modelos y marcos. Ejercicios.	
Cap. 6: LA PROPIEDAD DE LOS MODELOS FINITOS. FILTRADOS	79
La propiedad de los modelos finitos y la propiedad de los marcos finitos. Decidibilidad a partir de la propiedad de los marcos finitos. Filtrados. Ejercicios.	
Cap. 7: ALGUNOS EJEMPLOS DE LÓGICAS	93
La lógica GL. La lógica KH. La lógica VB. Las lógicas de Urquhart. Ejercicios.	
Cap. 8: P-MORFISMOS. UNIONES DISJUNTAS. ULTRAPRODUCTOS ...	112
P-morfismos. Submarcos y submodelos generados. Uniones disjuntas. Ultraproductos y ultrapotencias. Ejercicios.	
Cap. 9: CLASES DE MARCOS DEFINIBLES EN PRIMER ORDEN	129
Clases EC, EC_{Δ} , EC_{Σ} , $EC_{\Sigma\Delta}$. Teoremas de Goldblatt. Teoremas de Van Benthem. Lógicas canónicas. Teorema de K. Fine. Una lógica de K. Fine. Ejercicios.	

Cap. 10: ÁLGEBRAS MODALES	151
Álgebras modales. Semántica algebraica de la lógica modal. Completitud algebraica. Teorema de completitud algebraica. Correspondencia entre el lenguaje de la lógica modal y el lenguaje de las álgebras modales. Subálgebras. Productos directos. Homomorfismos. Ejercicios.	
Cap. 11: ÁLGEBRAS MODALES Y MARCOS	168
De marcos a álgebras modales. De álgebras modales a marcos. Extensiones por ultrafiltros. Caracterización de las clases de marcos definibles por una lógica modal. Ejercicios.	
Cap. 12: SEMÁNTICA DE MARCOS GENERALES	185
La mayor lógica de un modelo. Marcos generales. Validez en marcos generales. Submarcos generales generados. p-morfismos. Uniones disjuntas. Relación entre marcos generales y álgebras modales. Marcos generales descriptivos. Lógicas d-persistentes: teorema de caracterización de Van Benthem. Ejercicios.	
Apéndice I: LÓGICA DE PRIMER ORDEN Y LÓGICA DE SEGUNDO ORDEN.....	201
Apéndice II: ÁLGEBRAS DE BOOLE	210
BIBLIOGRAFÍA	215
TABLA DE LÓGICAS	219
TABLA DE FÓRMULAS	221
ÍNDICE DE SÍMBOLOS	223
ÍNDICE DE TERMINOLOGÍA CONDUCTISTA	224
ÍNDICE DE AUTORES Y MATERIAS	225

INTRODUCCIÓN

El nacimiento de la lógica modal moderna se sitúa en 1912 en un artículo de C. I. Lewis en la revista *Mind*, en el que se ocupa de las llamadas paradojas de la implicación material. Los cálculos deductivos que desarrolló Lewis son cálculos para la implicación estricta en los que, en algunos, ésta se define a partir de un operador para la imposibilidad y, en otros, a partir de un operador para la posibilidad.

Históricamente la lógica modal moderna, tal como señala Segerberg en Bull y Segerberg [1984], se alimenta de tres tradiciones: la tradición sintáctica, la algebraica y la semántica. La primera tradición es la inaugurada por Lewis. Los autores que trabajaron en ella se dedicaron principalmente a la elaboración de diversos cálculos en los que recoger las diferentes intuiciones acerca de la noción de necesidad y otras modalidades. La segunda tradición puede remontarse a la introducción de lógicas trivalentes por Łukasiewicz y al nacimiento con ellas de la noción de matriz lógica, noción que dio lugar a la de álgebra lógica y a la consideración de clases de este tipo de álgebras. Una de ellas es la clase de las álgebras modales. En los inicios de esta tradición caben destacar las obras de A. Tarski, J. C. C. McKinsey, B. Jonsson, y la de H. Rasiowa y R. Sikorski. Por último, puede considerarse que la tercera tradición se inicia con la obra de R. Carnap, en la que por primera vez se da una semántica para la lógica modal, de hecho para el sistema S5 de Lewis. Pero es con la obra de S. Kripke con la que se introduce la semántica conocida como semántica de mundos posibles, semántica que parece haber sido también formulada independientemente por S. Kanger y por J. Hintikka. Es la semántica estándar para la lógica modal en sus dos variantes de semántica de modelos de Kripke y semántica de marcos de Kripke, semánticas estrechamente relacionadas, de tal modo que es imposible desarrollar la segunda sin desarrollar la primera.

Desde un punto de vista sistemático, en la lógica modal moderna pueden diferenciarse tres partes. La primera, llamada *teoría de la completitud*, se dedica al estudio de diversas lógicas

modales caracterizadas tanto sintáctica como semánticamente. La pregunta fundamental es la pregunta por la completitud. Si la respuesta es afirmativa, para demostrarlo existen básicamente dos métodos de prueba: los modelos canónicos y la propiedad de los marcos finitos. En esta parte cabe también incluir la pregunta por la caracterización. Una lógica es completa, en la semántica de marcos, si toda fórmula válida en todo marco de la lógica es un teorema de la lógica. Pero pueden existir clases especiales de marcos cuyas fórmulas válidas sean precisamente los teoremas de una lógica dada. Cuando esto ocurre decimos que la clase de marcos caracteriza la lógica dada. Buscar clases interesantes de marcos que caractericen una lógica es también una tarea importante. La obra fundamental en teoría de la completitud es la de K. Segerberg (Segerberg [1971]). Y también la de E. J. Lemmon y D. Scott (Lemmon, Scott [1977]).

La segunda parte, inaugurada por H. Sahlqvist y K. Fine, y desarrollada fundamentalmente por R. I. Goldblatt, S. K. Thomason y J. Van Benthem, es la llamada *teoría de la correspondencia*. En la semántica de marcos la noción fundamental es la de marco de Kripke. Un marco de Kripke es un par $\langle M, R \rangle$ donde M es un conjunto no vacío y R es una relación en M . Una asignación en un marco $\langle M, R \rangle$ es una función e que a cada letra sentencial asigna un subconjunto de M . Un modelo de Kripke es un triplo $\langle M, R, e \rangle$ donde $\langle M, R \rangle$ es un marco y e es una asignación en $\langle M, R \rangle$. Ocurre que para algunas lógicas modales la clase de sus marcos de Kripke es una clase definible por un conjunto de sentencias de primer orden en el lenguaje con un único relator diádico. Por ejemplo, para el sistema S5, la clase de sus marcos es la clase de los marcos cuya relación es de equivalencia. Pero para otras lógicas esto no es así. Una de las preguntas fundamentales de la teoría de la correspondencia es la pregunta por condiciones necesarias y suficientes para que la clase de los marcos de una lógica sea definible en primer orden. Por otra parte, dada una clase de marcos definible en primer orden, se plantea la cuestión de saber si es o no la clase de marcos de una lógica modal. Este tipo de preguntas son las características de la teoría de la correspondencia. Para responder a ellas se usan técnicas proporcionadas tanto por la tradición algebraica y por el álgebra universal, como por la tradición de la semántica de mundos posibles y la teoría de modelos clásica de la lógica de primer orden.

En teoría de la correspondencia las obras básicas son Van Benthem [1983] y Goldblatt [1976]

Por último, la tercera parte consiste en la llamada *teoría de la dualidad*. Para la lógica modal no sólo existe la semántica de marcos y la de modelos de Kripke, sino que también existe la semántica algebraica, cuyos objetos son las álgebras modales. La teoría de la dualidad se ocupa de estudiar las conexiones entre estos dos enfoques. En este estudio aparece una nueva noción, la de marco general, que es intermedia entre la de álgebra modal y la de marco de Kripke. La teoría de la dualidad hace uso fundamental del teorema de representación de Stone para álgebras de Boole y también utiliza y explora el punto de vista topológico.

El libro que tiene el lector en las manos es una introducción a las tres partes de la lógica modal contemporánea. En la primera parte del libro, los capítulos 1 a 8 pueden verse como una introducción a la teoría de la completitud y, además, a algunos aspectos de la decidibilidad de lógicas modales. Los capítulos 9, 10 y 11 exponen lo fundamental de la teoría de la correspondencia. El capítulo 12 puede considerarse una introducción a la teoría de la dualidad, aunque contiene también algunos resultados de teoría de la correspondencia. La parte topológica de la teoría de la dualidad no se desarrolla en este libro, puesto que el tipo de lector en el que pensamos al escribirlo no tiene por qué tener los prerrequisitos necesarios.

Este libro ha surgido de mis cursos en el Departamento de Lógica de la Historia y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Barcelona, cursos de segundo ciclo en la licenciatura de Filosofía y de doctorado en el programa de Lógica Matemática. Es un libro de lógica modal sentencial, y el propósito al escribirlo ha sido brindar al lector de habla española una introducción actual a la lógica modal, disciplina que con el desarrollo de las teorías de la correspondencia y de la dualidad ha alcanzado su madurez matemática, y que, con sus aplicaciones a las ciencias de la computación a través de la lógica dinámica, las lógicas temporales y las lógicas epistémicas, ha alcanzado, lo cual no es muy frecuente, su etapa de aplicación a esferas tecnológicas. Además la lógica modal ha encontrado aplicaciones a través del sistema GL, o sistema de la demostrabilidad, en el estudio de la aritmética de Peano y de sus extensiones. Ello se debe fundamentalmente al importante teorema de Solovay (Solovay [1976]), a los trabajos de la escuela

de Siena, de G. Boolos y de C. Smorinsky, entre otros. La idea de esta aplicación consiste en interpretar el operador modal, $\Box$, como el predicado de demostrabilidad en una teoría aritmética, que Gödel introdujo en su célebre prueba de la incompletitud de la aritmética. Estas aplicaciones son las que, en boca de algunos, redimen a la lógica modal del supuesto pecado original de confundir uso y mención que le atribuye Quine. Por último, la lógica modal tiene aplicaciones en lingüística, fundamentalmente en la semántica de las lenguas naturales. La semántica de mundos posibles es la semántica típica de las lógicas intensionales y es el paradigma semántico que nace con la introducción por S. Kripke de su semántica para las lógicas modales en «A Completeness Theorem in Modal Logic» (Kripke [1959]), y que ha dominado y aún domina las investigaciones semánticas llevadas a cabo por filósofos y, a raíz de la introducción de las gramáticas de Montague, también las llevadas a cabo por lingüistas.

Evidentemente éste no es un libro para cualquier tipo de lector. Se presupone un conocimiento de la lógica sentencial y de la lógica de primer orden equivalente, por ejemplo, al contenido de la primera parte del manual, actualmente ya un clásico, de H. Enderton *A Mathematical Introduction to Logic*. Como cabe esperar, se presupone también un conocimiento del lenguaje de la teoría de conjuntos, y un conocimiento de esta teoría equivalente, por ejemplo, al contenido del libro de Halmos *Intuitive Set Theory*. Finalmente, en los últimos tres capítulos se presupone cierto conocimiento de la teoría de las álgebras de Boole. El lector interesado en este tema puede consultar Jané [1989]. El presente libro, sin embargo, lleva dos apéndices, uno sobre lógica de primer orden y lógica de segundo orden y otro sobre álgebras de Boole, con el fin, fundamentalmente, de fijar terminología y para que el lector pueda informarse de aquello que es imprescindible conocer para poder seguir con provecho el libro.

Puesto que éste es un libro de introducción a la lógica modal, no debe esperarse encontrar en él resultados originales del autor. Si alguno hay, es la prueba de que toda lógica posee marcos. La originalidad de este libro debe buscarse, en todo caso, en la distribución y presentación del material y en el énfasis en ciertas cuestiones. Cabe destacar el punto de vista que ha guiado el libro: la semántica fundamental para la lógica modal es la de marcos. Me gustaría justificar este punto de vista algún día mediante un argu-

mento filosófico, pero por el momento es plenamente justificable desde un punto de vista matemático. Es esta semántica la que hace interesante a la lógica modal, pues con ella no queda reducida como con la semántica de modelos a lógica de primer orden, hecho que ya pusieron de manifiesto, en la obra citada, J. E. Lemmon y D. Scott. Se puede ver la lógica modal con la semántica de marcos como una parte de la lógica de segundo orden, pero, puesto que ésta no tiene una buena teoría de modelos, pocos resultados generales le son aplicables. Más bien ocurre lo contrario: Van Benthem y K. Doets han generalizado resultados para la lógica modal a fragmentos de la lógica de segundo orden, y de la teoría de tipos, fragmentos más amplios que el que corresponde estrictamente a la lógica modal.

Desde un punto de vista pedagógico, este libro puede servir como texto para distintos tipos de curso. Un curso, o parte de un curso, de licenciatura en el que se presente una introducción a la lógica modal para estudiantes de filosofía o de informática puede basarse en los siete u ocho primeros capítulos y el capítulo 10. Un curso de doctorado puede organizarse de muchos modos dependiendo de la duración, del tipo de programa al que pertenezca y de los conocimientos que se presupongan.

Debo dar las gracias a varias personas que han contribuido con su estímulo unas, con sus comentarios otras, y con ambas cosas la mayoría, a que este libro sea posible. En primer lugar debo dar las gracias a mis alumnos, en especial a Begoña Navarrete y Manuel Campos. Después a mis colegas que asistieron a mi curso de doctorado: Manuel García-Carpintero, Enrique Casanovas e Ignacio Jané. Y en especial debo agradecer a los dos últimos sus preguntas y comentarios, así como el trabajo de haber leído y comentado los sucesivos manuscritos, sin el cual el libro no sería lo que es. También debo dar las gracias, a Josep M.^a Font por sus comentarios a una primera versión de los nueve primeros capítulos. Por último debo dar las gracias a J. Van Benthem, sin cuyos escritos mi concepción y conocimiento de la lógica modal, así como mi interés por ella, serían muy distintos.

Si antiguamente se daban las gracias a quienes habían mecanografiado el texto, hoy es de justicia dárselas al ordenador y procesador de textos que lo ha hecho posible, en mi caso a mi casi siempre dócil Macintosh y a MacWrite.

Espero que este libro despierte el interés intrínseco por la

lógica modal en algunos y sea de utilidad a los que hoy en día la necesitan en sus trabajos en inteligencia artificial y, en general, en ciencias de la computación. Si así es, habrá merecido la pena el esfuerzo de escribirlo.

CAPÍTULO 1

EL LENGUAJE DE LA LÓGICA MODAL SENTENCIAL

Un *lenguaje modal* sentencial consta de un vocabulario formado por un conjunto infinito $\mathcal{P}$ de letras sentenciales, un conector diádico, $\rightarrow$, una constante sentencial, $\perp$, un paréntesis derecho, $)$, un paréntesis izquierdo, $($, y un operador modal, $\Box$. Todos estos símbolos deben ser distintos entre sí; en particular ninguna letra sentencial debe ser un conector ni una constante sentencial ni el operador modal ni un paréntesis.

Consideraremos que todos los lenguajes modales tienen el mismo conector diádico, la misma constante sentencial, los mismos paréntesis y el mismo operador modal. Lo que distinguirá un lenguaje de otro será el conjunto de sus letras sentenciales. De todos modos, podemos identificar dos lenguajes si sus conjuntos de letras sentenciales tienen la misma cardinalidad (son biyectables). Al lenguaje modal sentencial cuyo conjunto de letras sentenciales es $\mathcal{P}$ lo llamaremos el lenguaje modal sentencial de $\mathcal{P}$, o simplemente, el lenguaje modal sentencial $\mathcal{P}$. Así, el *vocabulario* del lenguaje modal sentencial $\mathcal{P}$ es el conjunto $\mathcal{P} \cup \{\rightarrow, \perp, \Box, (,)\}$. Al conector diádico lo llamaremos condicional, y él y la constante sentencial son los únicos signos lógicos de los lenguajes modales sentenciales. Del operador modal diremos que es el signo modal.

Debemos observar que todo lenguaje modal sentencial $\mathcal{P}$ puede verse como un lenguaje sentencial (de la lógica sentencial) extendido mediante el operador modal. El lenguaje sentencial de $\mathcal{P}$ tiene como vocabulario el conjunto formado por las letras sentenciales de $\mathcal{P}$, los signos lógicos y los paréntesis. A este lenguaje lo llamaremos el *sublenguaje sentencial* del lenguaje modal sentencial $\mathcal{P}$.

Utilizamos un único conector diádico y una constante sentencial —que se interpretará como lo falso— por al menos tres motivos. En primer lugar, tal práctica es habitual en los trabajos de lógica modal. En segundo lugar, poseer una constante sentencial para lo

falso es útil a la hora de introducir las álgebras modales. Por último, este recurso permite que las pruebas por inducción sobre la estructura de las fórmulas sean breves. Debe observarse que únicamente con el condicional y una constante sentencial para lo falso es suficiente para poder representar todas las funciones booleanas. Si esto no fuese así, habríamos realizado una mala elección de nuestro vocabulario.

DEFINICIÓN DE FÓRMULA

El conjunto de las *fórmulas* de un lenguaje modal sentencial $\mathcal{P}$, $\text{For}(\mathcal{P})$, es el menor conjunto X de sucesiones finitas de elementos del vocabulario de $\mathcal{P}$ tal que:

- i) $\mathcal{P} \subseteq X$
- ii) $\perp \in X$
- iii) Si $\zeta_1, \zeta_2 \in X$, entonces $(\zeta_1 \rightarrow \zeta_2) \in X$
- iv) Si $\zeta \in X$, entonces $\Box \zeta \in X$,

donde $(\zeta_1 \rightarrow \zeta_2)$ es la sucesión que se obtiene al concatenar las sucesiones $\langle (), \zeta_1, \langle \rightarrow \rangle, \zeta_2, \text{ y } \langle) \rangle$ en este orden, y $\Box \zeta$ es la sucesión que se obtiene al concatenar las sucesiones $\langle \Box \rangle$ y ζ en este orden.

Los elementos de $\text{For}(\mathcal{P})$ son las fórmulas del lenguaje $\mathcal{P}$ (o $\mathcal{P}$ -fórmulas).

A partir de ahora utilizaremos las letras mayúsculas A, B, C, D con posibles subíndices como metavariables para fórmulas. Supondremos que los conjuntos de letras sentenciales de los lenguajes modales están enumerados con sus cardinales. Cuando escribamos fórmulas concretas utilizaremos la letra p para referirnos a la primera letra sentencial del lenguaje que consideremos, la letra q para referirnos a la segunda, y la letra r para la tercera. Además, si el conjunto de letras sentenciales tiene cardinal κ , con $p_i - i \in \kappa$ - nos referiremos a la i -ésima letra sentencial en la enumeración supuesta.

Es de observar que, dado un lenguaje sentencial $\mathcal{P}$, los conjuntos $\mathcal{P}$, $\{\perp\}$, $\{(A \rightarrow B) : A, B \in \text{For}(\mathcal{P})\}$, y $\{\Box A : A \in \text{For}(\mathcal{P})\}$ son disjuntos dos a dos. Además si $\langle A, B \rangle$ es distinto de $\langle C, D \rangle$, entonces $(A \rightarrow B)$ es una fórmula distinta de la fórmula $(C \rightarrow D)$, y, si A y B

son fórmulas distintas, también lo son las fórmulas $\Box A$ y $\Box B$. Para demostrarlo basta tener en cuenta las propiedades de las secuencias finitas.

Abreviaciones

$\neg A$	abreviará	$(A \rightarrow \perp)$
$(A \wedge B)$	abreviará	$\neg(A \rightarrow \neg B)$
$(A \vee B)$	abreviará	$(\neg A \rightarrow B)$
$(A \leftrightarrow B)$	abreviará	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$.
$\Diamond A$	abreviará	$\neg \Box \neg A$
T	abreviará	$(\perp \rightarrow \perp)$

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

1) Si S es un conjunto de sucesiones finitas de elementos del vocabulario de $\mathcal{P}$ para el que se cumplen las condiciones i)- iv) de la definición de fórmula, entonces toda fórmula de $\mathcal{P}$ pertenece a S .

2) Si Φ es una propiedad tal que i) toda letra sentencial de $\mathcal{P}$ tiene Φ , ii) $\perp$ tiene Φ , iii) si A y B tienen Φ , entonces $(A \rightarrow B)$ tiene Φ , y iv) si A tiene Φ , entonces $\Box A$ tiene Φ , entonces toda fórmula de $\mathcal{P}$ tiene la propiedad Φ .

Prueba: 1) se sigue inmediatamente de la definición de fórmula. 2) Consideremos el conjunto $S = \{A \in \text{For}(\mathcal{P}) : A \text{ tiene } \Phi\}$. Entonces S cumple las condiciones i)-iv) de la definición de fórmula, y por tanto $\text{For}(\mathcal{P}) \subseteq S$. Concluimos pues que toda fórmula de $\mathcal{P}$ tiene Φ . ■

PRINCIPIO DE DEFINICIÓN POR RECURSIÓN

Si D es un conjunto no vacío, F una operación diádica en D , G una operación monádica en D y a un elemento de D , entonces para cada función $h: \mathcal{P} \rightarrow D$ existe una única función $h^*: \text{For}(\mathcal{P}) \rightarrow D$ que extiende a h ($h \subseteq h^*$) y además verifica:

- i) $h^*(\perp) = a$
- ii) $h^*(A \rightarrow B) = F(h^*(A), h^*(B))$
- iii) $h^*(\Box A) = G(h^*(A))$

Prueba: Sean D, G, F, a como se indica en las condiciones del enunciado. Digamos que un conjunto de fórmulas Γ está sintácticamente cerrado si y sólo si 1) $\mathcal{P} \cup \{\perp\} \subseteq \Gamma$, 2) siempre que una fórmula de tipo $\Box A$ pertenezca a Γ , A pertenece a Γ , y 3) siempre que una fórmula de tipo $(A \rightarrow B)$ pertenezca a Γ , A y B pertenecen también a Γ . Digamos que una función g es adecuada si es una función de un conjunto Γ sintácticamente cerrado de fórmulas de $\mathcal{P}$ en D que extiende a h ($h \subseteq g$) y para la que se cumplen i) ii) y iii) (cambiando h^* por g). Definamos

$$h^* = \bigcup \{g : g \text{ es una función adecuada}\}.$$

Entonces h^* es la función buscada. La unicidad se prueba por inducción. $\square$

LONGITUD DE UNA FÓRMULA

La *longitud de una fórmula* va a ser el número de ocurrencias del condicional y del operador modal en la fórmula. Por ejemplo, la longitud de la fórmula $\Box(p \rightarrow \Box q) \rightarrow \Box p$ es 5. Definimos la longitud de una fórmula por recursión como sigue:

- 1) $lg(p) = 0$ (para cada letra sentencial p)
- 2) $lg(\perp) = 0$
- 3) $lg(A \rightarrow B) = lg(A) + lg(B) + 1$
- 4) $lg(\Box A) = lg(A) + 1$.

SUBFÓRMULAS

A cada fórmula A le podemos asociar el conjunto de todas aquellas fórmulas que han sido necesarias para la «construcción» de A , incluyendo la propia fórmula A . A tales fórmulas se les da el nombre de subfórmulas de A . Por ejemplo, las subfórmulas de la fórmula $\Box(p \rightarrow \Box q) \rightarrow \Box r$ son: $p, q, r, \Box r, \Box q, (p \rightarrow \Box q), \Box(p \rightarrow \Box q)$, y $\Box(p \rightarrow \Box q) \rightarrow \Box r$.

El conjunto de subfórmulas de A , $Sub(A)$, puede definirse como sigue:

- 1) $\text{Sub}(p) = \{p\}$ (para cada letra sentencial p)
- 2) $\text{Sub}(\perp) = \{\perp\}$
- 3) $\text{Sub}(A \rightarrow B) = \text{Sub}(A) \cup \text{Sub}(B) \cup \{(A \rightarrow B)\}$
- 4) $\text{Sub}(\Box A) = \text{Sub}(A) \cup \{\Box A\}$.

Debe observarse que, tal como ha sido formulada, la definición no puede justificarse por el principio de definición por recursión, pues por ejemplo $\text{Sub}(\Box A)$ no depende únicamente de $\text{Sub}(A)$ sino también de $\Box A$. Sin embargo puede modificarse ligeramente la definición de modo que sí sea justificable por tal principio. Buscar la modificación se deja como ejercicio para el lector.

SUSTITUCIÓN DE LETRAS SENTENCIALES POR FÓRMULAS EN UNA FÓRMULA

Para cada número natural n vamos a definir una función $A(p_1/B_1, \dots, p_n/B_n)$ que a cada fórmula A , letras sentenciales distintas $p_1, \dots, p_n$, y fórmulas $B_1, \dots, B_n$ les asigna el resultado de reemplazar las ocurrencias de p_i en A por B_i ($1 \leq i \leq n$). La definición, fijado un número natural n , es una definición por recursión, y es como sigue:

- 1) Si A es una letra sentencial, entonces $A(p_1/B_1, \dots, p_n/B_n)$ es B_i si A es p_i , para $1 \leq i \leq n$, y es A en caso contrario.
- 2) $\perp(p_1/B_1, \dots, p_n/B_n)$ es $\perp$
- 3) $(A \rightarrow B)(p_1/B_1, \dots, p_n/B_n)$ es $(A(p_1/B_1, \dots, p_n/B_n) \rightarrow B(p_1/B_1, \dots, p_n/B_n))$
- 4) $(\Box A)(p_1/B_1, \dots, p_n/B_n)$ es $\Box A(p_1/B_1, \dots, p_n/B_n)$.

PROPOSICIÓN 1.1: *Si B es una subfórmula de A , entonces existe una fórmula C de la que B no es subfórmula y una letra sentencial p que no ocurre en A tal que A es $C(p/B)$.*

Prueba: Por inducción. i) Si A es una letra sentencial, digamos q , elijamos una letra sentencial distinta p , entonces A es $p(p/q)$. ii) Si A es $\perp$, elijamos una letra sentencial cualquiera p ,

entonces A es $p(\perp)$. iii) Si la proposición vale para A_1 y para A_2 , entonces B es $(A_1 \rightarrow A_2)$ o es una subfórmula de A_1 o de A_2 . Consideremos el caso en que B es una subfórmula de A_1 y de A_2 . Sean p, q, C_1, C_2 tales que cumplen las condiciones de la proposición. Elijamos una letra sentencial p_1 distinta de p , de q , y que no ocurre ni en A_1 , ni en A_2 . Entonces

$$C_1(p/p_1)(p_1/B) \text{ es } C_1(p/B) \text{ y } C_2(q/p_1)(p_1/B) \text{ es } C_2(q/B)$$

con lo cual tenemos que

$$(A_1 \rightarrow A_2) \text{ es } C_1(p/p_1)(p_1/B) \rightarrow C_2(q/p_1)(p_1/B)$$

que es $(C_1(p/p_1) \rightarrow C_2(q/p_1))(p_1/B)$. Los demás casos se tratan de modo similar. iv) Si la proposición vale para A , mediante un argumento parecido al empleado en iii) puede concluirse que vale para $\Box A$.

EJERCICIOS:

1. Completar la prueba del principio de definición por recursión.

(2.) Demostrar que si las letras sentenciales $p_1, \dots, p_n$ no ocurren en las fórmulas $B_1, \dots, B_n$, entonces la fórmula

$$(\dots((A(p_1/B_1)(p_2/B_2))\dots)(p_n/B_n) \text{ es } A(p_1/B_1, \dots, p_n/B_n).$$

3. Demostrar que para cualquier fórmula A , cualesquiera letras sentenciales distintas $p_1, \dots, p_n$, y cualesquiera fórmulas $B_1, \dots, B_n$, existen letras sentenciales $q_1, \dots, q_n$ tales que la fórmula

$$(\dots((\dots((A(p_1/q_1))\dots)(p_n/q_n))(q_1/B_1))\dots)(q_n/B_n)$$

es

$$A(p_1/B_1, \dots, p_n/B_n).$$

4. Obtener todas las subfórmulas de las siguientes fórmulas y calcular su longitud:

$$i) \Box(\Box p \rightarrow \Box q) \rightarrow \Box \perp$$

$$ii) \Box \Box p \rightarrow \Box \neg \Box \neg \perp$$

$$iii) \Box \neg (\Box p \rightarrow q) \rightarrow (\Box q \rightarrow \neg p)$$

$$iv) \Box \Box \Box (\neg p \leftrightarrow \Box \neg \Box \neg q).$$

5. Justificar la definición de longitud de una fórmula definiendo las funciones necesarias para aplicar el principio de definición por recursión.

6. Modificar la definición del conjunto de subfórmulas de una fórmula de modo que pueda justificarse mediante el principio de definición por recursión.

7. Computar en términos de $lg(A)$ y $lg(B)$, $lg(A \wedge B)$, $lg(A \vee B)$, y $lg(A \leftrightarrow B)$.

CAPÍTULO 2

LÓGICAS Y LÓGICAS NORMALES

1. Dado un lenguaje modal sentencial $\mathcal{P}$, una *lógica* L es un conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$ tal que

- i) Toda tautología del sublenguaje sentencial de $\mathcal{P}$ pertenece a L .
- ii) L está cerrado bajo *modus ponens*, es decir, si $(A \rightarrow B)$ y A pertenecen a L , entonces B pertenece también a L .
- iii) L está cerrado bajo *sustitución*, lo que significa, que si A pertenece a L , entonces para toda letra sentencial p y toda fórmula B , $A(p/B)$ pertenece a L .

Debe observarse que, en virtud de la condición iii), toda fórmula que tenga la forma de una tautología pertenece a L . Y también, en virtud del ejercicio 3 del capítulo 1, que para toda fórmula A elemento de L , cualesquiera letras sentenciales distintas $p_1, \dots, p_n$, y cualesquiera fórmulas $B_1, \dots, B_n$, la fórmula $A(p_1/B_1, \dots, p_n/B_n)$ pertenece a L .

Ejemplos triviales de lógicas son los siguientes: 1) el conjunto de todas las fórmulas de un lenguaje modal sentencial. 2) El conjunto de todas las fórmulas que se obtienen por sustitución a partir de las tautologías del sublenguaje sentencial de un lenguaje modal sentencial dado. A tales fórmulas las llamaremos *instancias de sustitución de tautologías*. La lógica de 2) es la menor lógica (está incluida en todas las lógicas). La lógica de 1) es la mayor lógica (incluye a todas las lógicas).

Una lógica L es una *lógica clásica* si está cerrada bajo la regla: si $A \leftrightarrow B \in L$, entonces $\Box A \leftrightarrow \Box B \in L$.

Una lógica L es una *lógica regular* si está cerrada bajo la regla: si $A \rightarrow B \in L$, entonces $\Box A \rightarrow \Box B \in L$.

Una lógica L es una *lógica normal* si contiene todas las fórmulas de la forma

$$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$$

fórmulas a las que llamaremos *instancias del axioma distributivo*, y además está cerrada bajo la *regla de necesidad*: si $A \in L$, entonces $\Box A \in L$.

OBSERVACIÓN: *Toda lógica regular es clásica, y toda lógica normal es regular.*

Prueba: Si $(A \leftrightarrow B)$ pertenece a L entonces $(A \rightarrow B)$ pertenece a L , lo que se justifica por razones de lógica sentencial, de modo que, si L es regular, $\Box(A \rightarrow B)$ pertenece a L y por tanto $\Box A \rightarrow \Box B$ pertenece a L . De igual modo puede verse que $\Box B \rightarrow \Box A$ pertenece a L , y por tanto se obtiene que $\Box A \leftrightarrow \Box B$ pertenece también a L (la razón es, de nuevo, de lógica sentencial). Así, toda lógica regular es clásica. El mismo tipo de razonamiento muestra que toda lógica normal es regular. $\blacksquare$

PROPOSICIÓN 2.1: *La intersección de una colección no vacía de lógicas clásicas (regulares, normales) de un lenguaje modal sentencial $\mathcal{P}$ es una lógica clásica (regular, normal).*

Prueba: Se deja como ejercicio para el lector. $\blacksquare$

Obsérvese que el conjunto de todas las fórmulas de un lenguaje modal sentencial fijado es una lógica normal, y por tanto clásica y regular. Así, por 2.1, existe una menor lógica clásica, una menor lógica regular y una menor lógica normal. A la menor lógica normal se la conoce como la *lógica K*. A la menor lógica clásica se la conoce como la *lógica E*. Evidentemente cada lenguaje modal sentencial tiene su menor lógica normal (clásica, regular). A partir de ahora vamos a suponer que tenemos un lenguaje modal sentencial fijado, digamos $\mathcal{P}$, respecto al cual consideraremos lógicas. Sin embargo, todo lo que digamos, a menos que impongamos alguna restricción al lenguaje (por ejemplo, que sea numerable), valdrá para lógicas de cualquier lenguaje.

Escribamos $\text{Taut}(\mathcal{P})$ para referirnos al conjunto de todas las tautologías del sublenguaje sentencial del lenguaje modal $\mathcal{P}$. Entonces la lógica normal K es el conjunto de fórmulas generado a partir del conjunto

$$\text{Taut}(\mathcal{P}) \cup \{\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)\}$$

por las reglas de *modus ponens*, necesidad y sustitución. Dicho todo ello más precisamente, es el conjunto $\Sigma = \bigcup \{\Sigma_n : n \text{ n}^\circ \text{ natural}\}$ donde

$$\Sigma_0 = \text{Taut}(\mathcal{P}) \cup \{\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)\}$$

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\Box A : A \in \Sigma_n\} \cup \{A : \text{existe } B \in \Sigma_n \text{ tal que } (B \rightarrow A) \in \Sigma_n\} \cup \{A(r/B) : A \in \Sigma_n, r \in \mathcal{P} \text{ y } B \in \text{For}(\mathcal{P})\}$$

Es fácil comprobar que Σ es una lógica normal, con lo cual $K \subseteq \Sigma$. Por otra parte, por inducción en n , también es fácil comprobar que para cada número natural n , $\Sigma_n \subseteq K$. Por tanto $K = \Sigma$.

Más adelante, en el próximo capítulo, veremos que K no es el conjunto de todas las fórmulas, es decir, que K es una lógica consistente.

PROPOSICIÓN 2.2: *Si Σ es un conjunto de fórmulas de un lenguaje sentencial modal $\mathcal{P}$, existe una menor lógica normal que contiene a Σ , a saber: la lógica normal generada a partir del conjunto*

$$\text{Taut}(\mathcal{P}) \cup \{\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)\} \cup \Sigma$$

mediante las reglas de modus ponens, necesidad, y sustitución.

Prueba: El conjunto de todas las fórmulas es una lógica normal que contiene a Σ . Por tanto la intersección de la colección de todas las lógicas normales que contienen a Σ será una lógica normal que contiene a Σ y será la menor con tal propiedad. Un razonamiento análogo al realizado para el caso de la lógica K muestra que tal lógica es la generada a partir del conjunto considerado mediante las reglas mencionadas. $\square$

Dado un conjunto Σ de fórmulas modales, $L(\Sigma)$ será la menor lógica normal que contiene a Σ .

OBSERVACIONES:

- i) Si $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, entonces $L(\Sigma_1) \subseteq L(\Sigma_2)$.
- ii) Si Σ es una lógica normal, entonces $L(\Sigma) = \Sigma$.

PROPOSICIÓN 2.3: Si Σ es un conjunto numerable de fórmulas modales y $\langle A_n: n \in \omega \rangle$ una enumeración del mismo, entonces si consideramos el conjunto $\Sigma^* = \{A_0 \wedge \dots \wedge A_n: n \in \omega\}$ resulta que $L(\Sigma) = L(\Sigma^*)$.

Prueba: i) $L(\Sigma) \subseteq L(\Sigma^*)$. Dada $A_n \in \Sigma$, consideremos la fórmula $A_0 \wedge \dots \wedge A_n$ que pertenece a Σ^* . Puesto que la fórmula $(A_0 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow A_n$ es una tautología, pertenece a $L(\Sigma^*)$, con lo cual, por *modus ponens*, concluimos que $A_n \in L(\Sigma^*)$. Así, $L(\Sigma) \subseteq L(L(\Sigma^*)) = L(\Sigma^*)$. ii) $L(\Sigma^*) \subseteq L(\Sigma)$. Para cada número natural n la fórmula $A_0 \rightarrow (A_1 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow (A_0 \wedge \dots \wedge A_n)) \dots))$ es una instancia de una tautología, y por tanto pertenece a $L(\Sigma)$. Por tanto, por *modus ponens*, la fórmula $A_0 \wedge \dots \wedge A_n$ pertenece a $L(\Sigma)$ ya que las fórmulas $A_0, \dots, A_n$ pertenecen a Σ . Por tanto $\Sigma^* \subseteq L(\Sigma)$, y así $L(\Sigma^*) \subseteq L(L(\Sigma)) = L(\Sigma)$. $\square$

Diremos que una lógica normal L *extiende* a una lógica normal L' si y sólo si $L' \subseteq L$. Así, toda lógica normal extiende a la lógica K .

Si L es la menor lógica normal que incluye a un conjunto de fórmulas Σ , diremos que Σ es un *conjunto de axiomas para L* .

Una lógica normal L es *finitamente axiomatizable* si existe un conjunto finito de axiomas para L .

Una lógica normal L , en un lenguaje numerable, es *recursivamente axiomatizable* si existe un conjunto recursivo de axiomas para L .

Evidentemente, toda lógica finitamente axiomatizable en un lenguaje numerable es recursivamente axiomatizable. La lógica K es finitamente axiomatizable al ser el conjunto vacío un conjunto de axiomas para K .

Es de observar que toda lógica normal L , en un lenguaje modal sentencial numerable, que sea recursivamente axiomatizable, es un conjunto de fórmulas recursivamente enumerable. La razón es la siguiente: Si L es recursivamente axiomatizable, y Σ es un conjunto recursivo de axiomas para L , entonces el conjunto $\text{Taut}(\mathcal{P}) \cup \Sigma \cup \{\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)\}$ es un conjunto recursivo, y por tanto L , que es la lógica generada a partir del mismo por las reglas de *modus ponens*, necesidad y sustitución, es un conjunto recursivamente enumerable. (Debe recordarse que el conjunto de las tautologías de un lenguaje sentencial numerable es recursivo.)

TEOREMA 2.4 (de Craig): *Una lógica normal L, en un lenguaje numerable, es recursivamente axiomatizable si y sólo si existe un conjunto recursivamente enumerable de axiomas para L.*

Prueba: Por la proposición 2.3 tenemos que, si Σ es un conjunto recursivamente enumerable de axiomas para L, entonces fijada una enumeración recursiva $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ de los elementos de Σ , el conjunto $\{A_0 \wedge \dots \wedge A_n : n \in \omega\}$ es también un conjunto de axiomas para L, y este conjunto es un conjunto recursivo. $\square$

El lector debe observar que todas las definiciones y proposiciones de este apartado tienen sus análogas para las lógicas clásicas y las lógicas regulares. Se le invita a que las formule y demuestre.

2. Vamos a dar a continuación una lista de fórmulas modales que son las utilizadas con mayor frecuencia para definir axiomáticamente lógicas normales. Acompañaremos a cada una de ellas de uno o más nombres, los que con mayor frecuencia se encuentran en la literatura, y que serán generalmente una letra mayúscula.

D	$\Box p \rightarrow \Diamond p$	Tr	$p \leftrightarrow \Box p$
T	$\Box p \rightarrow p$	V	$\Box p$
4	$\Box p \rightarrow \Box \Box p$	M	$\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$
5, E	$\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$	G	$\Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$
B	$p \rightarrow \Box \Diamond p$	Grz	$\Box(\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p) \rightarrow p$
H	$\Box(\Box p \leftrightarrow p) \rightarrow \Box p$	GL, L	$\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$
Dum	$\Box(\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p) \rightarrow (\Diamond \Box p \rightarrow p)$		
Lem, D1	$\Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$		

A continuación vamos a dar un catálogo (no exhaustivo) de las lógicas modales normales más conocidas. Para ello seguiremos la

siguiente convención notacional debida a E. J. Lemmon y D. Scott [1977]: Escribiremos K y a continuación la inicial, o nombre, de los axiomas de la lógica. Indicaremos también algún otro nombre con el que se conoce a las lógicas de la lista en la literatura, y modos equivalentes de axiomatizarlas.

KT: T KD: deóntica T KTB: sistema Brouwer

KT4: S4 KD4: deóntica S4 KT4M: S4.1

KT4B: KT4E: S5 KD4E: deóntica S5 KT4G: S4. 2

KT4D1: S4. 3

KT4Dum: D: Lógica diodoreana de Prior

KT4. Grz: KGrz: sistema de Grzegorzcyk

K4L: GL: L: KL: Lógica de la demostrabilidad

KTr: KT4BM sistema Trivial

KV: sistema Verum

3. Dada una lógica L, a las fórmulas pertenecientes a L las llamaremos *teoremas* de L. Escribiremos $\vdash_L A$ para indicar que A es un teorema de L.

Si Σ es un conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$ y L es una lógica, diremos que una fórmula A es *deducible de Σ* (en L), y escribiremos $\Sigma \vdash_L A$, si y sólo si existe algún n y fórmulas $A_0, \dots, A_n \in \Sigma$ tales que $\vdash_L A_0 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A$ o $\vdash_L A$.

Observemos que si $\Sigma \subseteq L$ entonces toda fórmula deducible de Σ es un teorema de L. Por otro lado, $\emptyset \vdash_L A$ si y sólo si A es un teorema de L.

Dado un conjunto Σ de fórmulas de $\mathcal{P}$ y una lógica L, decimos que Σ es *L-consistente* si y sólo si $\perp$ no es deducible de Σ (en L). Si Σ no es L-consistente diremos que es *L-inconsistente*. Una lógica L es *consistente* si y sólo si $\perp$ no es un teorema de L.

PROPOSICIÓN 2.5:

- 1) Σ es L-consistente si y sólo si existe una fórmula no deducible de Σ (en L).
- 2) Σ es L-consistente si y sólo si no hay ninguna fórmula A tal que $(A \wedge \neg A)$ sea deducible de Σ (en L).

Prueba: 1) Si Σ es L-consistente, $\perp$ no es un teorema de Σ . Por otra parte, si $\Sigma \vdash_L \perp$, puesto que para toda fórmula A la fórmula $(\perp \rightarrow A)$ es un teorema de L, al ser una instancia de sustitución de una tautología, tenemos que toda fórmula A es deducible de Σ . 2) Puesto que para toda fórmula A, $(A \wedge \neg A) \rightarrow \perp$ es un teorema de L (al ser instancia de sustitución de una tautología), si Σ es L-consistente no puede existir ninguna fórmula A tal que $(A \wedge \neg A)$ sea deducible de Σ . Por otra parte, si no existe ninguna fórmula A tal que la fórmula $(A \wedge \neg A)$ sea deducible de Σ , entonces existe al menos una fórmula no deducible de Σ , con lo que, por 1), tenemos que Σ es L-consistente. ■

LEMA 2.6:

- 1) Si $\Sigma \vdash_L A$ y $\Sigma \vdash_L (A \rightarrow B)$, entonces $\Sigma \vdash_L B$.
- 2) $\Sigma \vdash_L A$ y $\Sigma \vdash_L B$ si y sólo si $\Sigma \vdash_L (A \wedge B)$.

Prueba: 1) Supongamos el antecedente. Si Σ es vacío está claro el resultado al estar toda lógica cerrada bajo *modus ponens*. Si Σ no es vacío, puesto que para todo teorema de L, D, y toda fórmula C, $(C \rightarrow D)$ es un teorema de L, basta el siguiente razonamiento: Sean $A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_m$ fórmulas pertenecientes a Σ tales que

$$(A_0 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow A \text{ y } (B_0 \wedge \dots \wedge B_m) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

son teoremas de L. Ahora bien, la fórmula

$$((A_0 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow A) \rightarrow (((B_0 \wedge \dots \wedge B_m) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((A_0 \wedge \dots \wedge A_n \wedge B_0 \wedge \dots \wedge B_m) \rightarrow B))$$

es una instancia de sustitución de una tautología, y por tanto pertenece a L. Por sucesivas aplicaciones de *modus ponens* obtenemos que la fórmula

$$(A_0 \wedge \dots \wedge A_n \wedge B_0 \wedge \dots \wedge B_m) \rightarrow B$$

es un teorema de L, y por tanto que B es deducible (en L) de Σ .

2) Si A y B son deducibles de Σ (en L), entonces si Σ es vacío son teoremas de L, y puesto que $(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)))$ es una instancia de sustitución de una tautología, y por tanto un teorema de L, por *modus ponens* tenemos que $(A \wedge B)$ es un teorema de L. Si Σ no es vacío, por la misma razón que en 1), basta el siguiente razonamiento: Sean $A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_m$ fórmulas de Σ tales que $(A_0 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow A$ y $(B_0 \wedge \dots \wedge B_m) \rightarrow B$ son teoremas de L. Puesto que la fórmula

$$(((A_0 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow A) \rightarrow (((B_0 \wedge \dots \wedge B_m) \rightarrow B) \rightarrow ((A_0 \wedge \dots \wedge A_n \wedge B_0 \wedge \dots \wedge B_m) \rightarrow (A \wedge B))))$$

es una instancia de sustitución de una tautología, tenemos que es un teorema de L; y por tanto, usando *modus ponens*, podemos concluir que $(A \wedge B)$ es deducible de Σ (en L).

Para demostrar el otro sentido del bicondicional puede razonarse de modo parecido. ||

4. Dado un lenguaje modal sentencial $\mathcal{P}$ consideremos el lenguaje sentencial cuyas fórmulas atómicas son las letras sentenciales pertenecientes a $\mathcal{P}$ y las fórmulas de la forma $\Box A$ y cuyas conectivas y constante sentencial son las del lenguaje $\mathcal{P}$. Las fórmulas de este lenguaje sentencial son esencialmente las fórmulas del lenguaje modal sentencial $\mathcal{P}$. Por tanto, lo que proponemos es «mirar» nuestro lenguaje sentencial modal de otro modo, verlo como un lenguaje sentencial. En él las fórmulas de la forma $\Box A$ se consideran como un bloque sin analizar.

Diremos que una fórmula A es una *consecuencia tautológica* de un conjunto de fórmulas Σ si no existe ninguna asignación v para el lenguaje modal considerado sentencialmente del modo en que se ha indicado, es decir ninguna función v que asigna un elemento de $\{0,1\}$ a cada fórmula atómica, y cuya extensión v^* a todas las fórmulas es tal que para toda fórmula $B \in \Sigma$ $v^*(B)=1$ y $v^*(A)=0$. En tal caso escribiremos $\Sigma \models_t A$.

Toda fórmula A que sea instancia de sustitución de una tautología (del sublenguaje sentencial de $\mathcal{P}$) es una tautología del lenguaje sentencial que estamos considerando, es decir, es tal que para toda asignación para éste, v , $v^*(A)=1$. Y a la inversa.

PROPOSICIÓN 2.7: Si para cada $A \in \Delta$, $\Sigma \vdash_L A$ y $\Delta \models_t B$, entonces $\Sigma \vdash_L B$.

Prueba: Supongamos el antecedente. Si B es instancia de sustitución de una tautología, entonces es deducible de Σ . En otro caso, sean $A_0, \dots, A_n \in \Delta$ tales que $((A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow (\dots (A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow B)) \dots))$ es una instancia de sustitución de una tautología, y por tanto deducible de Σ . Por el lema 2.6 tenemos que B es deducible de Σ .||

La proposición anterior nos permite afirmar que cualquier razonamiento sentencial aplicado a fórmulas deducibles de Σ nos lleva a fórmulas deducibles de Σ . En particular, cualquier razonamiento proposicional aplicado a teoremas de una lógica nos lleva a teoremas de la lógica. Así, toda lógica está cerrada bajo consecuencia tautológica, y el conjunto de fórmulas deducibles, en una lógica, de un conjunto de fórmulas dado también lo está.

Escribamos $\text{Ded}_L(\Sigma) = \{A : \Sigma \vdash_L A\}$. Resulta que este conjunto es el menor conjunto que contiene a L , a Σ , y está cerrado bajo *modus ponens*, lo que puede comprobar fácilmente el lector.

PROPOSICIÓN 2.8: $\text{Ded}_L(\Sigma) = \{A : L \cup \Sigma \models_t A\}$.

Prueba: El conjunto $\{A : L \cup \Sigma \models_t A\}$ contiene a L , a Σ , y está cerrado bajo *modus ponens*. Por tanto el conjunto $\text{Ded}_L(\Sigma)$ está incluido en el mismo. Por otro lado, si $L \cup \Sigma \models_t A$, entonces o A es una instancia de sustitución de una tautología, en cuyo caso pertenece a L y es deducible de Σ , o existen $B_0, \dots, B_n$ pertenecientes a L y $C_0, \dots, C_m$ pertenecientes a Σ tales que la fórmula $((B_0 \wedge \dots \wedge B_n \wedge C_0 \wedge \dots \wedge C_m) \rightarrow A)$ es una instancia de sustitución de una tautología y por tanto $((C_0 \wedge \dots \wedge C_m) \rightarrow A)$ es un teorema de L , con lo que A es deducible de Σ . Obtenemos pues la inclusión en el otro sentido.||

La proposición anterior es especialmente significativa, nos muestra que las fórmulas deducibles de un conjunto de fórmulas Σ (en una lógica L) son precisamente las consecuencias tautológicas de Σ módulo L .

5. En este apartado vamos a demostrar que una serie de fórmulas son teoremas de toda lógica normal. Serán fórmulas para

las que el hecho de ser teoremas depende de razones esencialmente modales.

PROPOSICIÓN 2.9: Si L es una lógica normal, entonces para toda fórmula A y toda fórmula B , las siguientes fórmulas son teoremas de L :

$$1) \quad \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$$

$$2) \quad (\Diamond A \vee \Diamond B) \leftrightarrow \Diamond(A \vee B)$$

$$3) \quad (\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box(A \vee B)$$

$$4) \quad \Diamond(A \wedge B) \rightarrow (\Diamond A \wedge \Diamond B)$$

$$5) \quad \Diamond \neg A \leftrightarrow \neg \Box A.$$

Prueba: 1) $(A \wedge B) \rightarrow A$ y $(A \wedge B) \rightarrow B$ pertenecen a L al ser instancias de sustitución de tautologías. Por tanto, por la regla de necesidad, el axioma distributivo, y *modus ponens*, tenemos que tanto la fórmula $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A$, como la fórmula $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B$ son teoremas de L . Por tanto, por un razonamiento sentencial, tenemos que $\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$ es un teorema de L . Por otra parte, $(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)))$ es instancia de sust. de una tautología. Por tanto, por la regla de necesidad, el axioma distributivo y *modus ponens* tenemos que $\Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow (A \wedge B))$ pertenece a L , pero entonces por el axioma distributivo y razonamientos sentenciales tenemos que la fórmula $(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$ es un teorema de L . Para concluir, por razones sentenciales tenemos lo deseado.

2) Por 1) $(\Box \neg A \wedge \Box \neg B) \leftrightarrow \Box(\neg A \wedge \neg B)$ es un teorema de L . Por tanto, por razones sentenciales, $\neg(\Box \neg A \wedge \Box \neg B) \leftrightarrow \neg \Box(\neg A \wedge \neg B) \in L$, y así la fórmula $(\neg \Box \neg A \vee \neg \Box \neg B) \leftrightarrow \neg \Box(\neg A \wedge \neg B) \in L$. Puesto que $(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(A \vee B) \in L$ tenemos que $\neg \Box(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg \Box \neg(A \vee B) \in L$. Por tanto la siguiente fórmula es un teorema de L : $(\neg \Box \neg A \vee \neg \Box \neg B) \leftrightarrow \neg \Box \neg(A \vee B)$. Con lo cual tenemos lo deseado.

3) $A \rightarrow (A \vee B) \in L$ y $B \rightarrow (A \vee B) \in L$. Por tanto, por la regla de necesidad, el axioma distributivo, y *modus ponens* tene-

mos que $\Box A \rightarrow \Box(A \vee B) \in L$ y que $\Box B \rightarrow \Box(A \vee B) \in L$. Por tanto $(\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box(A \vee B)$ es un teorema de L .

Las pruebas de 4) y de 5) se dejan como ejercicio.¶

PROPOSICIÓN 2.10 : *Si L es una lógica normal, entonces para toda fórmula A y toda fórmula B , si $A \rightarrow B \in L$, entonces $\Diamond A \rightarrow \Diamond B \in L$.*

Prueba: Supongamos el antecedente. Entonces $\neg B \rightarrow \neg A \in L$, con lo cual por la regla de necesidad tenemos que $\Box(\neg B \rightarrow \neg A) \in L$. Entonces, por el axioma distributivo y *modus ponens*, tenemos que $\Box \neg B \rightarrow \Box \neg A \in L$. Por tanto por lógica sentencial tenemos que $\neg \Box \neg A \rightarrow \neg \Box \neg B \in L$.¶

PROPOSICIÓN 2.11: *Si L es una lógica normal y $A_0, \dots, A_n$, y B son fórmulas y $(A_0 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B \in L$, entonces $(\Box A_0 \wedge \dots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box B \in L$.*

Prueba: Por inducción en n . Se deja como ejercicio para el lector.¶

PROPOSICIÓN 2.12 : *Para toda lógica normal L y cualesquiera fórmulas A, B, C y letra sentencial p , si $A \leftrightarrow B \in L$, entonces $C(p/A) \leftrightarrow C(p/B) \in L$.*

Prueba: Por inducción. a) Si C es una letra sentencial y C es p , entonces $C(p/A)$ es A y $C(p/B)$ es B . Si C no es p , tanto $C(p/A)$ como $C(p/B)$ son C . En ambos casos el bicondicional pertenece a L . b) Si C es $\perp$, entonces tanto $C(p/A)$ como $C(p/B)$ son $\perp$, con lo cual el bicondicional pertenece a L . c) Supongamos que vale para C_1 y para C_2 . Veamos que vale para $C_1 \rightarrow C_2$. Tenemos que $(C_1 \rightarrow C_2)(p/A)$ es $C_1(p/A) \rightarrow C_2(p/A)$, y $(C_1 \rightarrow C_2)(p/B)$ es $C_1(p/B) \rightarrow C_2(p/B)$. Por tanto si $A \leftrightarrow B \in L$ tenemos por la hipótesis inductiva que $C_1(p/A) \leftrightarrow C_1(p/B) \in L$ y también que $C_2(p/A) \leftrightarrow C_2(p/B) \in L$. Por tanto

$$(C_1(p/A) \rightarrow C_2(p/A)) \leftrightarrow (C_1(p/B) \rightarrow C_2(p/B)) \in L$$

con lo cual tenemos lo deseado. d) Supongamos que vale para C . Veamos que vale para $\Box C$. $(\Box C)(p/A)$ es $\Box C(p/A)$ y $(\Box C)(p/B)$ es $\Box C(p/B)$. Así, si $A \leftrightarrow B$ es un teorema de L , tenemos, por la hipótesis inductiva, que $C(p/A) \leftrightarrow C(p/B)$ es un teorema de L . Por

tanto $\Box C(p/A) \leftrightarrow \Box C(p/B) \in L$, y tenemos por tanto lo deseado. $\square$

COROLARIO 2.13 : *Si L es una lógica normal y $A \leftrightarrow B \in L$ y C es una fórmula cualquiera, y sustituimos en C alguna ocurrencia de A por B , entonces, si llamamos C' al resultado, tenemos que $C \leftrightarrow C' \in L$.*

Prueba: Sea C una fórmula cualquiera. Consideremos una ocurrencia de A en C . Podemos ver a C como obtenida a partir de una fórmula E tal que $E(p/A)$ es C , donde p es una letra sentencial que cumple con las condiciones necesarias para que lo anterior tenga sentido. Entonces $E(p/B)$ es C' . Por tanto por la proposición 2.12 $E(p/A) \leftrightarrow E(p/B) \in L$, con lo cual tenemos lo deseado. $\square$

EJERCICIOS

2.1. Demostrar la proposición 2.1.

2.2. Demostrar que la lógica K es la lógica normal generada a partir del conjunto $\text{Taut}(\mathcal{P}) \cup \{\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)\}$ por las reglas de *modus ponens*, necesidad y sustitución.

2.3. Demostrar completamente la proposición 2.2.

2.4. Demostrar en detalle el teorema 2.4. Basta demostrar que si Σ es un conjunto recursivamente enumerable de fórmulas en un lenguaje numerable, y $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ es una enumeración efectiva de Σ entonces el conjunto $\{A_0 \wedge \dots \wedge A_n : n \in \omega\}$ es un conjunto recursivo que determina la misma lógica normal que Σ .

2.5. Demostrar que, si L es una lógica normal, entonces una fórmula A es un teorema de L si y sólo si existe $n \in \omega$ y $A_0, \dots, A_n \in L$ tales que la fórmula $(A_0 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow A$ es un teorema de K .

2.6. Diremos que un conjunto de fórmulas Σ está cerrado bajo necesidad si, para cada fórmula $A \in \Sigma$, $\Box A \in \Sigma$. Demostrar que si Σ está cerrado bajo necesidad, entonces $\{A : \Sigma \vdash_K A\}$ está cerrado bajo necesidad.

2.7. Diremos que un conjunto de fórmulas Σ está cerrado bajo sustitución si, para cada fórmula $A \in \Sigma$, toda instancia de sustitución de A pertenece a Σ . Demostrar que, si Σ está cerrado bajo sustitución, entonces $\{A : \Sigma \vdash_K A\}$ está cerrado bajo sustitución.

2.8. Demostrar que, si Σ es un conjunto de fórmulas cerrado bajo necesidad y sustitución, entonces $L(\Sigma) = \{A : \Sigma \vdash_K A\}$. Así, si Σ es un conjunto de axiomas para una lógica normal L y consideramos la clausura de Σ bajo necesidad y sustitución, digamos $\Sigma^{n,s}$, entonces L es el conjunto de fórmulas deducibles en K a partir de $\Sigma^{n,s}$.

2.9. Demostrar que, si Σ es un conjunto arbitrario de fórmulas y L es una lógica, entonces $\{A : \Sigma \vdash_L A\}$ no tiene por qué ser una lógica.

2.10. Demostrar que, si L es una lógica y Σ un conjunto de fórmulas L -consistente, entonces para toda fórmula A , $\Sigma \cup \{A\}$ es L -consistente o bien $\Sigma \cup \{\neg A\}$ es L -consistente.

2.11. Demostrar que, si L es una lógica, entonces L es normal si y sólo si

- i) $\vdash_L \Box T$
- ii) $\vdash_L (\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box (A \wedge B)$
- iii) Si $\vdash_L A \rightarrow B$ entonces $\vdash_L \Box A \rightarrow \Box B$.

2.12. Demostrar que, si L es una lógica, entonces L es normal si y sólo si para cada n

- i) Si $\vdash_L (A_0 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow A$, entonces $\vdash_L (\Box A_0 \wedge \dots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box A$
- ii) Si $\vdash_L A$, entonces $\vdash_L \Box A$.

2.13. Demostrar que, si L es una lógica, entonces L es normal si y sólo si

- i) $\vdash_L \Box T$
- ii) Si $\vdash_L (A \wedge B) \rightarrow C$, entonces $\vdash_L (\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box C$.

2.14. Demostrar que, si L es una lógica, entonces L es normal si y sólo si

- i) $\vdash_L \Box T$
- ii) $\vdash_L (\Box A \wedge \Box B) \leftrightarrow \Box (A \wedge B)$.
- iii) Si $\vdash_L (A \leftrightarrow B)$, entonces $\vdash_L \Box A \leftrightarrow \Box B$.

2.15. Demostrar que hay lógicas que no son ni clásicas, ni normales, ni regulares. Por ejemplo, la menor lógica. Para ello debe

buscarse una propiedad que tengan todas las tautologías, se transmite por *modus ponens* y sustitución pero no mediante las reglas que caracterizan a las lógicas clásicas, regulares y normales, y sea tal que no la posean las instancias del axioma distributivo.

2.16. Demostrar que hay lógicas clásicas que no son regulares y lógicas regulares que no son normales. La idea a seguir es la misma que en el ejercicio anterior.

2.17. Sea A un conjunto no vacío, y $\leq$ una relación en A . $\langle A, \leq \rangle$ es un *retículo* si y sólo si $\leq$ es un orden parcial en A (es decir, es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva) tal que para cada par de elementos x e y de A existe un supremo y un ínfimo. Un elemento z de A se dice que es un *supremo* de x e y si $x \leq z$ y $y \leq z$ y para todo $u \in A$ tal que $x \leq u$ y $y \leq u$, $z \leq u$. Y un elemento $z \in A$ se dice que es un *ínfimo* de x e y si $z \leq x$ y $z \leq y$ y para cada $u \in A$ tal que $u \leq x$ y $u \leq y$, $u \leq z$.

Demostrar que en un retículo cada dos elementos tienen un único supremo y un único ínfimo. Demostrar que la clase de las lógicas normales ordenadas parcialmente mediante la relación de inclusión forman un retículo.

2.18. Demostrar que si L es una lógica regular, entonces está cerrada bajo la regla: Si $A \rightarrow B \in L$, entonces $\Diamond A \rightarrow \Diamond B \in L$.

2.19. Demostrar que toda lógica normal está cerrada bajo la regla: Si $\Diamond \Box (A \wedge B) \in L$, entonces $(\Diamond \Box A \wedge \Diamond \Box B) \in L$.

2.20. Supongamos que una lógica está cerrada bajo cierta regla, es decir, ocurre que si una fórmula de cierto tipo A pertenece a la lógica, entonces una nueva fórmula A^* que se obtiene a partir de A mediante ciertas transformaciones sintácticas también es un teorema de la lógica. ¿Es necesariamente verdad que el condicional $A \rightarrow A^*$ es un teorema de la lógica?

CAPÍTULO 3

SEMÁNTICA PARA LA LÓGICA MODAL

1. Un *marco modal* es un par $\mathbf{M} = \langle M, R \rangle$ donde M es un conjunto no vacío y R es una relación en M . A los elementos de M es usual llamarlos *mundos posibles*. En este libro los llamaremos *índices* para despojarlos de una metáfora apta para el caso en que $\Box$ se interpreta como necesario pero poco apta cuando se interpreta de otros modos.

Si $\mathbf{M}$ es un marco modal, una *asignación* e en $\mathbf{M}$ es una función $e: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}(M)$.

Dado un marco modal $\mathbf{M}$ y una asignación e en $\mathbf{M}$ podemos, gracias al teorema de definición por recursión, extender e a una única función de $\text{For}(\mathcal{P})$ en $\mathcal{P}(M)$, a la que seguiremos llamando e , tal que:

$$1) \ e(\perp) = \emptyset.$$

$$2) \ e((A \rightarrow B)) = (M - e(A)) \cup e(B).$$

$$3) \ e(\Box A) = \{x \in M: \forall y (xRy \rightarrow y \in e(A))\}.$$

De la definición que acabamos de dar se sigue que para cada marco modal $\mathbf{M}$, cada asignación e en $\mathbf{M}$ y cualesquiera fórmulas A y B ,

$$4) \ e(T) = M.$$

$$5) \ e((A \vee B)) = e(A) \cup e(B).$$

$$6) \ e((A \wedge B)) = e(A) \cap e(B).$$

$$7) \ e(\neg A) = M - e(A).$$

$$8) \ e(\Diamond A) = \{x \in M: \exists y \in M (xRy \wedge y \in e(A))\}.$$

Un *modelo* en un marco $\langle M, R \rangle$ es un triplo $\langle M, R, e \rangle$ donde e es una asignación en $\langle M, R \rangle$.

Dado un modelo $\langle M, R, e \rangle$, podemos pensar en la asignación e como si asignara valores de verdad, en cada elemento de M , a las letras sentenciales, y en su extensión como si asignara valores de verdad a cada fórmula en cada elemento de M ¹. Así, dado un modelo $\langle M, R, e \rangle$ y un elemento $x \in M$, decimos que una *fórmula* A es *verdadera* en x si $x \in e(A)$. En tal caso podemos escribir $\langle M, R, e \rangle \models_x A$.

Decimos que una *fórmula* A es *válida en el modelo* $\langle M, R, e \rangle$ si para cada $x \in M$ A es verdadera en x . En tal caso escribimos $\langle M, R, e \rangle \models A$.

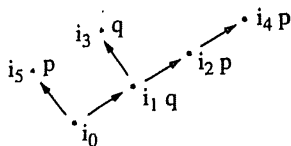
Decimos que una *fórmula* A es *válida en el marco* $\langle M, R \rangle$ si es válida en cada modelo en el marco $\langle M, R \rangle$. En tal caso escribiremos $\langle M, R \rangle \models A$.

Dado un conjunto de fórmulas Σ , escribiremos $\langle M, R, e \rangle \models \Sigma$ para indicar que todas las fórmulas pertenecientes a Σ son válidas en el modelo $\langle M, R, e \rangle$. Y escribiremos $\langle M, R \rangle \models \Sigma$ para indicar que todas las fórmulas pertenecientes a Σ son válidas en el marco $\langle M, R \rangle$.

Dada una clase C de marcos, decimos que una *fórmula* A es *válida en la clase de marcos* C si A es válida en todo marco perteneciente a C . Obsérvese que una fórmula A es válida en una clase de marcos si y sólo si es válida en todo modelo de todo marco perteneciente a la clase.

EJEMPLOS: Veamos a continuación cómo una serie de fórmulas se interpretan en algunos modelos:

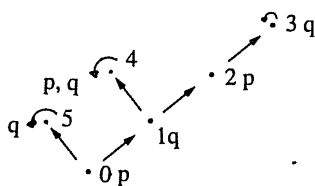
1) Consideremos la fórmula $\Box p \rightarrow \Box q$ y el modelo de diagrama



¹ Podemos ser más precisos como sigue: Dada una letra sentencial p podemos considerar la función característica de $e(p)$, F_p , que asigna a cada índice $i \in M$ 1 ó 0 según si i pertenece o no a $e(p)$. En tal caso la función $g: P \times M \rightarrow \{0,1\}$ que para cada $i \in M$ y cada $r \in P$, $g(r,i) = f_r(i)$, puede verse como una función que asigna a cada letra sentencial un valor de verdad en un índice.

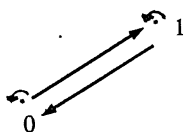
Las líneas deben interpretarse representando la relación R del modelo en el sentido de las flechas; así, por ejemplo, $i_0 R i_1$ e $i_0 R i_5$. En principio ningún nudo o punto está relacionado consigo mismo. Para representar que un punto está relacionado consigo mismo lo haremos explícitamente trazando una flecha que salga del punto y vuelva al punto. Los diagramas los interpretaremos, a menos que se diga explícitamente que se considera a la relación transitiva, siempre representando relaciones no transitivas. Así, entenderemos que la relación está completamente representada por las flechas del diagrama. Las letras sentenciales escritas junto a los puntos deben entenderse indicando que son verdaderas en los índices correspondientes. Si una letra sentencial no aparece en un índice significa que es falsa en tal índice. Con estas convenciones tenemos que la fórmula que estamos considerando es verdadera en el índice i_3 al ser la fórmula $\Box q$ trivialmente verdadera en i_3 . También es verdadera en i_0 y en i_1 puesto que en estos índices es falsa la fórmula $\Box p$. Es falsa en i_2 pues en este índice es verdadera la fórmula $\Box p$ pero es falsa la fórmula $\Box q$.

2) Consideremos ahora la fórmula $\Box p \rightarrow \Diamond \Box q$, y el modelo de diagrama

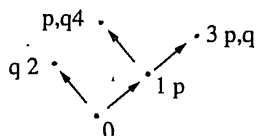


Entonces la fórmula es verdadera en todo índice pues en los índices 0, 2, 3, 5 es falsa la fórmula $\Box p$. En el índice 1 $\Box p$ es verdadera y además, puesto que en el índice 4 es verdadera $\Box q$ y tenemos que $1R4$, resulta que en 1 es verdadera $\Diamond \Box q$. Por último, en el índice 4 son verdaderas tanto $\Box p$ como $\Box q$ y puesto que $4R4$ tenemos que $\Diamond \Box q$ es también verdadera en 4.

3) La fórmula $\Diamond p \rightarrow \Box p$ es falsa en todo índice del modelo de diagrama



4) La fórmula $\Diamond p \wedge \Diamond q \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$ es falsa en el índice 0 del modelo de diagrama



y es verdadera en el índice 1 (recordemos que consideramos a la relación no transitiva).

5) La fórmula $\Box p \rightarrow \Diamond p$ es falsa en el modelo de diagrama

• p

Si se observan bien los diagramas de los ejemplos, se ve que, en los índices que no están relacionados con ningún índice, toda fórmula de la forma $\Box A$ es trivialmente verdadera, y toda fórmula de la forma $\Diamond A$ es trivialmente falsa. Así, ninguna fórmula de tipo $\Diamond A$ puede ser válida en todo modelo, ni puede ser válida en todo marco. A los índices de un modelo con la propiedad descrita los llamaremos *índices* (o puntos) *finales*.

6) La fórmula $\Box T$ es verdadera en todo índice de todo modelo, por tanto es válida en todo modelo y válida en todo marco. De igual modo, si una fórmula A es válida en un modelo (o válida en un marco) lo es $\Box A$, y si lo es en todo modelo (o todo marco) lo es $\Box A$.

7) Consideremos la fórmula $\Box p \vee \Box(p \rightarrow q) \vee \Box((p \wedge q) \rightarrow r)$. Esta fórmula es válida en el marco $\langle \{1, 2\}, R \rangle$ donde R es la relación total en $\{1, 2\}$, pero en cambio no es válida en el marco $\langle \{1, 2, 3\}, S \rangle$ donde S es la relación total en $\{1, 2, 3\}$.

LEMA 3.1:

- 1) $(A \rightarrow B)$ es válida en $\langle M, R, e \rangle$ si y sólo si $e(A) \subseteq e(B)$.
- 2) $\neg A$ es válida en $\langle M, R, e \rangle$ si y sólo si $e(A) = \emptyset$.
- 3) $(A \wedge B)$ es válida en $\langle M, R, e \rangle$ si y sólo si $e(A) = M$ y $e(B) = M$.
- 4) $(A \vee B)$ es válida en $\langle M, R, e \rangle$ si y sólo si $e(A) \cup e(B) = M$.

5) $\Box A$ es válida en $\langle M, R, e \rangle$ si y sólo si $\forall x \in M \forall y \in M (xRy \rightarrow y \in e(A))$.

6) $\Diamond A$ es válida en $\langle M, R, e \rangle$ si y sólo si $\forall x \in M \exists y \in M (xRy \wedge y \in e(A))$.

Prueba: Se deja como ejercicio para el lector.■

2. Vamos a estudiar a continuación cómo obtener lógicas normales a partir de clases de marcos cualesquiera. El resultado viene expresado en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.2: *Para toda clase de marcos C , el conjunto de todas las fórmulas válidas en todo marco perteneciente a C es una lógica normal.*

Para demostrar esta proposición, primero demostraremos una serie de lemas que es bueno tener presentes independientemente.

LEMA 3.3: a) *Toda tautología del sublenguaje sentencial es válida en todo modelo.*

b) *Toda tautología del sublenguaje sentencial es válida en todo marco.*

Prueba: b) se sigue de a). Para probar a), dado un modelo $\langle M, R, e \rangle$, y un índice $x \in M$, sea v_x la asignación de valores de verdad a las letras sentenciales definida por $v_x(p) = 1$, si $x \in e(p)$ y $v_x(p) = 0$, si $x \notin e(p)$, para cada letra sentencial p . Por inducción se prueba que para cada fórmula A del sublenguaje sentencial, $v_x(A) = 1$ si y sólo si $x \in e(A)$. Por tanto, si A es una tautología tenemos que para todo $x \in M$ $v_x(A) = 1$, con lo que $e(A) = M$, y A es válida en el modelo.■

LEMA 3.4: a) *Si $(A \rightarrow B)$ y A son válidas en un modelo, también lo es B .*

b) *Si $(A \rightarrow B)$ y A son válidas en un marco, también lo es B .*

Prueba: b) se sigue de a). a) Si $(A \rightarrow B)$ y A son válidas en $\langle M, R, e \rangle$, entonces $e(A) \subseteq e(B)$ y $e(A) = M$, con lo que $e(B) = M$ y B es válida en el modelo.■

LEMA 3.5: a) *Si A es válida en un modelo, también lo es $\Box A$.*

b) *Si A es válida en un marco, también lo es $\Box A$.*

Prueba: b) se sigue de a). a) Si A es válida en $\langle M, R, e \rangle$, enton-

ces $e(A) = M$, pero en tal caso $e(\Box A) = M$ con lo que $\Box A$ es también válida en el modelo. $\blacksquare$

LEMA 3.6: a) *Toda fórmula de tipo $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ es válida en todo modelo.*

b) *Toda fórmula de tipo $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ es válida en todo marco.*

Prueba: b) se sigue de a). a) Sea $\langle M, R; e \rangle$ un modelo. Veamos que $e(\Box(A \rightarrow B))$ está incluido en $e(\Box A \rightarrow \Box B)$. Si $x \in e(\Box(A \rightarrow B))$, supongamos que $x \in e(\Box A)$. Entonces tenemos que si xRy , $y \in e(A \rightarrow B)$ e $y \in e(A)$, y por tanto $y \in e(B)$, con lo que podemos concluir que $x \in e(\Box B)$. Por tanto $x \in e(\Box A \rightarrow \Box B)$. $\blacksquare$

LEMA 3.7: *Si $\langle M, R \rangle$ es un marco y e una asignación en él, entonces para toda fórmula B y toda letra sentencial p , si consideramos la asignación e' en $\langle M, R \rangle$ definida por $e'(q) = e(q)$ para cada letra sentencial q distinta de p , y $e'(p) = e(B)$, resulta que para toda fórmula A*

$$e'(A) = e(A(p/B))$$

Prueba: Por inducción sobre la complejidad de las fórmulas. Se deja como ejercicio para el lector. $\blacksquare$

LEMA 3.8: *Si A es válida en un marco, entonces para toda letra sentencial p y toda fórmula B la fórmula $A(p/B)$ es válida en el marco.*

Prueba: Sea A válida en el marco $\langle M, R \rangle$. Sea e una asignación cualquiera en tal marco. Veamos que, dadas p y B , $e(A(p/B)) = M$. Consideremos la asignación e' definida como en el lema 3.7. Entonces $e'(A) = e(A(p/B))$, y al ser A válida en el marco, $e'(A) = M$. Por consiguiente, $e(A(p/B)) = M$. Por tanto $A(p/B)$ es válida en $\langle M, R \rangle$. $\blacksquare$

Los lemas 3.3 a 3.6 nos permiten concluir que la colección de fórmulas válidas en un modelo incluye a toda tautología del sublenguaje sentencial, está cerrada bajo *modus ponens*, bajo necesidad e incluye además toda instancia de sustitución del axioma distributivo. Todo ello ocurre también para el conjunto de fórmulas válidas en todo modelo de una clase de modelos no vacía

cualquiera. Los lemas 3.3 a 3.6 y 3.8 nos permiten concluir que el conjunto de todas las fórmulas válidas en un marco es una lógica normal, y también que el conjunto de fórmulas válidas en todo marco perteneciente a una clase no vacía dada de marcos es una lógica normal. Para el caso de los modelos la situación es, sin embargo, distinta: el conjunto de fórmulas válidas en un modelo no tiene por qué estar cerrado bajo sustitución. Por ejemplo, en el modelo $\langle M, R, e \rangle$ en el que $M = \{1, 2\}$, $R = \{\langle 1, 2 \rangle\}$ y e es tal que $e(p) = M$ y $e(q) = \{1\}$, la fórmula p es válida pero la q , que es instancia de sustitución de p , no lo es. Así, el conjunto de fórmulas válidas en una clase de modelos no tiene por qué ser una lógica. Ahora bien, si la clase de modelos resulta ser tal que el conjunto de las fórmulas válidas en todos ellos está cerrado bajo sustitución, entonces este conjunto sí que es una lógica.

Dada una clase de marcos C al conjunto de todas las fórmulas válidas en todo marco elemento de C la llamaremos la *lógica de C* , y nos referiremos a ella con $L(C)$. Es de observar que si C_1 y C_2 son clases de marcos tales que $C_1 \subseteq C_2$, entonces $L(C_2) \subseteq L(C_1)$.

Si M es un marco, con $L(M)$ nos referiremos a la lógica $L(\{M\})$.

3. Dada una lógica normal L , diremos que un marco es un *L-marco* si en él son válidos todos los teoremas de L . Diremos que un modelo es un *L-modelo* si en él son válidos todos los teoremas de L . Así, dado un L -marco, todo modelo en el mismo es un L -modelo. Ahora bien, del hecho de que un modelo sea un L -modelo no se sigue, como se verá más adelante, que su marco sea un L -marco. Este hecho debe tenerse muy presente.

Dada una clase C de marcos diremos que una *lógica normal L es C -correcta* (o correcta respecto a C) si todo teorema de L es válido en todo marco perteneciente a C , es decir, si $L \subseteq L(C)$. Y diremos que L es *C -completa* (o completa respecto a C) si toda fórmula válida en todo marco perteneciente a C es un teorema de L , es decir, si $L(C) \subseteq L$. Esta noción de completitud es una noción relativa a una clase de marcos. Existe una noción absoluta de completitud de una lógica. Dada una lógica L , consideremos la clase de todos los L -marcos, $C(L)$. Entonces, si la lógica de $C(L)$ es precisamente L ($L = L(C(L))$) diremos que la *lógica L es completa*, y en caso contrario que es *incompleta*. Así, una lógica es

completa si y sólo si toda fórmula válida en todo L-marco es un teorema de L.

Diremos que una lógica L es *completa respecto a sus modelos* si toda fórmula válida en todo modelo de la lógica es un teorema de L .

OBSERVACIONES: 1) Si $L_1 \subseteq L_2$, entonces $C(L_2) \subseteq C(L_1)$.
2) $L \subseteq L(C(L))$, y toda lógica es $C(L)$ -correcta.

Si una lógica normal L y una clase de marcos C son tales que $L = L(C)$, diremos que la lógica L está *caracterizada por la clase de marcos* C . Obsérvese que si una lógica está caracterizada por una clase de marcos lo está también por un conjunto de marcos, pues para cada fórmula que no sea un teorema de la lógica podemos elegir (aceptamos el axioma de elección) un marco de la clase en el que no sea válida, y puesto que la clase de teoremas de una lógica es un conjunto, la colección de marcos así elegidos es un conjunto de marcos que caracteriza a la lógica.

PROPOSICIÓN 3.9: *Una lógica normal L es completa si y sólo si está caracterizada por alguna clase de marcos.*

Prueba: Si L es completa está caracterizada por $C(L)$. Si L está caracterizada por una clase de marcos C , entonces todo marco perteneciente a C es un L -marco, con lo que $C \subseteq C(L)$. Por tanto $L(C(L)) \subseteq L(C) = L$. Concluimos pues que $L = L(C(L))$, es decir que L es completa.

PROPOSICIÓN 3.10: *Para toda lógica normal L existe una menor lógica normal completa que extiende a L , a saber la lógica $L(C(L))$.*

Prueba: Sea L una lógica normal. $L \subseteq L(C(L))$ y $L(C(L))$ es completa por 3.9. Si L' es una lógica normal completa que extiende a L , entonces $C(L') \subseteq C(L)$, y por tanto $L(C(L)) \subseteq L(C(L')) = L'$. Así, $L(C(L))$ es la menor lógica completa que extiende a L . ■

PROPOSICIÓN 3.11: *Todo teorema de la menor lógica normal K es válido en todo marco y en todo modelo. Así, todo marco es un K -marco y K es correcta respecto a la clase de todos los marcos.*

Prueba: Sea C la clase de todos los marcos, entonces por la

proposición 3.2 $L(C)$ es una lógica normal, de modo que $K \subseteq L(C)$. Así, todo teorema de K es válido en todo marco.■

4. Si el lector ha comprobado los ejemplos del apartado 1, habrá observado que, dado un modelo, para saber si una fórmula resulta verdadera o falsa en un índice, i , del modelo, lo único que importa es el valor de verdad de la fórmula en cuestión en el índice i y en aquellos índices con los que éste está relacionado. Vamos a formular este hecho adecuadamente.

Dada una relación R en un conjunto M , definimos la *relación ancestro* de R , R^* , mediante

$$xR^*y \text{ si y sólo si existe } n > 0 \text{ tal que } xR^n y$$

donde R^n se obtiene por composición repetida de R consigo misma de acuerdo con la definición por recursión siguiente:

$$\begin{aligned} R^1 &= R \\ R^{n+1} &= R^n \circ R \end{aligned}$$

Así, si $n > 0$, $xR^n y$ si y sólo si existen $z_1, \dots, z_{n-1}$ tales que $xRz_1, \dots, z_{n-1}Ry$. Podemos decir que si $xR^n y$, y es un nR -sucesor de x . Resulta que: a) R^* es la menor relación transitiva que incluye a R , b) $(R^*)^* = R^*$, y c) R es transitiva si y sólo si $R = R^*$.

Dado un marco $\langle M, R \rangle$ y un índice $x \in M$, podemos definir el marco $\langle M_x, R_x \rangle$ donde :

$$\begin{aligned} M_x &= \{x\} \cup \{y \in M : xR^*y\} \\ R_x &= R \cap (M_x \times M_x). \end{aligned}$$

El marco $\langle M_x, R_x \rangle$ es el *submarco generado por x* . Si consideramos una asignación e en el marco $\langle M, R \rangle$, definamos la asignación e_x en $\langle M_x, R_x \rangle$ por

$$e_x(p) = e(p) \cap M_x$$

El modelo $\langle M_x, R_x, e_x \rangle$ es el *submodelo de $\langle M, R, e \rangle$ generado por x* .

TEOREMA 3.12: Para cada marco $\langle M, R, \rangle$, cada asignación e

en el mismo, y cada índice $x \in M$, ocurre que para cada $y \in M_x$ y cada fórmula A

$$\langle M, R, e \rangle \models_y A \quad \text{si y sólo si} \quad \langle M_x, R_x, e_x \rangle \models_y A.$$

Prueba: Por inducción veamos que para cada fórmula A $e_x(A) = e(A) \cap M_x$. Para las letras sentenciales y la fórmula $\perp$ es obvio. El caso de las fórmulas condicionales no presenta ninguna dificultad. Probemos el caso de las fórmulas de tipo $\Box A$. Supongamos que $e_x(A) = e(A) \cap M_x$. Entonces,

$$\begin{aligned} z \in e_x(\Box A) &\text{ syss } (\forall u \in M_x) (zR_x u \rightarrow u \in e_x(A)) \\ &\text{ syss } (\forall u \in M_x) (zR_x u \rightarrow u \in e(A) \cap M_x) \end{aligned}$$

Si $z \in e_x(\Box A)$, $z \in M_x$. Veamos que $z \in e(\Box A)$. Si $u \in M$ es tal que zRu , entonces $u \in M_x$ y por tanto $zR_x u$, por consiguiente $u \in e(A)$. Por tanto $z \in e(\Box A)$. Por otro lado, si $z \in e(\Box A)$ y $z \in M_x$ y $u \in M_x$ y $zR_x u$, tenemos que zRu , y por tanto $u \in e(A) \cap M_x = e_x(A)$. Concluimos que $z \in e_x(\Box A)$. $\blacksquare$

COROLARIO 3.13: (de preservación bajo submarcos generados por índices): Si $\langle M, R \rangle$ es un marco y $x \in M$, entonces toda fórmula válida en $\langle M, R \rangle$ es válida en el submarco generado por x , $\langle M_x, R_x \rangle$.

COROLARIO 3.14: Si una lógica normal está caracterizada por una clase de marcos, lo está por la clase de los submarcos generados por índices de los marcos de la clase.

Prueba: Se deja como ejercicio para el lector. $\blacksquare$

Los enunciados correspondientes a los dos corolarios anteriores que se obtienen cambiando «marco(s)» por «modelo(s)» son también verdaderos como puede comprobar el lector.

Si dado un modelo $\langle M, R, e \rangle$ añadimos índices al conjunto M y ampliamos la relación de modo que ningún elemento de M resulte relacionado con algún índice (nuevo o no) con el que no lo estaba previamente, aunque algún índice nuevo pueda estar relacionado con uno viejo (el sentido en que estamos usando «relacionado con» no es simétrico), y no cambiamos la asignación, resulta que las fórmulas válidas en el nuevo modelo son válidas también en el

inicial, y, lo que es más interesante, las fórmulas válidas en el nuevo marco eran ya válidas en el inicial. A tales extensiones de marcos se las llama extensiones seguras. Más precisamente, un marco $\langle M', R' \rangle$ es una *extensión segura* de un marco $\langle M, R \rangle$ si

- i) $M \subseteq M'$
- ii) $R \subseteq R'$
- iii) Si $uR'v$ y $u \in M$, entonces $v \in M$ y uRv .

Obsérvese que para cada u, v elementos de M , uRv si y sólo si $uR'v$, y además que dado un elemento u de M no existe ningún $v \in M' - M$ tal que $uR'v$. Resulta que

1) Si $\langle M', R' \rangle$ es una extensión segura de $\langle M, R \rangle$, entonces para toda asignación e en $\langle M, R \rangle$, todo $x \in M$ y toda fórmula A

$$\langle M, R, e \rangle \models_x A \quad \text{si y sólo si} \quad \langle M', R', e \rangle \models_x A$$

2) Si $\langle M', R' \rangle$ es una extensión segura de $\langle M, R \rangle$, entonces para toda fórmula A , si A es válida en $\langle M', R' \rangle$, también lo es en $\langle M, R \rangle$.

El lector puede demostrarlo como ejercicio.

5. Puesto que tenemos dos tipos de entidades, los marcos y los modelos, podemos introducir, por el momento, dos nociones de consecuencia modal. Dado un conjunto de formulas modales Σ , diremos que A es una *consecuencia fuerte* (o f-consecuencia) de Σ si y sólo si A es válida en todo marco en el que son válidas todas las fórmulas pertenecientes a Σ , y escribiremos en tal caso $\Sigma \models_f A$. Diremos que A es una *consecuencia débil* (o d-consecuencia) de Σ si y sólo si A es válida en todo modelo en el que son válidas todas las fórmulas pertenecientes a Σ , y escribiremos cuando éste sea el caso $\Sigma \models_d A$.

Resulta que, si A es un teorema de la lógica normal que tiene como conjunto de axiomas a Σ , entonces $\Sigma \models_f A$. Ello es así puesto que, si M es un marco en el que son válidas todas las fórmulas de Σ , entonces $\Sigma \subseteq L(M)$ (donde $L(M)$ es la lógica determinada por el marco M), y por tanto $L(\Sigma) \subseteq L(M)$, de modo que todo teorema de la lógica normal que tiene a Σ por un conjunto de axiomas es válido en el marco M . Ahora bien, del hecho de que $\Sigma \models_f A$ no se sigue necesariamente que A sea un teorema de la lógica axiomati-

zada por Σ . El conjunto $\{A : \Sigma \models_f A\}$ es una lógica completa, es la lógica de la clase de marcos $\{M : \Sigma \models_f M\}$, y es la menor lógica completa que extiende a la lógica $L(\Sigma)$ puesto que $C(L(\Sigma)) = \{M : M \models \Sigma\}$ y por tanto $L(C(L(\Sigma))) = \{A : \Sigma \models_f A\}$. Afirmar que $L(\Sigma)$ es completa equivale a afirmar que $L(\Sigma) = \{A : \Sigma \models_f A\}$. Puesto que, como veremos en el capítulo 6, existen lógicas incompletas, $L(\Sigma)$ y $\{A : \Sigma \models_f A\}$ no son necesariamente iguales para todo Σ .

En los ejercicios de este capítulo se define la noción de consecuencia local débil. Se recomienda al lector interesado en las distintas nociones de consecuencia que realice los ejercicios 3.8 y 3.9 de este capítulo y, en su momento, los ejercicios 5.13, 5.14 y 5.15 del capítulo 5.

6. En un capítulo posterior estudiaremos con detenimiento las relaciones que hay entre el hecho de que la relación de un marco tenga ciertas propiedades y el hecho de que en él sean válidas cierto tipo de fórmulas. Ahora, sin embargo, veremos qué ocurre en el caso de que la relación del marco sea reflexiva, y qué ocurre con modelos irreflexivos. Todo ello nos servirá para poner de manifiesto diferencias esenciales entre dar una semántica en la que las nociones fundamentales son las de validez en un marco, consecuencia fuerte y completitud (respecto a marcos, que es como hemos definido esta noción), y una semántica en la que las nociones fundamentales son las de validez en un modelo, consecuencia débil, y completitud de una lógica respecto a la clase de sus modelos. Si el lector reflexiona, desde esta perspectiva, sobre los párrafos anteriores puede darse cuenta ya de algunas de estas diferencias.

Si $\langle M, R \rangle$ es un marco y R es reflexiva en M , entonces para toda asignación e en el mismo y toda fórmula A , $\langle M, R, e \rangle \models \Box A \rightarrow A$. La razón es la siguiente: Si $x \in e(\Box A)$, entonces para todo $y \in M$, si xRy tenemos que $y \in e(A)$. Puesto que xRx al ser R reflexiva en M , resulta que $x \in e(A)$, y por tanto que $\Box A \rightarrow A$ es verdadera en x .

Por otra parte, si para toda fórmula A , $\Box A \rightarrow A$ es válida en un marco $\langle M, R \rangle$, entonces la relación R es reflexiva en M . De hecho lo anterior ocurre si y sólo si la fórmula $\Box p \rightarrow p$ es válida en $\langle M, R \rangle$. La razón es la siguiente: Supongamos que $\Box p \rightarrow p$ es válida en el marco $\langle M, R \rangle$. Sea u un elemento de M . Para ver que uRu consideremos el conjunto $X = \{v \in M : uRv\}$. Sea e una asignación

cualquiera en el marco tal que $e(p) = X$. Entonces $e(\Box p \rightarrow p) = M$. Ahora bien, $u \in e(\Box p)$, pues en caso contrario existiría $v \in M$ tal que uRv y $v \notin X$, y esto es imposible. Por tanto $u \in e(p) = X$, y uRu .

Evidentemente, si en un modelo la relación es reflexiva, en él es válida toda fórmula de tipo $\Box A \rightarrow A$. ¿Es cierto que si en un modelo es válida la fórmula $\Box p \rightarrow p$, la relación es reflexiva? La respuesta es un rotundo no. Por ejemplo, si $M = \{1, 2\}$, $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ y e es la asignación que a cada letra sentencial le asigna el conjunto de índices M , entonces en tal modelo es válida la fórmula, pero la relación es irreflexiva. Pero hay más, de hecho en tal modelo es válida toda fórmula de tipo $\Box A \rightarrow A$ pues ocurre que para toda fórmula A , $e(A)$ o es M o es vacío (lo que puede comprobar por inducción el lector), con lo cual tenemos que para cada fórmula A $e(\Box A) \subseteq e(A)$. Sin embargo, la relación del modelo es irreflexiva.

De hecho, para cada modelo, posiblemente reflexivo, podemos obtener otro modelo irreflexivo en el que son válidas exactamente las mismas fórmulas.

La construcción es la siguiente: Sea $\langle M, R, e \rangle$ un modelo cualquiera. Sea W un conjunto disjunto de M y de igual cardinalidad. Sea f una biyección de M en W . Sea $M^* = M \cup W$. Definamos la asignación e^* mediante

$$e^*(p) = e(p) \cup \{f(u) : u \in e(p)\}$$

para cada letra sentencial p . Y definamos la relación R^* en M^* como sigue

$$R^* = (R - \text{Id}_M) \cup \{\langle f(u), f(v) \rangle : uRv \text{ y } u \neq v\} \cup \{\langle u, f(u) \rangle : uRu\} \cup \{\langle f(u), u \rangle : uRu\}$$

Entonces se puede demostrar por inducción que para cada elemento u de M

$$\langle M, R, e \rangle \models_u A \text{ si y sólo si } \langle M^*, R^*, e^* \rangle \models_u A$$

y

$$\langle M, R, e \rangle \models_u A \text{ si y sólo si } \langle M^*, R^*, e^* \rangle \models_{f(u)} A,$$

con lo que ambos modelos tienen exactamente las mismas fórmulas válidas.

De todo lo anterior podemos extraer algunas consecuencias interesantes:

a) *La lógica K está caracterizada por la clase de marcos irreflexivos.*

Prueba: Si A es un teorema de K, A es válida en todo marco. Por otro lado, puesto que, como veremos en el capítulo 5, la lógica K es completa respecto a sus modelos, si A no es un teorema de K entonces no es válida en algún modelo, pero en tal caso, por lo anterior, no lo será en un modelo irreflexivo y por tanto tampoco en algún marco irreflexivo. Por tanto si A es válida en todo marco irreflexivo debe ser un teorema de K.■

b) *No existe ninguna lógica normal cuyos marcos sean precisamente los marcos irreflexivos.*

Prueba: Si L es una lógica cuyos marcos son única y exclusivamente los marcos irreflexivos, entonces, por a), $L \subseteq K$. Pero al ser K la menor lógica normal, $L = K$. En tal caso L tiene marcos no irreflexivos al ser todo marco un K-marco.■

Recapitulando, hemos visto que un marco es reflexivo si y sólo si en él es válida la fórmula $\Box p \rightarrow p$. Por tanto la lógica con esta fórmula como único axioma caracteriza la propiedad de la reflexividad. Sin embargo, no existe ninguna lógica modal que caracterice la propiedad de la irreflexividad. Así, hay propiedades de las relaciones que son caracterizables mediante lógicas modales y otras que no lo son. Hallar condiciones necesarias y suficientes para que esto ocurra va a ser parte del contenido de capítulos posteriores, y este tema y este tipo de consideraciones van a recurrir a lo largo de todo el libro.

EJERCICIOS

- 3.1. Comprobar los ejemplos 1) - 5).
- 3.2. Demostrar el lema 3.1.
- 3.3. Demostrar el lema 3.7.
- 3.4. Demostrar el corolario 3.14.

3.5. Demostrar los enunciados correspondientes a los corolarios 3.13 y 3.14 que se obtienen al cambiar la palabra «marco» por «modelo».

3.6. Demostrar los enunciados 1) y 2) de la página 46 referentes a extensiones seguras.

Dada una fórmula A , definamos $\Box^n A$ por recursión como sigue:

$$\begin{aligned}\Box^0 A &\text{ es } A \\ \Box^{n+1} A &\text{ es } \Box \Box^n A.\end{aligned}$$

3.7. Demostrar que :

i) $\langle M, R, e \rangle \models_x \Box^n A$ si y sólo si $\forall y (xR^n y \rightarrow y \in e(A))$

ii) $\langle M, R, e \rangle \models_x \Diamond^n A$ si y sólo si $\exists y (xR^n y \wedge y \in e(A))$

donde R^n se define como en la página 44 de este capítulo para n mayor que cero y para $n = 0$, R^0 esta relación de identidad en M . Y $\Diamond^n A$ se define como $\neg \Box^n \neg A$, o recursivamente por: $\Diamond^0 A$ es A , y $\Diamond^{n+1} A$ es $\Diamond \Diamond^n A$.

Dado un conjunto Σ de fórmulas, consideremos el conjunto

$$\Box \Sigma = \{ \Box^n A : A \in \Sigma \text{ y } n \text{ número natural} \}$$

que es la clausura de Σ bajo necesidad.

3.8. Dado un conjunto de fórmulas Σ , digamos que una fórmula A es *consecuencia local débil* de Σ , y escribamos $\Sigma \models_{ld} A$, si para todo modelo $\langle M, R, e \rangle$ y todo $x \in M$ tales que para toda $B \in \Sigma$ $\langle M, R, e \rangle \models_x B$, $\langle M, R, e \rangle \models_x A$. Demostrar que para cada fórmula A ,

$$\Sigma \models_d A \quad \text{si y sólo si} \quad \Box \Sigma \models_{ld} A$$

Sugerencia: Utilizar submodelos generados por índices.

3.9. Dada una lógica L , diremos que una fórmula modal A es *consecuencia débil módulo L* de un conjunto de fórmulas modales Σ ($\Sigma \models_{d(L)} A$) si y sólo si en todo modelo de L en el que sean válidas todas las fórmulas de Σ , es válida A . Diremos que A es *consecuencia local débil módulo L* ($\Sigma \models_{ld(L)} A$) si y sólo si para todo modelo de L $\langle M, R, e \rangle$ y cada $u \in M$, si en u son verdaderas todas las fórmulas de Σ , en u es verdadera A . Demostrar que para toda lógica L , todo conjunto de fórmulas Σ y toda fórmula A

$$\Sigma \models_{d(L)} A \quad \text{si y sólo si} \quad \Box \Sigma \models_{ld(L)} A.$$

3.10. Demostrar que el conjunto de consecuencias débiles de un conjunto cualquiera de fórmulas no tiene por qué ser una lógica. Y tampoco el conjunto de sus consecuencias locales débiles.

3.11. Demostrar que, si Σ es un conjunto de fórmulas cerrado bajo sustitución, entonces el conjunto de todas las consecuencias débiles de Σ es una lógica normal. Y que, si Σ está además cerrado bajo necesidad, el conjunto de todas sus consecuencias locales débiles es una lógica normal. Demostrar también que, si Σ no está cerrado bajo necesidad, el conjunto de sus consecuencias locales débiles no tiene por qué ser una lógica. Tómese por ejemplo $\Sigma = \{\Box A \rightarrow A: A \text{ es fórmula}\}$.

3.12. Completar los argumentos del apartado 6.

3.13. Demostrar que no puede existir una lógica normal cuyos marcos sean los marcos con únicamente dos elementos. Aplicar el corolario 3.13.

3.14. Demostrar que no existe ninguna lógica normal cuyos marcos sean los marcos con su relación no vacía.

3.15. Demostrar que para toda fórmula A del sublenguaje sentencial (es decir, para toda fórmula en la que no ocurre el operador modal), todo modelo $\langle M, R, e \rangle$ y todo $u \in M$,

$$\langle M, R, e \rangle \models_u A \text{ si y sólo si } \langle \{u\}, \emptyset, e' \rangle \models_u A,$$

donde e' se define por $e'(p) = e(p) \cap \{u\}$, para cada letra sentencial p .

3.16. El grado de una fórmula es el número máximo de ocurrencias encajadas del operador modal en la fórmula. Por ejemplo el grado de las fórmulas $\Box p$, $(p \rightarrow \Box q)$, $\Box p \rightarrow (\Box q \vee \Box r)$ es 1, el grado de la fórmula $\Box(\Box p \vee q)$ es 2, el grado de la fórmula $\Box(\Box(\Box p \vee q) \rightarrow \Box p)$ es 3. El grado de una fórmula se define por recursión como sigue:

$$\begin{aligned} g(A) &= 0 \quad \text{si } A \text{ es una letra sentencial} \\ g(A \rightarrow B) &= \max(g(A), g(B)) \\ g(\Box A) &= g(A) + 1 \end{aligned}$$

Obsérvese que las fórmulas de grado 0 son precisamente las fórmulas del sublenguaje sentencial del lenguaje modal.

Dado un modelo $\langle M, R, e \rangle$, sea para cada $u \in M$ y cada número natural n ,

$$H_n(u) = \{x \in M: \text{para algún } m \leq n \text{ } uR^m x\},$$

donde R^n se define como en el ejercicio 3.7. Consideremos el modelo con dominio $H_n(u)$; relación, la relación R restringida a $H_n(u)$; y asignación e_n^u definida por $e_n^u(p) = e(p) \cap H_n(u)$. Denotemos tal modelo por $H_n(u)$. Demostrar que para cada n y cada fórmula A de grado menor o igual que n ,

$$\langle M, R, e \rangle \models_u A \text{ si y sólo si } H_n(u) \models_u A.$$

Para la prueba, que debe realizarse por inducción en el grado de las fórmulas, debe tenerse en cuenta lo siguiente: Si uRv , entonces $H_n(v)$ es el submodelo de $H_{n+1}(u)$ generado por v . Además, debe tenerse en cuenta el ejercicio 3.15.

3.17. Usando el ejercicio anterior, demostrar que para toda fórmula A , todo $n \geq g(A)$, y todo $u \in M$, si e_1 y e_2 son asignaciones en $\langle M, R \rangle$ tales que para cada letra sentencial p $e_1(p) \cap H_n(u) = e_2(p) \cap H_n(u)$, entonces

$$\langle M, R, e_1 \rangle \models_u A \text{ si y sólo si } \langle M, R, e_2 \rangle \models_u A.$$

CAPÍTULO 4

LÓGICA MODAL Y CONDICIONES DE PRIMER ORDEN

1. En el capítulo anterior vimos que la fórmula $\Box p \rightarrow p$ es válida en un marco si y sólo si la relación del marco es reflexiva. En este capítulo vamos a demostrar en primer lugar hechos de este tipo, hechos que relacionan el que cierta fórmula sea válida en un marco con cierta propiedad de la relación del marco. Definamos primero algunas propiedades de relaciones que nos van a interesar además de las de reflexividad, transitividad y simetría.

Una relación R en un conjunto M es *serial* si y sólo si para todo $x \in M$ existe $y \in M$ tal que xRy , es decir, si su dominio es M .

Una relación R en un conjunto M es *euclídea* si y sólo si para todo x, y, z elementos de M ocurre que, si xRy y xRz , entonces yRz .

Una relación R en un conjunto M es una *función* si y sólo si para todo x, y, z elementos de M ocurre que, si xRy y xRz , entonces $y = z$.

Una relación R en un conjunto M es una *función de M en M* si y sólo si es una función y es serial.

Una relación R en un conjunto M es *débilmente conectada* si y sólo si para todo x, y, z elementos de M , si xRy y xRz , entonces yRz o zRy o $y = z$.

Una relación R en un conjunto M está *débilmente dirigida* si y sólo si para todo x, y, z elementos de M , si xRy y xRz , entonces existe $u \in M$ tal que yRu y zRu .

Una relación R en un conjunto M es *débilmente densa* si y sólo si para cada $x, y \in M$ tales que xRy existe $u \in M$ tal que xRu y uRy .

Una relación R en un conjunto M es *inversamente bien fundada* si y sólo si todo subconjunto no vacío de M tiene un elemento R -maximal, es decir, un elemento tal que no existe ningún elemento del subconjunto con el que esté relacionado.

PROPOSICIÓN 4.1: $\langle M, R \rangle \models \Box p \rightarrow \Box \Box p$ si y sólo si R es transitiva.

Prueba: a) Supongamos que R es transitiva. Sea e una asignación en $\langle M, R \rangle$. Veamos que $e(\Box p) \subseteq e(\Box \Box p)$. Si $x \in e(\Box p)$, entonces para todo $y \in M$, si xRy entonces $y \in e(p)$. Para ver que $x \in e(\Box \Box p)$ supongamos que xRu . Entonces, si uRv , tenemos, por transitividad de R , que xRv . Así, $v \in e(p)$. Por tanto tenemos que para todo $v \in M$, si uRv , entonces $v \in e(p)$. Con lo cual resulta que $u \in e(\Box p)$. Por tanto $x \in e(\Box \Box p)$.

b) Supongamos que la fórmula $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ es válida en el marco. Supongamos que x, y, z son elementos de M tales que xRy , yRz , pero no xRz . Consideremos una asignación e en $\langle M, R \rangle$ tal que $e(p) = \{u \in M: xRu\}$. Entonces $x \in e(\Box p)$, pero $x \notin e(\Box \Box p)$ pues $y \notin e(\Box p)$ ya que $z \notin e(p)$. Esto es absurdo. Por tanto xRz , y la relación es transitiva.■

PROPOSICIÓN 4.2: $\langle M, R \rangle \models p \rightarrow \Box \Diamond p$ si y sólo si R es simétrica.

Prueba: a) Supongamos que R es simétrica. Sea e una asignación en $\langle M, R \rangle$. Veamos que $e(p) \subseteq e(\Box \Diamond p)$. Si $x \in e(p)$, entonces si xRy tenemos que al ser R simétrica yRx ; por tanto existe $u \in M$ tal que yRu y $u \in e(p)$; con lo cual tenemos que $y \in e(\Diamond p)$. Por tanto $x \in e(\Box \Diamond p)$.

b) Supongamos que la fórmula $p \rightarrow \Box \Diamond p$ es válida en $\langle M, R \rangle$. Para ver que R es simétrica, supongamos que xRy pero no yRx . Sea e una asignación en $\langle M, R \rangle$ tal que $e(p) = \{u \in M: \text{no } yRu\}$. Entonces $x \in e(p)$, y $y \notin e(\Diamond p)$ con lo cual resulta que $x \notin e(\Box \Diamond p)$. Esto contradice el supuesto. Por tanto yRx , y R es simétrica.■

PROPOSICIÓN 4.3: $\langle M, R \rangle \models \Box p \rightarrow \Diamond p$ si y sólo si R es serial.

Prueba: a) Si R es serial y $x \in e(\Box p)$, entonces para todo $u \in M$ tal que xRu , $u \in e(p)$. Sea $u \in M$ tal que xRu , que existe al ser R serial. Entonces $u \in e(p)$ y por tanto $x \in e(\Diamond p)$.

b) Si $\Box p \rightarrow \Diamond p$ es válida en $\langle M, R \rangle$, para ver que R es serial, supongamos que x es un elemento de M sin R -sucesores. Sea e una asignación en $\langle M, R \rangle$ tal que $e(p) = \emptyset$. Entonces $x \in e(\Box p)$ pero $x \notin e(\Diamond p)$.■

PROPOSICIÓN 4.4: $\langle M, R \rangle \models \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$ si y sólo si R es euclídea.

Prueba: a) Supongamos que R es euclídea. Sea e una asigna-

ción en $\langle M, R \rangle$. Supongamos que $x \in e(\Diamond p)$. Sea y un R -sucesor de x en el que p es verdadera. Supongamos que xRu . Entonces, puesto que R es euclídea, uRy . Tenemos pues que $u \in e(\Diamond p)$. Y por tanto $x \in e(\Box \Diamond p)$.

b) Supongamos que $\langle M, R, \rangle \models \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$. Para ver que R es euclídea, supongamos que x, y, z son elementos de M tales que xRy y xRz pero no yRz . Sea e una asignación en $\langle M, R \rangle$ tal que $e(p) = \{u \in M: \text{no } yRu\}$. Entonces $z \in e(p)$ y xRz . Por consiguiente $x \in e(\Diamond p)$, y por tanto $x \in e(\Box \Diamond p)$. Tenemos, pues, que $y \in e(\Diamond p)$. Así, existe $u \in M$ tal que yRu y $u \in e(p)$, lo cual es imposible. Por tanto R es euclídea. $\square$

PROPOSICIÓN 4.5: $\langle M, R \rangle \models \Diamond p \rightarrow \Box p$ si y sólo si R es función.

Prueba: a) Si R es una función, y $x \in e(\Diamond p)$, entonces sea u un R -sucesor de x en el que p es verdadera. Un tal u es único al ser R una función. Por tanto se cumple que para todo $v \in M$, si xRv entonces $v \in e(p)$. Por consiguiente, $x \in e(\Box p)$.

b) Supongamos que $\langle M, R \rangle \models \Diamond p \rightarrow \Box p$. Para ver que R es una función, supongamos que $x, y, z \in M$ son tales que xRy y xRz . Sea e una asignación en $\langle M, R \rangle$ tal que $e(p) = \{y\}$. Entonces $x \in e(\Diamond p)$, y por consiguiente x pertenece a $e(\Box p)$, con lo cual obtenemos que $z \in e(p)$, y $z = y$. $\square$

PROPOSICIÓN 4.6: $\langle M, R \rangle \models \Diamond p \leftrightarrow \Box p$ si y sólo si R es una función de M en M .

Prueba: a) Supongamos que R es una función de M en M . Entonces R es una función y es serial. Por tanto, por 4.3 y 4.5 y lógica sentencial, tenemos que la fórmula $\Diamond p \leftrightarrow \Box p$ es válida en $\langle M, R \rangle$.

b) Si $\Diamond p \leftrightarrow \Box p$ es válida en $\langle M, R \rangle$, entonces lo son las fórmulas $\Diamond p \rightarrow \Box p$ y $\Box p \rightarrow \Diamond p$. Por tanto, por 4.3 y 4.5, R es una función de M en M . $\square$

PROPOSICIÓN 4.7: $\langle M, R \rangle \models \Box \Box p \rightarrow \Box p$ si y sólo si R es débilmente densa.

Prueba: a) Supongamos que R es débilmente densa, que e es una asignación en $\langle M, R \rangle$ tal que $x \in e(\Box \Box p)$, y que xRy . Puesto que R es débilmente densa, sea u un elemento de M tal que xRu y uRy . Entonces, $u \in e(\Box p)$ y por tanto y pertenece a $e(p)$. Así, para todo $y \in M$ tal que xRy , $y \in e(p)$. Por tanto, x pertenece a $e(\Box p)$.

b) Supongamos que $\langle M, R \rangle \models \Box\Box p \rightarrow \Box p$. Para ver que R es débilmente densa, supongamos que no lo es. En tal caso existen $x, y \in M$ tales que xRy y para todo $u \in M$, si xRu entonces no uRy . Sea e una asignación en $\langle M, R \rangle$ tal que $e(p) = M - \{y\}$. Entonces $x \notin e(\Box p)$, puesto que xRy pero $y \notin e(p)$. Pero x pertenece a $e(\Box\Box p)$, ya que si xRu y uRv , $v \neq y$ y por tanto $v \in e(p)$. En tal caso $\Box\Box p \rightarrow \Box p$ no sería válida en $\langle M, R \rangle$, en contra de la suposición.¶

PROPOSICIÓN 4.8: $\langle M, R \rangle \models \Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$ si y sólo si R está débilmente dirigida.

Prueba: a) Supongamos que R está débilmente dirigida. Sea e una asignación en $\langle M, R \rangle$. Supongamos que $x \in e(\Diamond\Box p)$. Sea y un elemento de M tal que xRy y $y \in e(\Box p)$. Para ver que $x \in e(\Box\Diamond p)$, supongamos que xRz . Sea u un elemento de M tal que yRu y zRu , que existe al estar R débilmente dirigida. Entonces, puesto que $y \in e(\Box p)$, $u \in e(p)$. Por tanto $z \in e(\Diamond p)$. Así, $x \in e(\Box\Diamond p)$.

b) Supongamos que $\langle M, R \rangle \models \Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$. Supongamos que xRy y xRz , y que para todo $u \in M$, si yRu , entonces no zRu . Sea e una asignación en $\langle M, R \rangle$ tal que $e(p) = \{u \in M: yRu\}$. Entonces $y \in e(\Box p)$, y por tanto $x \in e(\Diamond\Box p)$. Ahora bien $x \notin e(\Box\Diamond p)$ puesto que $z \notin e(\Diamond p)$ y xRz . Pero entonces $\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$ no es válida en el marco, en contra de la suposición.¶

PROPOSICIÓN 4.9: $\langle M, R \rangle \models \Box((p \wedge \Box p) \rightarrow q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \rightarrow p)$ si y sólo si R es débilmente conectada.

Prueba: a) Supongamos que R es débilmente conectada. Supongamos que $x \in M$ es tal que $x \notin e(\Box((p \wedge \Box p) \rightarrow q))$. En tal caso, sea $y \in M$ tal que xRy y en y es verdadera la fórmula $(p \wedge \Box p)$ y falsa q . Veamos que $\Box((q \wedge \Box q) \rightarrow p)$ es verdadera en x . Para ello supongamos que xRz . Al ser R débilmente conectada tenemos que yRz , o zRy , o $z = y$. Si $z = y$, puesto que $y \in e(p)$, $z \in e(p)$, y por tanto $z \in e((q \wedge \Box q) \rightarrow p)$. Si yRz , puesto que $y \in e(\Box p)$, tenemos que $z \in e(p)$, y por tanto que z pertenece a $e((q \wedge \Box q) \rightarrow p)$. Por último, si zRy , entonces, puesto que $y \notin e(q)$, $z \notin e(q \wedge \Box q)$, y por tanto $z \in e((q \wedge \Box q) \rightarrow p)$. Podemos concluir pues que $x \in e(\Box((q \wedge \Box q) \rightarrow p))$.

b) Supongamos que $\langle M, R \rangle \models \Box((p \wedge \Box p) \rightarrow q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \rightarrow p)$. Para ver que R es débilmente conectada, supongamos

que xRy , yRz , pero ni yRz , ni zRy , ni z es igual a y . Sea e una asignación en $\langle M, R \rangle$ tal que

$$\begin{aligned} e(p) &= \{z\} \cup \{v \in M: zRv\} \\ e(q) &= \{y\} \cup \{v \in M: yRv\} \end{aligned}$$

Entonces $x \notin e(\Box((p \wedge \Box p) \rightarrow q))$ pues xRz , $z \notin e(q)$ y $z \in e(p \wedge \Box p)$. Por otro lado, $x \notin e(\Box((q \wedge \Box q) \rightarrow p))$ pues xRy , $y \notin e(p)$ y $y \in e(q \wedge \Box q)$. Por tanto la fórmula $\Box((p \wedge \Box p) \rightarrow q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \rightarrow p)$ no es válida en $\langle M, R \rangle$, lo cual contradice la suposición. $\blacksquare$

PROPOSICIÓN 4.10: $\langle M, R \rangle \models \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$ si y sólo si R es transitiva e inversamente bien fundada.

Prueba: a) Supongamos que R es transitiva e inversamente bien fundada. Sea e una asignación cualquiera en $\langle M, R \rangle$. Supongamos que $x \in e(\Box(\Box p \rightarrow p))$. Para ver que $x \in e(\Box p)$, supongamos que xRy . En tal caso $y \in e(\Box p \rightarrow p)$, con lo cual tenemos que $y \in e(p)$ o $y \notin e(\Box p)$. Pero esta segunda posibilidad no puede darse pues, en caso contrario, existiría $z \in M$ tal que yRz y $z \notin e(p)$. Y entonces tomando $u \in M$ R -maximal con dicha propiedad, tendríamos que, al ser R transitiva, xRu , y por tanto $u \in e(\Box p \rightarrow p)$, pero puesto que $u \notin e(p)$, $u \notin e(\Box p)$, y existiría pues un $v \in M$ tal que uRv y $v \notin e(p)$, y u no sería, por tanto, un elemento R -maximal con la propiedad. Concluimos pues que para todo $y \in M$, si xRy , entonces $y \in e(p)$. Por tanto $x \in e(\Box p)$.

b) Supongamos que $\langle M, R \rangle \models \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$. i) Veamos que R es transitiva. Supongamos que xRy y yRz . Sea e una asignación en $\langle M, R \rangle$ tal que

$$e(p) = \{u \in M: xRu \text{ y } (\forall v \in M) (uRv \rightarrow xRv)\}$$

Entonces $x \in e(\Box(\Box p \rightarrow p))$: si xRu y $u \in e(\Box p)$, resulta que $u \in e(p)$ (ya que xRu y si uRv , $v \in e(p)$ y por tanto xRv). Tenemos pues que, si xRu , entonces $u \in e(\Box p \rightarrow p)$. Así, $x \in e(\Box(\Box p \rightarrow p))$. Por tanto, al ser $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$ una fórmula válida en $\langle M, R \rangle$, $x \in e(\Box p)$. En tal caso $y \in e(p)$. Por tanto tenemos que para cada $v \in M$ si yRv entonces xRv . Y, puesto que yRz , xRz .

ii) Veamos que R es inversamente bien fundada. Supongamos que $X \subseteq M$ y X no es vacío. Supongamos, en busca de una contradicción, que X no tiene ningún elemento R -maximal. Sea e una

asignación en $\langle M, R \rangle$ tal que $e(p) = M - X$. Sea x un elemento de X . Puesto que la fórmula $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$ es válida en $\langle M, R \rangle$ ocurre que $x \in e(\Box p)$ o $x \notin e(\Box(\Box p \rightarrow p))$. Puesto que X no tiene elementos R -maximales, sea $y \in X$ tal que xRy . Entonces, puesto que $y \notin e(p)$ ($e(p) = M - X$) y xRy , tenemos que $x \notin e(\Box p)$. Por tanto x no pertenece a $e(\Box(\Box p \rightarrow p))$. Existe pues $v \in M$ tal que xRv , $v \in e(\Box p)$ y $v \notin e(p)$. Así, $v \in X$, xRv , y para todo $u \in M$ tal que vRu ocurre que $u \notin X$ ($u \in e(p)$). Por tanto, para todo $u \in M$, si $u \in X$ entonces no vRu . Así, v es un elemento R -maximal de X , lo cual contradice la suposición de que X no tiene ningún elemento R -maximal.■

2. Consideremos en este apartado los axiomas T, D, 4, E, y B que son aquellos con los que se axiomatizaron las primeras lógicas modales normales. Consideremos todas aquellas lógicas normales que se obtienen al tomar como conjunto de axiomas un subconjunto, posiblemente vacío, del conjunto indicado. Resulta que de este modo sólo se obtienen quince lógicas normales distintas. Para demostrarlo, establezcamos una serie de relaciones que se dan entre las propiedades que corresponden a los distintos axiomas.

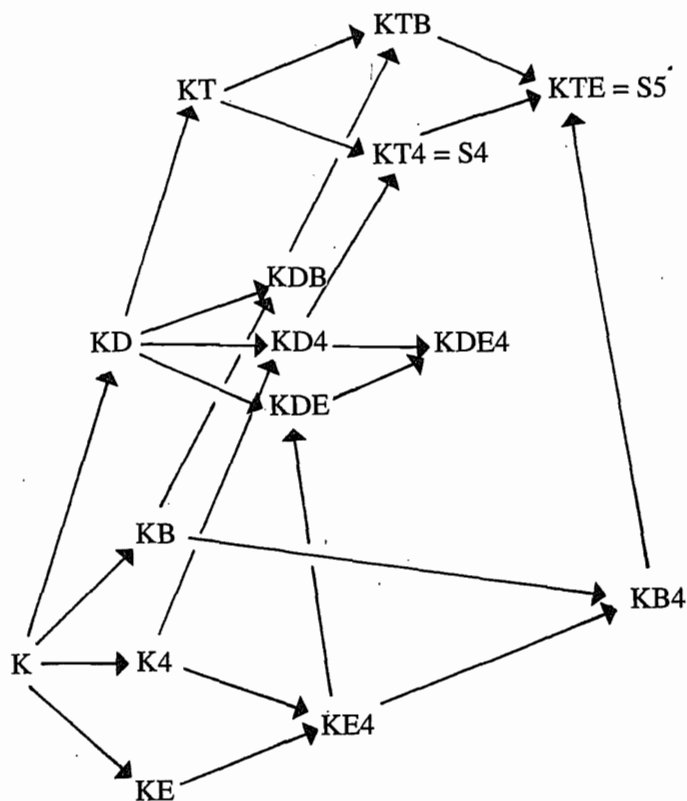
PROPOSICIÓN 4.11: Si R es una relación en M , entonces:

- i) Si R es reflexiva y euclídea, entonces R es simétrica.
- ii) Si R es simétrica y euclídea, entonces R es transitiva.
- iii) Si R es reflexiva y euclídea, entonces R es simétrica y transitiva.
- iv) Si R es reflexiva, entonces R es euclídea si y sólo si R es simétrica y transitiva.
- v) R es una relación de equivalencia si y sólo si R es reflexiva y euclídea.
- vi) Si R es reflexiva, entonces R es serial.
- vii) Si R es simétrica y transitiva, entonces R es euclídea.
- viii) Si R es serial, simétrica y transitiva, entonces R es reflexiva.

Prueba: Se deja al lector.■

Las quince lógicas que se obtienen las representaremos en el diagrama que viene a continuación, en el cual debe entenderse que

las flechas indican inclusión propia. Las inclusiones se siguen de la proposición 4.11, de las proposiciones 4.1-4.4, y el hecho establecido en el capítulo anterior que relaciona la validez del axioma T en un marco con el hecho de que la relación sea reflexiva. Que las inclusiones sean propias se puede ver encontrando modelos de las lógicas que se extienden que no sean modelos de sus extensiones, lo que muestra que no toda fórmula de la extensión puede ser un teorema de la lógica a la que extiende.



Para ver que las quince lógicas del diagrama abarcan las treinta y dos posibles formulables con los axiomas que estamos considerando basta ver que se cumplen las siguientes igualdades:

KTD = KT (por vi) de 4.11).

KBE = KB4 = KB4E (por ii) y vii) de 4.11).

KTDB = KTB, KTD4 = KT4, KTDE = KTE (por vi) de 4.11).

KTE = KTB4 = KTBE = KT4E = KTDB4 = KTDBE = KTB4E = KTD4E = KTDB4E (por iii), iv) y vi) de 4.11).

KDBE = KDB4E = KDB4 (por ii) y vii) de 4.11).

KTDB4 = KDB4 (por viii) de 4.11) Por tanto las lógicas KDBE, KDB4E, KDB4 son la lógica KTE, es decir, el sistema S5.

3. El lector puede observar que todas las propiedades de relaciones consideradas a lo largo de este capítulo, a excepción de la propiedad de ser inversamente bien fundada, son fácilmente formalizables en un lenguaje de primer orden con igualdad y con un único relator diádico. Que una sentencia de primer orden en tal lenguaje formaliza una propiedad de R significa que para toda estructura $\langle M, R \rangle$, $\langle M, R \rangle$ satisface la sentencia de primer orden si y sólo si R posee la propiedad. En la siguiente lista, a la izquierda figuran las propiedades de la relación, y a la derecha una sentencia de primer orden que las formaliza.

Reflexiva	$\forall x Rxx$
Simétrica	$\forall xy (Rxy \rightarrow Ryx)$
Transitiva	$\forall xyz (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$
Serial	$\forall x \exists y Rxy$
Euclídea	$\forall xyz (Rxy \wedge Rxz \rightarrow Ryz)$
Función	$\forall xyz (Rxy \wedge Ryz \rightarrow y \approx z)$
Función de M en M	$\forall x \exists ! y Rxy$
Débilmente densa	$\forall xy (Rxy \rightarrow \exists z (Rxz \wedge Rzy))$
Débilmente dirigida	$\forall xyz (Rxy \wedge Rxz \rightarrow \exists u (Ryu \wedge Rzu))$
Débilmente conectada	$\forall xyz (Rxy \wedge Rxz \rightarrow (Ryz \vee Rzy \vee y \approx z))$

La propiedad de que una relación sea inversamente bien fundada no es una propiedad expresable en primer orden, es decir, no existe ninguna sentencia, ni ningún conjunto de sentencias de primer orden, en el lenguaje que estamos considerando (ni en ningún otro), cuyos modelos sean única y exclusivamente las estructuras $\langle M, R \rangle$ en las que R es una relación en M inversamente bien fundada. El lector puede demostrarlo utilizando el teorema de compacidad para la lógica de primer orden mediante el tipo clásico de argumentación para este tipo de cuestiones. Dada una estructura

$\langle M, R \rangle$, con R inversamente bien fundada, debe obtenerse una estructura $\langle M', R' \rangle$ elementalmente equivalente a la primera pero en la que R' no sea una relación inversamente bien fundada.

La lección a extraer de lo anterior es que no existe una correspondencia entre fórmulas modales y propiedades de las relaciones en un conjunto expresables mediante fórmulas o conjuntos de fórmulas de un lenguaje de primer orden con igualdad que tenga como único símbolo no lógico un relator diádico. Sin embargo, sí que existe una correspondencia entre fórmulas modales y fórmulas de un lenguaje de primer orden en el que además hay un relator monádico para cada letra sentencial del lenguaje modal. Y hay también una correspondencia entre fórmulas modales y fórmulas del lenguaje de segundo orden con un único relator diádico y variables de conjunto. Establecer estas correspondencias es el tema del próximo apartado.

4. Dado un lenguaje modal sentencial con un conjunto de letras sentenciales $\mathcal{P}$ de cardinalidad κ , fijemos una enumeración $\langle p_\alpha: \alpha < \kappa \rangle$ de los elementos de $\mathcal{P}$. Sea, para cada $\alpha < \kappa$, P_α un relator monádico (o predicado), y sea R un relator diádico. Al lenguaje modal sentencial $\mathcal{P}$ le podemos asociar el lenguaje de primer orden de tipo de semejanza $p_{\mathcal{P}} = \{R\} \cup \{P_\alpha: \alpha < \kappa\}$. A tal lenguaje lo llamaremos el *lenguaje de primer orden asociado a $\mathcal{P}$* .

Dado un lenguaje sentencial modal $\mathcal{P}$, podemos definir una función traducción entre el conjunto de fórmulas de $\mathcal{P}$ y el conjunto de fórmulas del lenguaje de primer orden asociado a $\mathcal{P}$ que a cada fórmula modal A le asocie una fórmula de primer orden A^* de modo que:

$$1) p_\alpha^* \text{ sea } P_\alpha x$$

$$2) \perp^* \text{ sea } x \neq x$$

$$3) (A \rightarrow B)^* \text{ sea } (A^* \rightarrow B^*)$$

$$4) (\Box A)^* \text{ sea } \forall y (Rxy \rightarrow A^*(x/y))$$

donde x es la primera variable en una enumeración que supondremos fijada de las variables del lenguaje de primer orden, la variable y es la primera variable distinta de x que no ocurre en A^* , y

$A^*(x/y)$ es el resultado de reemplazar toda ocurrencia libre de la variable x por la variable y en la fórmula A^* . Debe observarse que $(\Diamond A)^*$ es lógicamente equivalente a la fórmula $\exists y(Rxy \wedge A^*(x/y))$. Y también que, si tenemos una fórmula de primer orden que es la traducción de una fórmula modal A , la única variable que ocurre libre en ella es la variable x .

Dado un modelo modal $\langle M, R, e \rangle$, podemos obtener una $\mathcal{P}$ -estructura de modo completamente natural, la estructura:

$$\langle M, R, \langle e(p_\alpha): \alpha < \kappa \rangle \rangle$$

a la que llamaremos la $\mathcal{P}$ -estructura asociada a $\langle M, R, e \rangle$.

PROPOSICIÓN 4.12 : *Para todo modelo modal $\langle M, R, e \rangle$, toda $\mathcal{P}$ -fórmula A , y todo $u \in M$*

$$\langle M, R, e \rangle \models_u A \text{ si y sólo si } \langle M, R, \langle e(p_\alpha): \alpha < \kappa \rangle \rangle \models A^*[u]$$

Prueba: Por inducción. Para el caso de letras sentenciales tenemos que

$$\langle M, R, e \rangle \models_u p_\alpha \text{ si y sólo si } u \in e(p_\alpha).$$

Pero

$$u \in e(p_\alpha) \text{ si y sólo si } \langle M, R, \langle e(p_\alpha): \alpha < \kappa \rangle \rangle \models P_\alpha x [u].$$

La proposición vale para $\perp$ pues ambos lados del bicondicional son falsos para esta fórmula. Si suponemos que la proposición vale para fórmulas A y B , es fácil comprobar que vale para la fórmula $(A \rightarrow B)$. Por último, si suponemos que la proposición vale para una fórmula A resulta que

$$\langle M, R, e \rangle \models_u \Box A \text{ si y sólo si para todo } v \in M, \\ \text{si } uRv \text{ entonces } \langle M, R, e \rangle \models_v A,$$

y esto último ocurre (dada la suposición acerca de A) si y sólo si para todo $v \in M$ tal que uRv $\langle M, R, \langle e(p_\alpha): \alpha < \kappa \rangle \rangle \models A^*[v]$,

pero esto ocurre si y sólo si $\langle M, R, \langle e(p_\alpha): \alpha < \kappa \rangle \rangle \models \forall y (Rxy \rightarrow A^*(x/y))[u]. \blacksquare$

COROLARIO 4.13: *Para todo modelo modal $\langle M, R, e \rangle$ y toda $\mathcal{P}$ -fórmula A*

$$\langle M, R, e \rangle \models A \text{ si y sólo si } \langle M, R, \langle e(p_\alpha): \alpha < \kappa \rangle \rangle \models \forall x A^*$$

Así, una fórmula modal es válida en un modelo modal si y sólo si la clausura universal de su traducción al lenguaje de primer orden asociado es válida en la estructura de primer orden asociada al modelo modal.

OBSERVACIÓN: Si consideramos una ρ_p -estructura $A = \langle A, R^A, \langle P_\alpha^A: \alpha < \kappa \rangle \rangle$, podemos definir una función $e: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}(A)$ mediante, para cada $\alpha < \kappa$.

$$e(p_\alpha) = P_\alpha^A.$$

En tal caso tenemos que $\langle A, R^A, e \rangle$ es un modelo modal cuya estructura de primer orden asociada es la inicial. Así, dada una lógica modal normal L podemos considerar el conjunto de ρ_p -fórmulas

$$\Sigma_L = \{ \forall x A^*: A \in L \}$$

y considerar los conjuntos de modelos y estructuras del lenguaje de primer orden asociado

$$MO_L = \{ \langle M, R, e \rangle: \langle M, R, e \rangle \models L \}$$

$$ES_L = \{ A: A \models \Sigma_L \}$$

Ambos conjuntos son, pues, esencialmente el mismo.

Dado un marco $\langle M, R \rangle$ diremos que una ρ_p -estructura A es una estructura sobre $\langle M, R \rangle$, si el universo de A , $\bar{A}$, es M , y la relación diádica de A es R .

PROPOSICIÓN 4.14: *Para toda fórmula modal A y todo marco $\langle M, R \rangle$*

$$\langle M, R \rangle \models A \text{ si y sólo si para toda } \rho_P\text{-estructura sobre } \langle M, R \rangle, A \models \forall x A^*$$

Prueba: Por la proposición 3.1 y la correspondencia entre modelos modales y estructuras de primer orden comentada en la última observación.■

Por el teorema de coincidencia para la lógica de primer orden tenemos que si A_1 y A_2 son ρ_P -estructuras sobre un marco $\langle M, R \rangle$ y A es una fórmula modal de $\mathcal{P}$ cuyas letras sentenciales están entre $p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_n}$, y $P_{\alpha_1}^{A_1} = P_{\alpha_1}^{A_2}, \dots, P_{\alpha_n}^{A_1} = P_{\alpha_n}^{A_2}$, entonces

$$A_1 \models \forall x A^* \text{ si y sólo si } A_2 \models \forall x A^*.$$

Si las letras sentenciales que ocurren en la fórmula A están entre $p_{i_1}, \dots, p_{i_n}$, escribiremos $\langle M, R, X_{i_1}, \dots, X_{i_n} \rangle \models \forall x A^*$ para indicar que toda ρ_P -estructura sobre el marco $\langle M, R \rangle$, $\mathcal{B}$, tal que $X_{i_j} = \mathcal{P}_{i_j}^{\mathcal{B}}, \dots, X_{i_n} = \mathcal{P}_{i_n}^{\mathcal{B}}$ satisface la fórmula $\forall x A^*$. Así tenemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 4.15: *Para todo marco $\langle M, R \rangle$ y fórmula modal A cuyas letras sentenciales estén entre $p_{i_1}, \dots, p_{i_n}$*

$$\langle M, R \rangle \models A \text{ si y sólo si para todo } X_{i_1}, \dots, X_{i_n} \subseteq M \langle M, R, X_{i_1}, \dots, X_{i_n} \rangle \models \forall x A^*.$$

Afirmar que para todo $X_{i_1}, \dots, X_{i_n} \subseteq M$, $\langle M, R, X_{i_1}, \dots, X_{i_n} \rangle \models \forall x A^*$, equivale a afirmar que en $\langle M, R \rangle$ es verdadera la sentencia de segundo orden que obtenemos a partir de la sentencia de primer orden $\forall x A^*$ sustituyendo las letras de predicado por variables de conjunto y cuantificando éstas universalmente. De este modo tenemos que a cada fórmula modal A le corresponde una sentencia en el lenguaje de segundo orden de tipo de semejanza $\{R\}$, la que obtenemos a partir de $\forall x A^*$ del modo indicado. Debe observarse que dicha sentencia es una sentencia Π_1^1 , una cuantificación universal de segundo orden de una fórmula en la que no hay variables de segundo orden cuantificadas.

Por la proposición 4.15 tenemos que, para cada fórmula modal A , A es válida en un marco si y sólo si en él es verdadera la sentencia de segundo orden correspondiente.

EJERCICIOS

4.1. Demostrar que en un marco $\langle M, R \rangle$ son válidas las fórmulas $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ y $\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$ si y sólo si para cada $x \in M$ existe $y \in M$ tal que xRy y para todo $z \in M$, si yRz entonces $z = y$.

4.2. Demostrar que para todo marco $\langle M, R \rangle$, $\langle M, R \rangle \models p \rightarrow \Box p$ si y sólo si para cada $x, y \in M$, si xRy entonces $x = y$. Concluir que la fórmula $p \leftrightarrow \Box p$ es válida en un marco si y sólo si la relación del mismo es la identidad.

4.3. Demostrar que la fórmula $\Box p$ es válida en un marco si y sólo si todos los índices del mismo son índices finales. En otras palabras, si la relación es vacía.

4.4. Demostrar que para todo marco $\langle M, R \rangle$, $\langle M, R \rangle \models \Box(\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p) \rightarrow p$ si y sólo si R es reflexiva, transitiva, y no existe ninguna función F del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en M tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ $F(n)RF(n+1)$ y $F(n) \neq F(n+1)$.

4.5. Demostrar que la fórmula $\Box(\Box p \rightarrow \Box q) \vee \Box(\Box q \rightarrow \Box p)$ es válida en un marco $\langle M, R \rangle$ si y sólo si $\forall xy \in M (xRy \wedge xRz \rightarrow (\forall u \in M (yRu \rightarrow zRu) \vee \forall u \in M (zRu \rightarrow yRu)))$.

4.6. Demostrar que la clase de marcos con las propiedades del ejercicio 4.4 no es una clase de marcos que pueda caracterizarse en primer orden, es decir, que no existe ningún conjunto de sentencias de primer orden en el lenguaje de tipo $\{R\}$ cuyos modelos sean precisamente los marcos de la clase. Usar el teorema de compacidad para la lógica de primer orden.

4.7. Demostrar que la fórmula $\Box \Diamond \Box \Box p \rightarrow \Diamond \Diamond \Box \Diamond p$ es válida en un marco si y sólo si la relación del marco es serial.

4.8. Demostrar que la fórmula $\Box(\Diamond p \rightarrow \Box p)$ es válida en un marco si y sólo si $\forall x \in M \forall y \in M \forall z \in M \forall w \in M (xRy \wedge yRz \wedge yRw \rightarrow z = w)$.

4.9. Demostrar que la fórmula $\Diamond(\Diamond T \wedge p) \rightarrow \Box(\Diamond T \rightarrow p)$ es válida en un marco si y sólo si

$\forall xyz \in M (xRy \wedge xRz \wedge \text{ni } y \text{ ni } z \text{ son puntos finales} \rightarrow y = z)$.

4.10. Demostrar que la fórmula $\Diamond(\Box\perp \wedge p) \rightarrow \Box(\Box\perp \rightarrow p)$ es válida en un marco si y sólo si

$$\forall xyz \in M (xRy \wedge xRz \wedge y \text{ es un punto final} \\ \wedge z \text{ es un punto final} \rightarrow y = z).$$

4.11. Demostrar que la fórmula $(\Diamond\Box\perp \wedge \Diamond\Diamond T) \rightarrow \Box^n \Diamond T$ es válida en un marco si y sólo si

$$\forall xyz \in M (xRy \wedge xRz \wedge y \text{ es un punto final} \\ \wedge z \text{ no es un punto final} \rightarrow \\ \forall w \in M (xR^n w \rightarrow w \text{ no es un punto final})),$$

donde R^n se define como en la página 44 para $n > 0$ y R^0 es la relación de identidad en M .

4.12. Encontrar una lógica cuyos marcos sean aquellos en que todo índice está relacionado con uno que es un punto final. Otra cuyos marcos sean aquellos en que todo índice está relacionado con uno que no es un punto final. Y otra tal que sus marcos sean aquellos en que todo índice está relacionado con uno que es final y otro que no lo es.

4.13. Demostrar que la fórmula $\Box(\Box p \rightarrow p)$ es válida en un marco $\langle M, R \rangle$ si y sólo si $\forall xy \in M (xRy \rightarrow yRy)$.

4.14. Demostrar que la fórmula $\Diamond T \rightarrow (\Box p \rightarrow p)$ es válida en $\langle M, R \rangle$ si y sólo si $\forall xy \in M (xRy \rightarrow xRx)$.

4.15. Demostrar que la fórmula $\Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$ es válida en un marco $\langle M, R \rangle$ si y sólo si $\forall x y z \in M (xRy \wedge xRz \rightarrow (yRz \vee zRy))$.

CAPÍTULO 5

MODELOS CANÓNICOS

En este capítulo presentaremos una construcción de modelos utilizando recursos sintácticos. Es el tipo de construcción que corresponde a los modelos de Henkin para la lógica de primer orden y que utilizaron para el caso de las lógicas modales D. C. Makinson [1966] y E. J. Lemmon y D. Scott [1977] por primera vez. Esta construcción nos permitirá probar que toda lógica normal es completa respecto a la clase de sus modelos, y que ciertas lógicas normales son completas respecto a la clase de sus marcos, precisamente aquellas para las cuales el marco de su modelo canónico (el modelo sintáctico que construiremos) es un marco de la lógica. Esta propiedad no la comparten todas las lógicas normales que son completas.

1. Sea L una lógica normal con un modelo, y sea $\langle M, R, e \rangle$ un modelo de L . Sea $x \in M$. Consideremos el conjunto

$$\Sigma = \{A: \langle M, R, e \rangle \models_x A\}.$$

Este conjunto tiene las siguientes propiedades:

- i) $L \subseteq \Sigma$.
- ii) Para toda fórmula A , si $\Sigma \vdash_L A$, entonces $A \in \Sigma$.
- iii) Para toda fórmula A , $A \in \Sigma$ o $\neg A \in \Sigma$.
- iv) Σ es L -consistente.

La razón de ello es la siguiente: i) El modelo es un modelo de L . ii) Σ no es vacío. Si $\Sigma \vdash_L A$, sean $B_1, \dots, B_n \in \Sigma$ tales que $(B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \rightarrow A$ es un teorema de L . Al ser $B_1, \dots, B_n$ verdaderas en el índice x del modelo, y ser el modelo un modelo de L , tenemos que A es verdadera en x . Por tanto $A \in \Sigma$. iii) es obvio. iv) $\perp \notin \Sigma$, y por tanto, por ii), $\perp$ no es deducible (en L) de Σ .

Por otra parte ocurre que, si Δ es un conjunto de fórmulas L -consistente tal que $\Sigma \subseteq \Delta$, entonces $\Sigma = \Delta$. La razón es que, si

una fórmula A perteneciera a Δ pero no a Σ , entonces $\neg A$ pertenecería a Σ y por tanto a Δ con lo que Δ sería L -inconsistente. Tenemos pues que Σ es un conjunto L -consistente de fórmulas que no está incluido propiamente en ningún conjunto de fórmulas con tal propiedad.

Un conjunto de fórmulas es L -consistente y maximal si y sólo si es consistente y es maximal respecto a la colección de conjuntos de fórmulas L -consistentes (no está incluido propiamente en ninguno de ellos).

LEMA 5.1: *Para cada lenguaje modal, cada lógica normal en el mismo, L , y cada conjunto de fórmulas modales L -consistente y maximal Σ ocurre que :*

- i) Si $\Sigma \vdash_L A$, entonces $A \in \Sigma$
- ii) Para toda fórmula A , $A \in \Sigma$ o $\neg A \in \Sigma$
- iii) $(A \wedge B) \in \Sigma$ si y sólo si $A \in \Sigma$ y $B \in \Sigma$
- iv) Si $(A \rightarrow B) \in \Sigma$ y $A \in \Sigma$, entonces $B \in \Sigma$
- v) $(A \vee B) \in \Sigma$ si y sólo si $A \in \Sigma$ o $B \in \Sigma$.

Prueba: i) Supongamos que $\Sigma \vdash_L A$. Entonces $\Sigma \cup \{A\}$ es L -consistente. En caso contrario $\Sigma \vdash_L \neg A$ y por tanto Σ sería L -inconsistente. Al ser Σ maximal tenemos que A pertenece a Σ .

ii) Si A es una fórmula tal que ni A ni $\neg A$ pertenecen a Σ , entonces ni A ni $\neg A$ son deducibles (en L) de Σ , y por tanto, tanto $\Sigma \cup \{A\}$ como $\Sigma \cup \{\neg A\}$ son L -consistentes; pero, al ser Σ maximal, A y $\neg A$ pertenecerán a Σ , y esto es imposible al ser Σ L -consistente. Por tanto, o A o $\neg A$ pertenecen a Σ .

iii-v) Se dejan como ejercicios. $\blacksquare$

LEMA 5.2: *Si Σ es un conjunto de fórmulas L -consistente, entonces Σ es L -consistente y maximal si y sólo si para toda fórmula A $A \in \Sigma$ o $\neg A \in \Sigma$.*

Prueba: Obvia, usando el lema anterior. $\blacksquare$

LEMA 5.3 (de Lindenbaum): *Para toda lógica normal consistente L y todo conjunto de fórmulas L -consistente Σ , existe un conjunto de fórmulas L -consistente y maximal Δ tal que $\Sigma \subseteq \Delta$.*

Prueba: Por el lema de Zorn. Consideremos la colección de todos los conjuntos de fórmulas L -consistentes que incluyen a Σ .

Tal conjunto está ordenado por inclusión. Sea $\mathbb{D}$ una $\subseteq$ -cadena de conjuntos L -consistentes. Consideremos $\bigcup \mathbb{D}$. Este conjunto es L -consistente y es el supremo de la cadena. Es L -consistente por la siguiente razón: Si $\bigcup \mathbb{D} \vdash_L \perp$, entonces $\bigcup \mathbb{D}$ no pertenece a $\mathbb{D}$, y existen $B_1, \dots, B_n \in \mathbb{D}$ tales que $(B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \rightarrow \perp$ es un teorema de L . En tal caso existe un conjunto L -consistente perteneciente a $\mathbb{D}$ al que pertenecen $B_1, \dots, B_n$, pero esto es imposible. Por el lema de Zorn tenemos que existe un conjunto L -consistente y maximal que incluye a Σ . $\blacksquare$

LEMA 5.4: *Para cualquier conjunto de fórmulas Σ , fórmula A y lógica normal L : $\Sigma \vdash_L A$ si y sólo si A pertenece a todo conjunto maximal y L -consistente que incluye a Σ .*

Prueba: Se deja como ejercicio para el lector. $\blacksquare$

2. Consideremos una lógica normal consistente L . Vamos a obtener un modelo en el que serán válidas única y exclusivamente las fórmulas que son teoremas de L . Para motivar la definición, observemos que si $\langle M, R, e \rangle$ es un modelo de L , y $x \in M$, entonces el conjunto $\Sigma_x = \{A: \langle M, R, e \rangle \models_x A\}$ es, como hemos visto en el apartado 1, L -consistente y maximal. Este conjunto, intuitivamente, es el formado por todas aquellas fórmulas que expresan las propiedades modales del índice x . Dos índices x e y para los que Σ_x y Σ_y sean iguales son indistinguibles en cuanto a sus propiedades modales. Por tanto podemos decir que un conjunto L -consistente y maximal nos caracteriza un tipo de índice. Observemos además que:

si xRy , y $\Box A \in \Sigma_x$, entonces $A \in \Sigma_y$,

con lo que

(*) si xRy , entonces $\{A: \Box A \in \Sigma_x\} \subseteq \Sigma_y$

El condicional inverso no tiene por qué valer. Consideremos el modelo

$\langle N, <, e \rangle$

donde N es el conjunto de los números naturales y e es la asignación que para toda letra sentencial p , $e(p) = N$. Es fácil comprobar que, para toda fórmula A , o $e(A)$ es igual al conjunto vacío o es igual a N , y que además $e(\Box A) = N$ si y sólo si $e(A) = N$. La razón de ello es que en el modelo no hay puntos finales. Así, si consideramos, por ejemplo, Σ_0 , tenemos que, si $\Box A \in \Sigma_0$, entonces $A \in \Sigma_0$, pero sin embargo 0 no es menor que 0.

Vamos a construir un modelo en el que tengamos todos los tipos de índices posibles. Para ello bastará con tomar como índices los propios conjuntos L -consistentes y maximales. Relacionaremos los índices de modo que la condición (*) se cumpla. La forma más simple de conseguirlo es exigiendo que se cumpla el si y sólo si.

Dada una lógica normal consistente sea

$$M_L = \{ \Sigma : \Sigma \text{ es un conjunto de fórmulas} \\ L\text{-consistente y maximal} \},$$

y sea R_L la relación en M_L definida por

$$\Sigma R_L \Delta \text{ si y sólo si } \{ A : \Box A \in \Sigma \} \subseteq \Delta.$$

Definamos la asignación e_L como sigue: Sea para cada letra sentencial p

$$e_L(p) = \{ \Sigma \in M_L : p \in \Sigma \}$$

El modelo $\langle M_L, R_L, e_L \rangle$ es el *modelo canónico* para L , y el marco $\langle M_L, R_L \rangle$ es el *marco canónico* para L .

TEOREMA 5. 5: Para cada $u \in M_L$,

$$\langle M_L, R_L, e_L \rangle \models u A \text{ si y sólo si } A \in u$$

Prueba: Por inducción veamos que para cada fórmula A

$$e_L(A) = \{ u \in M_L : A \in u \}.$$

Para el caso de las letras sentenciales y la fórmula $\perp$ está claro. El caso del condicional es fácil. Veamos el caso de las fórmulas de

tipo $\Box A$. Supongamos que lo que queremos probar vale para una fórmula A . Si $u \in e_L(\Box A)$, entonces para cada $v \in M_L$, si $uR_L v$ entonces $v \in e_L(A)$, y por tanto $A \in v$. Así, A pertenece a todo conjunto L -consistente y maximal que incluye al conjunto $\{B: \Box B \in u\}$. Por el lema 5.4 tenemos entonces que A será deducible (en L) de $\{B: \Box B \in u\}$. Sean pues $B_1, \dots, B_n$ tales que $\Box B_1, \dots, \Box B_n$ pertenecen a u y $(B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \rightarrow A$ es un teorema de L . Entonces la fórmula $(\Box B_1 \wedge \dots \wedge \Box B_n) \rightarrow \Box A$ es también un teorema de L y por tanto $u \vdash_L \Box A$, con lo que tenemos que $\Box A \in u$. Por otro lado, si $\Box A \in u$ y $uR_L v$ tenemos que A pertenece a v . $\blacksquare$

COROLARIO 5.6: *Para toda fórmula A , $A \in L$ si y sólo si $\langle M_L, R_L, e_L \rangle \models A$, y por tanto el modelo canónico para L es un modelo de L .*

Prueba: a) Si A es un teorema de L , pertenece a todo conjunto de fórmulas L -consistente y maximal. Por tanto es verdadera en todo índice de M_L . b) Si A es verdadera en todo índice de M_L , pertenece a todo conjunto de fórmulas L -consistente y maximal, y por el lema 5.4 A es un teorema de L . $\blacksquare$

TEOREMA 5.7 (de completitud para modelos): *Toda lógica normal L es completa respecto a la clase de sus modelos, es decir, para toda fórmula A*

$A \in L$ si y sólo si A es válida en todo modelo de L

Prueba: Supongamos que A es válida en todo modelo de L . Si A no es un teorema de L , entonces $\neg A$ es L -consistente. Sea pues u un conjunto L -consistente y maximal al que pertenece $\neg A$ (que existe por el lema de Lindenbaum). Entonces A es falsa en u en el modelo canónico $\langle M_L, R_L, e_L \rangle$. Ahora bien, por 5.6 el modelo canónico es un modelo de L . $\blacksquare$

COROLARIO 5.8 (Completitud de K para marcos):

$A \in K$ si y sólo si A es válida en todo marco

Prueba: Si A es válida en todo marco, es válida en el modelo canónico para K . $\blacksquare$

COROLARIO 5.9: Si A es válida en el marco canónico para L , entonces A es un teorema de L .

Prueba: Si A es válida en el marco canónico para L , es válida en el modelo canónico para L . $\square$

Así, si ponemos $M_L = \langle M_L, R_L \rangle$, tenemos que $L(M_L) \subseteq L$.

COROLARIO 5.10: $A \in K$ si y sólo si $\langle M_K, R_K \rangle \models A$. Así, la lógica del marco canónico para K es la lógica K .

Diremos que una lógica L es *canónica* si su marco canónico es un L -marco, es decir, si $L(M_L) = L$. Al estar toda lógica canónica caracterizada por un marco (su marco canónico), toda lógica canónica es una lógica completa (respecto a marcos). Debe señalarse que hay lógicas completas (respecto a marcos) que no son canónicas; un ejemplo es la lógica KGL . Y existen, ya lo hemos señalado previamente, lógicas incompletas (respecto a marcos).

3. A continuación vamos a demostrar que las quince lógicas normales de las que hablamos en el capítulo 4 son todas ellas canónicas y, por tanto, completas. Para demostrarlo bastará con ver que sus marcos canónicos son marcos de la lógica. Para ello veremos que la relación de accesibilidad de los mismos tiene la(s) propiedad(es) que caracteriza(n) a los marcos de la lógica.

LEMA 5.11: Si L es una lógica normal y $\langle M_L, R_L, e_L \rangle$ es su modelo canónico, entonces

- i) Si $D \in L$, entonces R_L es serial.
- ii) Si $T \in L$, entonces R_L es reflexiva.
- iii) Si $4 \in L$, entonces R_L es transitiva.
- iv) Si $E \in L$, entonces R_L es euclídea.
- v) Si $B \in L$, entonces R_L es simétrica.

Prueba: i) Supongamos que $D \in L$. Entonces la fórmula $\square \perp \rightarrow \perp$ es válida en $\langle M_L, R_L, e_L \rangle$ al ser D un teorema de L . Por tanto tenemos que $e_L(\square \perp) \subseteq e_L(\perp)$. Así, $e_L(\square \perp)$ es vacío, y para cada $u \in M_L$ existe $v \in M_L$ tal que $uR_L v$. Por tanto R_L es serial.

ii) Supongamos que el axioma T pertenece a L . Entonces para toda fórmula A ocurre que $\langle M_L, R_L, e_L \rangle \models \square A \rightarrow A$. Para ver que

R_L es reflexiva, supongamos que no lo es. Sea, pues, $u \in M_L$ tal que no $uR_L u$. Entonces tenemos que $\{A: \Box A \in u\} \subseteq u$. Sea, pues, A una fórmula tal que $\Box A \in u$ pero $A \notin u$. Entonces en u es falsa $\Box A \rightarrow A$, lo cual es absurdo.

iii) Supongamos que $4 \in L$. Entonces para toda fórmula A , la fórmula $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ es válida en $\langle M_L, R_L, e_L \rangle$. Para ver que R_L es transitiva, supongamos que $uR_L v$ y $vR_L w$. Entonces tenemos que $\{A: \Box A \in u\} \subseteq v$ y que $\{A: \Box A \in v\} \subseteq w$. Si A es tal que $\Box A \in u$, entonces, puesto que la fórmula $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ es válida en el modelo canónico $\Box \Box A \in u$. Por tanto $\Box A \in v$, y por consiguiente $A \in w$. Así, $\{A: \Box A \in u\} \subseteq w$, y $uR_L w$.

iv) Si $E \in L$, entonces, para toda fórmula A , la fórmula $\Diamond \Box A \rightarrow \Box A$ es válida en el modelo canónico. Para ver que R_L es euclídea, supongamos que $uR_L v$ y $uR_L w$. En tal caso tenemos que $\{A: \Box A \in u\}$ está incluido tanto en v como en w . Supongamos que A es una fórmula tal que $\Box A \in v$. Entonces puesto que $uR_L v$, tenemos que $\Diamond \Box A$ es verdadera en u , y por tanto lo es $\Box A$. En consecuencia $A \in w$. Por tanto tenemos que $\{A: \Box A \in v\} \subseteq w$, y por consiguiente que $vR_L w$.

v) Si $B \in L$, entonces, para toda fórmula A , la fórmula $\Diamond \Box A \rightarrow A$ es válida en el modelo canónico. Para ver que R_L es simétrica, supongamos que $uR_L v$. Entonces $\{A: \Box A \in u\} \subseteq v$. Supongamos que no $vR_L u$. Sea pues A una fórmula tal que $\Box A \in v$ pero $A \notin u$. Al ser la fórmula $\Diamond \Box A \rightarrow A$ válida en el modelo canónico, tenemos que $\Diamond \Box A$ es falsa en u , y por tanto para todo $w \in M_L$, si $uR_L w$, $\Box A \notin w$. Por tanto, puesto que $uR_L v$, tenemos que $\Box A \notin v$, pero esto es absurdo.¶

PROPOSICIÓN 5.12 : *Las quince lógicas normales presentadas en el capítulo 4 son canónicas y, por tanto, completas (respecto a marcos).*

Prueba: Por el lema 5.11 el marco canónico de cada una de ellas es un marco de la lógica.¶

4. Dada una lógica consistente L , sabemos que tiene al menos un modelo, el modelo canónico. La construcción del modelo canónico da lugar pues a un teorema de existencia de modelos. Puesto que hay lógicas no canónicas, lógicas para las cuales el marco de su modelo canónico no es un marco para las mismas, la construcción del modelo canónico no proporciona un teorema de existen-

cia de marcos (para cada lógica consistente). Dada esta situación la pregunta natural es la siguiente: ¿Tiene toda lógica modal consistente un marco? A continuación vamos a demostrar que toda lógica modal consistente posee un marco. Para ello observemos que el modelo canónico de una lógica o tiene índices (o puntos) finales o no los tiene. Razonando según se dé uno u otro de estos casos llegaremos a la conclusión deseada. Primero consideremos varios lemas respecto a las fórmulas sin letras sentenciales.

LEMA 5.13: *Para toda fórmula modal A sin letras sentenciales y todo marco $\langle M, R \rangle$*

$$\langle M, R \rangle \models A \text{ si y sólo si existe una asignación } e \text{ en } \langle M, R \rangle \text{ tal que } \langle M, R, e \rangle \models A$$

Prueba: Obvia por inducción. **■**

LEMA 5.14: *Si tenemos un marco sobre el conjunto $\{0\}$, $\langle \{0\}, R \rangle$, y una asignación en el mismo e, y consideramos para cada letra sentencial p, la fórmula A_p tal que*

$$A_p \text{ es } \perp \text{ si } e(p) = \emptyset, \text{ y } A_p \text{ es } \top \text{ si } e(p) = \{0\}$$

entonces para toda fórmula A cuyas letras sentenciales están entre $p_0, \dots, p_n$

$$e(A) = e(A(p_0/A_{p_0}, \dots, p_n/A_{p_n})).$$

Prueba: Por inducción. **■**

LEMA 5.15: *Si A es una fórmula sin letras sentenciales, entonces para todo modelo sin puntos finales $\langle M, R, e \rangle$, $e(A) = M$ o $e(A) = \emptyset$.*

Prueba: Por inducción. **■**

LEMA 5.16: *Si $\langle M, R, \rangle$ no tiene puntos finales, entonces para toda fórmula sin letras sentenciales, A,*

$$\langle M, R \rangle \models A \text{ si y sólo si } \langle \{0\}, \{ \langle 0, 0 \rangle \} \rangle \models A$$

Prueba: Sean e y e' asignaciones en $\langle M, R \rangle$ y en $\langle \{0\}, \{\langle 0, 0 \rangle\} \rangle$ respectivamente. Demostraremos por inducción que, para cada fórmula A sin letras sentenciales, $e(A) = M$ si y sólo si $e'(A) = \{0\}$ y que $e(A) = \emptyset$ si y sólo si $e'(A) = \emptyset$. Evidentemente ocurre para $\perp$. Supongamos que vale para A y B . Entonces, si $e(A \rightarrow B) = M$, $e(A) = \emptyset$ o $e(B) = M$. Por tanto, por la hipótesis inductiva, tenemos que $e'(A) = \emptyset$ o $e'(B) = \{0\}$. Por tanto $e'(A \rightarrow B) = \{0\}$. Los demás casos se demuestran de forma similar. Por otra parte, supongamos que lo que estamos demostrando vale para A . Demostremos que vale para $\Box A$. Si $e(\Box A) = M$ entonces $e(A) = M$, puesto que en caso contrario $e(\Box A) = \emptyset$ al no haber en el modelo puntos finales. Por tanto $e'(A) = \{0\}$ y $e'(\Box A) = \{0\}$. Si $e(\Box A) = \emptyset$ entonces $e'(A) = \emptyset$, y por tanto $e(A) = M$ y $e(\Box A) = M$. ■

PROPOSICIÓN 5.17: *Si L es una lógica normal consistente cuyo modelo canónico tiene puntos finales entonces todo teorema de L es válido en el marco $\langle \{0\}, \emptyset \rangle$*

Prueba: Sea $\langle M_L, R_L, e_L \rangle$ el modelo canónico de L . Sea $u \in M_L$ un punto final del mismo. Consideremos el submodelo generado por u , que es $\langle \{u\}, \emptyset, e_u \rangle$. Veamos que todo teorema de L es válido en $\langle \{u\}, \emptyset \rangle$. Puesto que este último marco y el marco $\langle \{0\}, \emptyset \rangle$ son isomorfos, concluiremos que todo teorema de L es válido en $\langle \{0\}, \emptyset \rangle$. Sea e una asignación cualquiera en el marco $\langle \{u\}, \emptyset \rangle$. Sea, para cada letra sentencial p , A_p la fórmula $\top$, si $e(p) = \{u\}$, y la fórmula $\perp$, si $e(p) = \emptyset$. En tal caso, si A es un teorema de L cuyas letras sentenciales están entre $p_0, \dots, p_n$, la fórmula, sin letras sentenciales, $A(p_0/A_{p_0}, \dots, p_n/A_{p_n})$ es también un teorema de L . Por tanto es verdadera, en el modelo canónico, en u . Por consiguiente es válida en el submodelo generado por u . Por el lema 5.13 tenemos que es válida en el marco $\langle \{u\}, \emptyset \rangle$. Por tanto lo es en el modelo $\langle \{u\}, \emptyset, e \rangle$. Y por el lema 5.14 lo es la fórmula A . ■

PROPOSICIÓN 5.18: *Si L es una lógica normal consistente cuyo modelo canónico no tiene puntos finales, entonces todo teorema de L es válido en el marco $\langle \{0\}, \{\langle 0, 0 \rangle\} \rangle$.*

Prueba: Si A es un teorema de L y e es una asignación en $\langle \{0\}, \{\langle 0, 0 \rangle\} \rangle$, sea para cada letra sentencial p , A_p la fórmula $\top$, si $e(p) = \{0\}$, y la fórmula $\perp$, si $e(p) = \emptyset$. Supongamos que las letras sentenciales de A están entre $p_0, \dots, p_n$. Entonces la fórmula

$A(p_0/A_{p_0}, \dots, p_n/A_{p_n})$ es un teorema de L , y es válida en el modelo canónico de L . Puesto que no tiene letras sentenciales, es válida en el marco del modelo canónico de L . Por el lema 5.16 es válida en el marco $\langle\{0\}, \{\langle 0,0 \rangle\}\rangle$. Por tanto, por el lema 5.14, A es válida en este marco. ■

TEOREMA 5.19: *Toda lógica normal consistente posee un marco.*

Prueba: Por las proposiciones 5.17 y 5.18 tenemos que, para cada lógica consistente, o el marco $\langle\{0\}, \emptyset\rangle$ es un marco de la lógica o lo es el marco siguiente: $\langle\{0\}, \{\langle 0,0 \rangle\}\rangle$. ■

EJERCICIOS

5.1. Completar la demostración del lema 5.1.

5.2. Demostrar el lema 5.4.

5.3. Demostrar que la lógica $KT4 + \Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$, conocida con el nombre de $S4.3$, es canónica. Tener en cuenta el ejercicio 4.15.

5.4. Demostrar que la lógica $KT4 + \Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$, conocida con el nombre de $S4.2$, es canónica. Tener en cuenta la proposición 4.8.

5.5. Demostrar que para cada lógica normal L , en su modelo canónico ocurre que para cada par de conjuntos de fórmulas $\Sigma, \Delta \in M_L$, $\Sigma R_L \Delta$ si y sólo si $\{\Diamond A : A \in \Delta\} \subseteq \Sigma$.

5.6. Demostrar que para cada lógica normal L , en su modelo canónico ocurre que para cada $\Sigma, \Delta \in M_L$ y cada n

i) $\Sigma R_L^n \Delta$ si y sólo si $\{A : \Box^n A \in \Sigma\} \subseteq \Delta$.

ii) $\Sigma R_L^n \Delta$ si y sólo si $\{\Diamond^n A : A \in \Delta\} \subseteq \Sigma$.

(5.7) Demostrar que la lógica $K + \Box p$, llamada Verum, es canónica y, por tanto, completa. Utilizar el ejercicio 4.3.

5.8. Demostrar que la lógica $K + \Box p \leftrightarrow p$, llamada Trivial, es canónica y, por tanto, completa. Utilizar el ejercicio 4.2.

(5.9) Demostrar que para toda lógica L las fórmulas sin letras sentenciales que son teoremas de L son precisamente las válidas en el marco $\langle\{0\}, \emptyset\rangle$. Basta ver que, para toda fórmula A sin letras sentenciales, todo punto final u del modelo canónico, y toda asig-

nación e en el marco $\langle \{0\}, \emptyset \rangle$, A es verdadera, en el modelo canónico, en u si y sólo si A es verdadera en 0 en el modelo $\langle \{0\}, \emptyset, e \rangle$.

5.10. Demostrar que la lógica $K + \Box(\Box p \rightarrow p)$ es canónica.

5.11. Demostrar que la lógica $K + \Diamond T \rightarrow (\Box p \rightarrow p)$ es canónica.

5.12. Dada una lógica L, decimos que un conjunto de fórmulas modales Σ es una L-teoría si está cerrado bajo deducibilidad con regla de necesidad (ver comentario al final del capítulo) en L (si $\Box \Sigma \vdash_L A$, entonces $A \in \Sigma$). Dado una L-teoría Σ , consideremos todos los conjuntos de fórmulas maximales y L-consistentes que la incluyen, y el modelo $\langle M_\Sigma, R_\Sigma, e_\Sigma \rangle$ definido análogamente a como definimos el modelo canónico de L. Demostrar que para toda fórmula A, A es válida en este modelo si y sólo si A pertenece a Σ .

5.13. Demostrar que para toda fórmula modal A

i) A es un teorema de K si y sólo si $\forall x_0 A^*$ es lógicamente válida (en primer orden).

ii) A es un teorema de L si y sólo si $\forall x_0 A^*$ es verdadera en todo modelo de L.

5.14. Demostrar que para todo conjunto de fórmulas modales Σ y toda fórmula modal A

$$\Sigma \vdash_K A \text{ si y sólo si } \Sigma \models_{\text{id}} A.$$

Concluir, usando el ejercicio 3.8 y la notación allí introducida, que

$$\Box \Sigma \vdash_K A \text{ si y sólo si } \Sigma \models_d A.$$

5.15. Demostrar que, para toda lógica L, todo conjunto de fórmulas modales Σ , y toda fórmula modal A

i) $\Sigma \vdash_L A$ si y sólo si $\Sigma \models_{\text{id}(L)} A$

ii) $\Box \Sigma \vdash_L A$ si y sólo si $\Sigma \models_{d(L)} A$.

5.16. Demostrar que para toda lógica L y todo conjunto de fórmulas modales Σ el conjunto $\{A: \Box \Sigma \vdash_L A\}$ es el menor conjunto de fórmulas modales que incluye a L a Σ y esta cerrado bajo *modus ponens* y necesidad: si A pertenece al conjunto, $\Box A$ también.

COMENTARIO: Los ejercicios 5.14 y 5.15 nos enseñan que la noción semántica correspondiente a la de deducibilidad (con pre-

misas) es la noción de consecuencia local débil. La noción de consecuencia débil corresponde a la de deducibilidad a partir de conjuntos de premisas cerrados bajo $\Box$ o, lo que es equivalente, a la noción de deducibilidad con la regla de necesidad: si de Σ es deducible A , lo es $\Box A$.

CAPÍTULO 6

LA PROPIEDAD DE LOS MODELOS FINITOS. FILTRADOS

En este capítulo vamos a ocuparnos de dos cuestiones, la cuestión de la decidibilidad de lógicas normales y, de nuevo, la cuestión de la completitud. Ambas cuestiones las trataremos aquí a través del estudio de una propiedad que pueden tener las lógicas normales, la propiedad de los modelos finitos. Aquellas lógicas que tienen esta propiedad son completas, y si son lógicas en un lenguaje numerable y finitamente axiomatizables son decidibles. El método estándar para demostrar que una lógica tiene la propiedad de los modelos finitos es el método de los filtrados introducido por E. J. Lemmon y por K. Segerberg. Usando este método podemos demostrar, por ejemplo, que la lógica GL, que no es canónica, es completa.

1. Una lógica normal L tiene la *propiedad de los modelos finitos* (p.m.f.) si, para cada fórmula A que no es un teorema de L , existe un modelo finito de L en el que A no es válida.

Una lógica normal L tiene la *propiedad de los marcos finitos* (p.ma.f.) si, para cada fórmula A que no es un teorema de L , existe un L -marco finito en el que A no es válida.

Debe observarse lo siguiente: Una lógica normal L tiene la p.m.f. si y sólo si es el conjunto de todas las fórmulas válidas en todo modelo finito de L . Y una lógica normal L tiene la p.ma.f. si y sólo si está caracterizada por la clases de L -marcos finitos.

Más adelante demostraremos que toda lógica con la propiedad de los modelos finitos tiene la propiedad de los marcos finitos.

TEOREMA 6.1: *Si una lógica normal L en un lenguaje numerable tiene la p.m.f. y es finitamente axiomatizable, entonces es decidable.*

Prueba: Si la lógica tiene la p.m.f., tiene la p.ma.f. Esta es la

propiedad (a demostrar en 6.17) que usaremos para mostrar la existencia de un algoritmo que permita decidir en un número finito de pasos si una fórmula A es o no un teorema de L .

Dado un modelo finito y una fórmula A , es posible decidir en un número finito de pasos si A es o no válida en el modelo.

Dada una lógica L finitamente axiomatizable y un marco finito, podemos en un número finito de pasos decidir si el marco es un marco o no de la lógica. La razón de ello la exponemos un poco más adelante. Además basta considerar marcos cuyo dominio es un segmento inicial de los números naturales, puesto que todo marco finito es isomorfo a un marco de este tipo, y en dos marcos isomorfos son válidas exactamente las mismas fórmulas.

Si consideramos un marco finito y una fórmula B , puesto que de una asignación sólo importa lo que asigna a las letras sentenciales que ocurren en B , tendremos que hay un número finito de tipos de modelos relevantes a la hora de saber si B es o no válida en el marco. Si $\langle M, R \rangle$ es tal que la cardinalidad de M es n , y r es el número de letras sentenciales que ocurren en B , entonces hay sólo $(2^n)^r$ tipos de modelos en $\langle M, R \rangle$ a considerar.

En un conjunto finito M de cardinalidad n , hay $2^{n \cdot n}$ relaciones en M posibles. Por tanto hay a lo sumo $(2^{n \cdot n}) \cdot (2^n)^r$ tipos de modelos con dominio M distintos y relevantes para una fórmula B con r letras sentenciales.

Consideremos todos los marcos con dominio un segmento inicial acotado de números naturales, es decir, un conjunto de la forma $\{n : n < m\}$. Puesto que para cada m sólo hay un número finito de marcos con dominio $\{n : n < m\}$, el conjunto de todos los marcos que estamos considerando es recursivamente enumerable.

Fijemos una enumeración recursiva de los marcos con dominio un segmento inicial de números naturales acotado y una enumeración recursiva de los teoremas de L , que existe al ser L finitamente axiomatizable y en un lenguaje numerable. Dada una fórmula cualquiera A , si es un teorema de L aparecerá en la lista de teoremas de L . Si no lo es, al tener L la p.m.a.f., A no será válida en un L -marco finito, y por tanto no lo será en un L -marco finito con dominio un segmento inicial de números naturales acotado. En tal caso y puesto que para cada marco finito puede decidirse en un número finito de pasos si el marco es o no un L -marco y si A es o no válida en él (existe sólo un número finito de tipos de modelos en el marco relevantes para L y A), si se recorre la lista

de marcos fijada comprobando si los marcos son o no L-marcos y si en ellos es o no válida A, llegará un momento en que se sabrá que A no es válida en un L-marco finito. Por tanto, dada una fórmula A, si recorremos las dos listas yendo y viniendo de la una a la otra llegará un momento en que sabremos si A es o no un teorema de L. I

La técnica usual para demostrar que una lógica tiene la propiedad de los modelos finitos es la técnica de los filtrados.

Dado un modelo $\langle M, R, e \rangle$ y dos índices $x, y \in M$, puede ocurrir que x e y sean indistinguibles modalmente, es decir, que el conjunto de fórmulas verdaderas en x y en y sea el mismo. Esta relación entre índices es una relación de equivalencia y nos permite obtener un nuevo modelo en el que son válidas exactamente las mismas fórmulas que en el original, y en el que índices distintos se diferencian también por los conjuntos de fórmulas modales verdaderas en ellos. Diremos que un modelo $\langle M, R, e \rangle$ *distingue elementos* si para cada $x, y \in M$ tales que $x \neq y$ existe una fórmula A tal que A es verdadera en x y falsa en y . Diremos que dos modelos son *modalmente equivalentes* si y sólo si en ellos son válidas exactamente las mismas fórmulas. Así, todo modelo es modalmente equivalente a uno que distingue elementos. La prueba de ello se dará más adelante.

La idea anterior de identificar dos índices en el caso de que en ambos sean verdaderas exactamente las mismas fórmulas modales puede generalizarse identificando índices según sean o no en ellos verdaderas las mismas fórmulas pertenecientes a un conjunto de fórmulas cerrado bajo subfórmulas fijado de antemano. Seamos más precisos:

Sea $\langle M, R, e \rangle$ un modelo, y sea Σ un conjunto de fórmulas cerrado bajo subfórmulas. Definamos en M una relación de equivalencia $\sim_{\Sigma}$ como sigue:

$$x \sim_{\Sigma} y \text{ si y sólo si para cada } A \in \Sigma, x \in e(A) \text{ si y sólo si } y \in e(A).$$

Consideremos el conjunto cociente $M/\sim_{\Sigma}$, al que a partir de ahora nos referiremos con M/Σ . Dado $x \in M$, con $[x]_{\Sigma}$ nos referiremos a la clase de equivalencia de x bajo la relación $\sim_{\Sigma}$. Si por el

contexto está claro de qué conjunto de fórmulas se trata, escribiremos simplemente $[x]$.

Definamos la asignación e_Σ mediante:

$$e_\Sigma(p) = \{[x] : x \in e(p)\}.$$

Diremos que una relación R en M/Σ es *apropiada* si y sólo si:

- 1) Para cada $x, y \in M$, si xRy , entonces $[x]R[y]$
- 2) Si $\Box A \in \Sigma$, $[x]R[y]$ y $x \in e(\Box A)$, entonces $y \in e(A)$.

Existe al menos una relación apropiada en M/Σ , la relación R_Σ definida por:

$$[x]R_\Sigma[y] \text{ syss para cada } A, \text{ si } \Box A \in \Sigma \text{ y } x \in e(\Box A) \\ \text{entonces } y \in e(A).$$

Esta relación está bien definida: Supongamos que $x \sim_\Sigma x'$, que $y \sim_\Sigma y'$, y que para cada A tal que $\Box A \in \Sigma$ y $x \in e(\Box A)$, $y \in e(A)$. Entonces, dada A tal que $\Box A \in \Sigma$ y $x' \in e(\Box A)$, tenemos que $x \in e(\Box A)$, y por tanto que $y \in e(A)$. Al estar Σ cerrado bajo subfórmulas, $y' \in e(A)$. Además, R_Σ es apropiada puesto que 2) se cumple por definición y 1) se cumple ya que, si xRy , la condición que define a $[x]R_\Sigma[y]$ se cumple para toda fórmula A , tanto si $\Box A$ pertenece a Σ como si no.

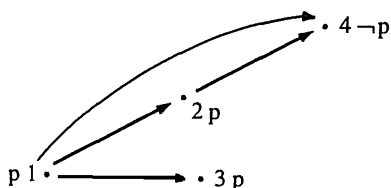
Otra relación apropiada en Σ es la relación R'_Σ definida por:

$$[x]R'_\Sigma[y] \text{ syss existen } u \in [x] \text{ y } v \in [y] \text{ tales que } uRv.$$

Está claro que su definición no depende de los representantes elegidos. Además es inmediato que cumple la condición 1). Por otro lado, si $\Box A \in \Sigma$, $[x]R'_\Sigma[y]$ y $x \in e(\Box A)$, sean $u \in [x]$ y $v \in [y]$ tales que uRv . Entonces tenemos que $u \in e(\Box A)$, y por tanto $v \in e(A)$. Por consiguiente $y \in e(A)$. Podemos concluir pues que R'_Σ cumple la condición 2).

La relación R_Σ es la mayor relación apropiada en M/Σ , y la relación R'_Σ es la menor. Es decir, para cada relación S apropiada en M/Σ tenemos que $R'_\Sigma \subseteq S \subseteq R_\Sigma$. La prueba de ello se deja como ejercicio para el lector.

El siguiente modelo nos muestra que la mayor relación apropiada y la menor no tienen por qué coincidir:



Si consideramos el conjunto de fórmulas $\Sigma = \{p, \Box p\}$, el conjunto M/Σ es $\{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}\}$. Y en la menor relación apropiada la clase $\{3\}$ no está relacionada consigo misma, pero en la mayor sí.

Diremos que un modelo $\langle M/\Sigma, R^\#, e_\Sigma \rangle$ es un *filtrado de* $\langle M, R, e \rangle$ a través de Σ si $R^\#$ es una relación apropiada en M/Σ . Un modelo puede tener más de un filtrado a través de un mismo conjunto de fórmulas, como se sigue del ejemplo anterior.

TEOREMA 6.2: Si Σ es un conjunto de fórmulas cerrado bajo subfórmulas, y $\langle M/\Sigma, R^\#, e_\Sigma \rangle$ es un filtrado de $\langle M, R, e \rangle$ a través de Σ , entonces para toda fórmula $A \in \Sigma$

$$e_\Sigma(A) = \{[x]: x \in e(A)\}.$$

Prueba: Por inducción. Para las letras sentenciales está claro, así como lo está para la fórmula $\perp$. El caso de fórmulas condicionales es de fácil comprobación si lo que debe demostrarse vale para antecedente y consecuente. Para demostrarlo para el caso de fórmulas de tipo $\Box A$, supongamos que lo que debemos probar vale para A . Si $x \in e(\Box A)$ y $\Box A \in \Sigma$, entonces para cada $y \in M$ tal que $[x] R^\# [y]$, $y \in e(A)$, y por tanto por la hipótesis inductiva tenemos que $[y] \in e_\Sigma(A)$. Por consiguiente $[x] \in e(\Box A)$. Por otro lado, si $[x] \in e_\Sigma(\Box A)$ y $\Box A \in \Sigma$ y $x R y$, entonces $[x] R^\# [y]$. Por tanto $[y] \in e_\Sigma(A)$. Por consiguiente resulta que $y \in e(A)$. Y por tanto x es elemento de $e(\Box A)$. ■

PROPOSICIÓN 6.3: Si Σ es un conjunto finito de fórmulas cerrado bajo subfórmulas, entonces todo filtrado a través de Σ de un modelo cualquiera es un modelo finito. ◻

Prueba: Supongamos que Σ es finito y de cardinalidad n . Entonces mediante fórmulas pertenecientes a Σ sólo es posible distinguir 2^n tipos distintos de índices. La relación de equivalencia $\sim_\Sigma$ da lugar a lo sumo a 2^n clases de equivalencia distintas. Por tanto todo filtrado a través de Σ de todo modelo es finito. ▮

TEOREMA 6.4: *Si A no es un teorema de la lógica K, entonces A no es válida en un filtrado del modelo canónico de K a través del conjunto de subfórmulas de A.*

Prueba: Si A no es teorema de K, sea $u \in M_K$ (el dominio del modelo canónico de K) tal que A es falsa en u . Entonces, en todo filtrado del modelo canónico a través de $\text{Sub}(A)$, A será falsa en $[u]$. ▮

COROLARIO 6.5: *K tiene la propiedad de los modelos finitos y, al ser finitamente axiomatizable, es decidible.*

Prueba: Por 6.4, 6.3, 6.1 y el hecho de que todo marco es un K-marco. ▮

TEOREMA 6.6: *Si L es una lógica normal tal que para cada conjunto finito de fórmulas cerrado bajo subfórmulas Σ existe un filtrado del modelo canónico a través de Σ que es modelo de L, entonces L tiene la p.m.f.*

Prueba: Supongamos el antecedente del teorema. Si A no es teorema de L, entonces A es falsa en algún índice u del modelo canónico de L. Consideremos el conjunto de las subfórmulas de A, $\text{Sub}(A)$. Entonces por la suposición existe un filtrado del modelo canónico de L a través de $\text{Sub}(A)$ que es modelo de L. En tal filtrado A será falsa en $[u]$. Además el filtrado es finito puesto que $\text{Sub}(A)$ es finito. Así, toda fórmula que no es teorema de L no es válida en algún modelo finito de L. ▮

Un modo de demostrar que una lógica normal L posee la p.m.f. consiste en obtener para cada conjunto finito de fórmulas cerrado bajo subfórmulas un filtrado a través del mismo del modelo canónico de la lógica cuyo marco sea un marco de la lógica (o L-marco). Esta es la técnica que emplearemos para demostrar que algunas de las quince lógicas normales que consideramos en el capítulo 4 tienen la p.m.f. Para ello demostraremos las siguientes proposiciones:

PROPOSICIÓN 6.7: *Todo filtrado de todo modelo reflexivo es reflexivo.*

Prueba: Si en $\langle M, R, e \rangle$ R es reflexiva, y Σ es un conjunto de fórmulas cerrado bajo subfórmulas, entonces para cualquier filtrado, si $R^\#$ es la relación del mismo, para cada $x \in M$, $[x]R^\#[x]$ (pues xRx). $\blacksquare$

PROPOSICIÓN 6.8: *Todo filtrado de un modelo serial es serial.*

Prueba: Si $\langle M, R, e \rangle$ es serial, entonces, puesto que para cada $x \in M$ existe un $y \in M$ tal que xRy , tenemos que para todo filtrado a través de algún conjunto de fórmulas, si $R^\#$ es la relación del mismo, ocurre que para cada $[x]$ existe $[y]$ tal que $[x]R^\#[y]$. $\blacksquare$

PROPOSICIÓN 6.9: *Para todo modelo transitivo y todo conjunto Σ de fórmulas cerrado bajo subfórmulas, existe un filtrado transitivo del modelo a través de Σ .*

Prueba: Dado el modelo $\langle M, R, e \rangle$ y el conjunto Σ , definamos en M/Σ $R^\#$ mediante:

$[x]R^\#[y]$ si y sólo si para cada A , si $\Box A \in \Sigma$ y $x \in e(\Box A)$

entonces $y \in e(A)$ y $y \in e(\Box A)$.

Está claro por el argumento usual que la definición de $R^\#$ es independiente de los representantes elegidos. Es fácil comprobar que es transitiva. Además es apropiada. La condición 2) se sigue inmediatamente de la definición. Por otro lado, si xRy , $\Box A \in \Sigma$ y $x \in e(\Box A)$, entonces $y \in e(A)$. Y, puesto que R es transitiva, en $\langle M, R, e \rangle$ es válida la fórmula $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ (ver Prop. 4.1 y Prop. 3.6). Por tanto $x \in e(\Box \Box A)$, con lo que tenemos que y pertenece a $e(\Box A)$. Así, $[x]R^\#[y]$. Por tanto vale la condición 1), y $R^\#$ es apropiada. $\blacksquare$

PROPOSICIÓN 6.10: *Para todo modelo simétrico, y todo conjunto Σ de fórmulas cerrado bajo subfórmulas, existe un filtrado simétrico del modelo a través de Σ .*

Prueba: Dado un modelo $\langle M, R, e \rangle$, y un conjunto de fórmulas Σ cerrado bajo subfórmulas, definamos en M/Σ la relación $R^\#$ mediante:

$[x]R^*[y]$ syss para cada A tal que $\Box A \in \Sigma$, si $x \in e(\Box A)$ entonces $y \in e(A)$, y si $y \in e(\Box A)$ entonces $x \in e(A)$.

Por el tipo usual de argumento es fácil ver que la definición no depende de los representantes elegidos. Se sigue inmediatamente de la definición que la relación es simétrica. Para ver que es apropiada tenemos que la condición 2) es una consecuencia inmediata de la definición. Por otra parte, si xRy entonces, si $\Box A \in \Sigma$ y $x \in e(\Box A)$, $y \in e(A)$. Puesto que R es simétrica, yRx . Por tanto, si $y \in e(\Box A)$, $x \in e(A)$. Por consiguiente $[x]R^*[y]$. Por tanto vale la condición 1).■

PROPOSICIÓN 6.11: *Para todo modelo transitivo y simétrico, y todo conjunto Σ de fórmulas cerrado bajo subfórmulas, existe un filtrado transitivo y simétrico del modelo a través de Σ .*

Prueba: Combinando las definiciones de R^* de las pruebas de las dos proposiciones anteriores. La prueba se deja como ejercicio.■

Las proposiciones 6.7 a 6.11 nos permiten concluir, usando la proposición 6.6, que las lógicas KD, KB, K4, KB4, KBD, K4D, KT, KTB, KT4, y KTB4, que es la KTE, tienen la p.m.f. y por tanto, al ser finitamente axiomatizables, que son decidibles.

PROPOSICIÓN 6.12: *Para todo modelo transitivo y euclídeo y todo conjunto Σ de fórmulas cerrado bajo subfórmulas, existe un filtrado transitivo y euclídeo a través de Σ .*

Prueba: Dado un modelo $\langle M, R, e \rangle$ y un conjunto de fórmulas cerrado bajo subfórmulas, definamos R^* en M/Σ por:

$[x] R^* [y]$ si y sólo si para cada A tal que $\Box A \in \Sigma$ ocurre que, si $x \in e(\Box A)$, entonces $y \in e(A)$ y $y \in e(\Box A)$, y si $y \in e(\Box A)$ entonces $x \in e(A)$.

La definición es independiente de los representantes elegidos, lo cual puede demostrarse por el tipo de argumentación usual. R^* es transitiva puesto que, si $[x]R^*[y]$ y $[y]R^*[z]$, entonces si $\Box A \in \Sigma$ y $x \in e(\Box A)$ tenemos que y pertenece a $e(\Box A)$ y por tanto que $z \in e(A)$ y $z \in e(\Box A)$. Y, si $\Box A \in \Sigma$ y $z \in e(\Box A)$, entonces $y \in e(\Box A)$, y por tanto $x \in e(\Box A)$. Por tanto $[x]R^*[z]$. Por otro lado,

$R^\#$ es euclídea, puesto que, si $[x] R^\# [y]$ y $[x] R^\# [z]$, entonces si $\Box A \in \Sigma$ y $y \in e(\Box A)$, $x \in e(\Box A)$. Y por tanto $z \in e(\Box A)$ y $z \in e(A)$. Y, si $\Box A \in \Sigma$ y $z \in e(\Box A)$, entonces $x \in e(\Box A)$. Y por tanto $y \in e(\Box A)$. Así, $[y] R^\# [z]$.

Finalmente, $R^\#$ es apropiada. Veámoslo: si xRy , entonces, al ser R euclídea, yRy . Y dada A tal que $\Box A \in \Sigma$ y $x \in e(\Box A)$, $x \in e(\Box \Box A)$ (pues al ser R transitiva la fórmula $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ es válida en el modelo), y por tanto $y \in e(\Box A)$ y $y \in e(A)$. Además, si $y \in e(\Box A)$ y $x \notin e(\Box A)$, $x \in e(\Diamond \neg A)$. Pero en tal caso $x \in e(\Box \Diamond \neg A)$ (pues R es euclídea y por tanto la fórmula $\Diamond \neg A \rightarrow \Box \Diamond \neg A$ es válida en el modelo). Por tanto resulta que $y \in e(\Diamond \neg A)$, es decir, que $y \in e(\neg \Box A)$, pero esto es absurdo. Obtenemos que si $y \in e(\Box A)$ entonces $x \in e(\Box A)$. Concluimos pues que, si xRy , entonces $[x] R^\# [y]$. De la definición de $R^\#$ se sigue claramente que se cumple la condición 2) de la definición de relación apropiada. $\blacksquare$

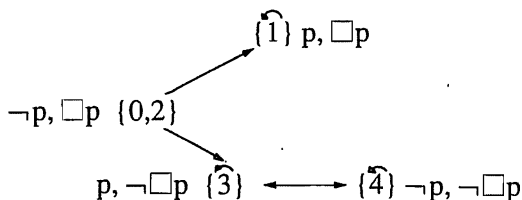
La proposición anterior, junto con la 6.8, nos permite concluir, usando la proposición 6.6, que las lógicas KE4 y KE4D tienen la propiedad de los modelos finitos, y al ser finitamente axiomatizables, que son decidibles.

La lógica KE es decidible así como la KDE. Ahora bien, para el caso de modelos con la relación euclídea no es cierto que para cada conjunto de fórmulas finito y cerrado bajo subfórmulas exista un filtrado euclídeo a través del mismo. El enunciado correspondiente vale también para modelos con la relación euclídea y serial. Veamos un ejemplo. Consideremos el modelo de diagrama:

$$\neg p \quad 0 \longrightarrow \widehat{1} p$$

$$\neg p \quad 2 \longrightarrow \underset{p}{\widehat{3}} \longrightarrow \widehat{4} \neg p$$

y el conjunto $\Sigma = \{p, \Box p\}$. Entonces $e(\Box p) = \{0, 1, 2\}$ y $e(\neg \Box p) = \{3, 4\}$. Por tanto $M/\Sigma = \{\{0, 2\}, \{1\}, \{3\}, \{4\}\}$. Observemos que R es euclídea. Sea $R^\#$ la menor relación apropiada. Tiene por diagrama



y no es euclídea. Si relacionamos aquellos elementos de M/Σ estrictamente necesarios para convertir a $R^\#$ en euclídea, debemos relacionar en ambos sentidos a $\{1\}$ con $\{3\}$ y con $\{4\}$, pero entonces, puesto que $\Box p$ es verdadero en 1, para que la nueva relación fuese apropiada p debería ser verdadera en 4, pero en 4 es falsa. Así pues, no existe ninguna relación apropiada euclídea que proporcione un filtrado del modelo a través de $\{p, \Box p\}$.

La argumentación para demostrar que KE y KED son decidibles pasa por considerar, dada una fórmula A que no sea un teorema de la lógica, un filtrado de ciertas características a través de un conjunto infinito de fórmulas que incluye a $\text{Sub}(A)$, filtrado que resulta ser finito. Para demostrarlo hay que estudiar las modalidades de las lógicas KE y KED, y esto nos ocuparía demasiado espacio. En los ejercicios se dan las indicaciones necesarias para que lo demuestre el lector interesado.

2. En este apartado veremos que toda lógica con la propiedad de los modelos finitos tiene la propiedad de los marcos finitos. Y estudiaremos básicamente esta segunda propiedad.

PROPOSICIÓN 6.13: *Si L es una lógica normal con la p.m.a.f., entonces L es completa.*

Prueba: Si L tiene la p.m.a.f., está caracterizada por la clase de L -marcos finitos, y por tanto, puesto que toda lógica caracterizada por una clase de marcos es completa, es completa. $\square$

El anterior resultado nos permitirá, una vez que sepamos que la lógica GL tiene la p.m.a.f., concluir que es completa. Antes demostraremos que toda lógica con la p.m.f. tiene la p.m.a.f. Para ello debemos obtener primero algunos resultados interesantes por sí mismos.

PROPOSICIÓN 6.14: *Para cada modelo $\langle M, R, e \rangle$, existe un modelo modalmente equivalente de menor o igual cardinalidad y que distingue elementos, a saber: cualquier filtrado a través del conjunto de todas las fórmulas.*

Prueba: Consideremos cualquier filtrado $\langle M/\Sigma, R^\#, e_\Sigma \rangle$ del modelo a través del conjunto de todas las fórmulas al que llamamos Σ . Tal filtrado distingue elementos puesto que clases de equivalencia distintas están determinadas por índices en los que no son verdaderas las mismas fórmulas. Por otra parte, si una fórmula A es válida en el modelo inicial, es verdadera en todo índice, y por tanto es verdadera, por el teorema 6.2, en todo índice del filtrado. E, inversamente, toda fórmula válida en el filtrado debe serlo en el modelo. Así, el filtrado y el modelo inicial son modalmente equivalentes. Y, obviamente, la cardinalidad del filtrado es menor o igual que la del modelo original. ■

Decimos que un modelo $\langle M, R, e \rangle$ caracteriza su relación si y sólo si para cada $u, v \in M$ ocurre que:

uRv si y sólo si para toda A , si $u \in e(\Box A)$ entonces $v \in e(A)$.

PROPOSICIÓN 6.15: *Para cada modelo existe un modelo modalmente equivalente que distingue elementos y caracteriza su relación.*

Prueba: Dado un modelo $\langle M, R, e \rangle$, el filtrado del mismo a través del conjunto Σ de todas las fórmulas con relación $R^\#$ definida por

$[x]R^\#[y]$ syss para cada A , si $x \in e(\Box A)$ entonces $y \in e(A)$

distingue elementos (prop. 6.14) y de la definición se sigue, al ser un filtrado a través del conjunto de todas las fórmulas, que caracteriza su relación. ■

Los modelos canónicos son modelos que distinguen elementos y caracterizan su relación.

LEMA 6.16: *Si $\langle M, R, e \rangle$ es un modelo finito que distingue elementos entonces para cada $u \in M$ existe una fórmula A tal que $e(A) = \{u\}$.*

Prueba: Consideremos una enumeración $u_1, \dots, u_n$ de los elementos de M . Para cada i, j tales que $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y $i \neq j$, sea A_{ij} una fórmula tal que $u_i \in e(A_{ij})$ y $u_j \notin e(A_{ij})$, que existe puesto que el modelo distingue elementos. Sea para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ A_{ii} la fórmula T . Entonces

$$u_k \in e(A_{i_1} \wedge \dots \wedge A_{i_n}) \text{ si y sólo si } k = i,$$

por tanto $e(A_{i_1} \wedge \dots \wedge A_{i_n}) = \{u_i\}$. $\square$

PROPOSICIÓN 6.17: *Si L es una lógica normal y $\langle M, R, e \rangle$ es un modelo finito de L que distingue elementos, entonces $\langle M, R \rangle$ es un L -marco.*

Prueba: Dado un modelo finito de L , $\langle M, R, e \rangle$, que distingue elementos, para ver que su marco es un L -marco supongamos que no lo es. Consideremos entonces una asignación e_1 en $\langle M, R \rangle$, una fórmula A teorema de L y un índice $u \in M$ tales que $u \notin e_1(A)$. Puesto que $\langle M, R, e \rangle$ distingue elementos, para cada elemento v de M , sea B_v una fórmula tal que $e(B_v) = \{v\}$ (existe por el lema 6.16). Supongamos que el lenguaje de nuestra lógica es numerable. Para el caso no numerable podemos razonar de modo parecido. Consideremos para cada número natural n el conjunto $e_1(p_n)$ que es finito. Pongamos

$$e_1(p_n) = \{u_1^n, \dots, u_{i_n}^n\}$$

si no es vacío. Definamos para cada fórmula C una fórmula C^* mediante: C^* es $C(p_0/p_0^*, \dots, p_m/p_m^*)$, donde m es tal que las letras sentenciales que ocurren en C están entre las $m+1$ primeras y para cada número natural n p_n^* es $B_{u_1^n} \vee \dots \vee B_{u_{i_n}^n}$ si $e_1(p_n)$ no es vacío, y es $\perp$ si es vacío. Por inducción puede verse sin dificultad que para cada fórmula C , $e_1(C) = e(C^*)$, teniendo en cuenta que para el caso de las letras sentenciales ocurre que para cada p_n , si $e_1(p_n)$ es vacío, lo es $e(p_n^*)$, al ser en tal caso $p_n^* \perp$, y si no es vacío entonces:

$$\begin{aligned} x \in e_1(p_n) & \text{ syss } x = u_1^n \text{ o } \dots, \text{ o } x = u_{i_n}^n \\ & \text{ syss } x \in e(B_{u_1^n}) \text{ o } \dots, \text{ o } x \in e(B_{u_{i_n}^n}) \\ & \text{ syss } x \in e(B_{u_1^n} \vee \dots \vee B_{u_{i_n}^n}) \\ & \text{ syss } x \in e(p_n^*). \end{aligned}$$

Por tanto, puesto que $u \notin e_1(A)$, tenemos que $u \notin e(A^*)$. Ahora bien, al ser A un teorema de L , A^* es un teorema de L (toda lógica está cerrada bajo sustitución). Por tanto $\langle M, R, e \rangle$ no es un modelo de L , en contra del supuesto. Por tanto $\langle M, R \rangle$ es un L -marco. $\blacksquare$

TEOREMA 6.18: *Una lógica normal L tiene la propiedad de los modelos finitos si y sólo si tiene la de los marcos finitos.*

Prueba: Una dirección del bicondicional es obvia. Para demostrar la otra supongamos que L tiene la p.m.f. Supongamos que A no es un teorema de L . Sea $\langle M, R, e \rangle$ un modelo finito de L en el que A no es válida. Sea $\langle M', R', e' \rangle$ un modelo finito modalmente equivalente que distingue elementos, que existe por la proposición 6.14. Entonces A no es válida en $\langle M', R', e' \rangle$. Por la proposición 6.17 $\langle M', R' \rangle$ es un L -marco. Por tanto A no es válida en un L -marco finito. Así, L tiene la p.ma.f. $\blacksquare$

EJERCICIOS

6.1. Demostrar que las relaciones definidas en la página 82, R_Σ y R_Σ' , son respectivamente la mayor y la menor relación apropiada.

6.2. Demostrar la proposición 6.11.

6.3. Demostrar que el modelo canónico de una lógica distingue elementos y caracteriza su relación.

6.4. Demostrar que la lógica de la clase de marcos $\{\langle M, R \rangle : R = M \times M\}$ tiene la p.ma.f.

(6.5.) Dado un conjunto de fórmulas modales Γ , la *clausura booleana* de Γ es el menor conjunto de fórmulas modales que incluye a Γ , contiene $\perp$, y tiene la propiedad siguiente: si $A, B \in \Gamma$ entonces $(A \rightarrow B) \in \Gamma$. Demostrar que, si Γ está cerrado bajo subfórmulas, lo está su clausura booleana. Demostrar además que, si $\langle M/\Gamma, R\#, e_\Gamma \rangle$ es un filtrado a través de Γ de un modelo $\langle M, R, e \rangle$, entonces para toda fórmula modal A elemento de la clausura booleana de Γ y todo índice $u \in M$,

$$\langle M/\Gamma, R\#, e_\Gamma \rangle \models_u A \text{ si y sólo si } \langle M, R, e \rangle \models_u A.$$

6.6. Decimos que un conjunto de fórmulas modales Γ es *lógicamente finito* respecto a un modelo $\langle M, R, e \rangle$ si y sólo si exis-

te $\Delta \subseteq \Gamma$ finito tal que para cada fórmula $A \in \Gamma$ existe una fórmula $B \in \Delta$ verdadera, en el modelo, en exactamente los mismos índices que la fórmula A . Demostrar que, si Γ está cerrado bajo subfórmulas y es lógicamente finito respecto a $\langle M, R, e \rangle$, entonces todo filtrado de $\langle M, R, e \rangle$ a través de Γ es finito.

(6.7.) Dado un conjunto de fórmulas modales Γ , su *clausura modal* es el menor conjunto Δ que incluye a Γ y verifica que:

si $A \in \Delta$, entonces $\neg A$, $\Diamond A$, y $\Box A$ pertenecen a Δ .

Una *modalidad* es una sucesión finita de signos pertenecientes al conjunto $\{\neg, \Box\}$. En una lógica pueden existir modalidades distintas equivalentes. Por ejemplo, puede ocurrir que para toda fórmula A , $\Box\Box A \leftrightarrow \Box A$ es un teorema. En tal caso decimos que las modalidades $\Box\Box$ y $\Box$ son equivalentes en la lógica. En la lógica KE hay un número finito de modalidades no equivalentes. Usando este hecho, demostrar que, si Γ es un conjunto de fórmulas modales cerrado bajo subfórmulas, entonces su clausura modal está cerrada bajo subfórmulas y es lógicamente finita respecto a todo modelo euclídeo.

6.8. Un conjunto de fórmulas modales está *modalmente cerrado* si él es su propia clausura modal. Demostrar que para todo conjunto de fórmulas modalmente cerrado Γ y todo modelo euclídeo $\langle M, R, e \rangle$, el mayor filtrado de $\langle M, R, e \rangle$ a través de Γ es euclídeo. Concluir que la lógica KE tiene la p.ma.f.

!!! (6.9.) No existe ninguna lógica modal normal cuyos marcos sean precisamente aquellos en los que es verdadera la sentencia de primer orden siguiente: $\forall x \exists y (Rxy \wedge Ryy)$. Demostrarlo por reducción al absurdo completando el siguiente argumento: si existiese una tal lógica, digamos L , entonces, puesto que en el marco $\langle \mathbb{N}, < \rangle$, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y $<$ el orden usual, es falsa la sentencia en cuestión, algún teorema de L , A , no sería válido en dicho marco. Pero existe un filtrado de $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ en el que es verdadera la sentencia $\forall x \exists y (Rxy \wedge Ryy)$ y no es válida A .

CAPÍTULO 7

ALGUNOS EJEMPLOS DE LÓGICAS

En los capítulos anteriores hemos estudiado varias propiedades que pueden tener las lógicas. Estas propiedades son las siguientes: propiedad de los modelos finitos, propiedad de los marcos finitos, completitud, canonicidad, axiomatizabilidad finita, decidibilidad, y definibilidad en primer orden de su clase de marcos. Hemos demostrado que una lógica tiene la propiedad de los modelos finitos si y sólo si tiene la propiedad de los marcos finitos, con lo que podemos olvidarnos de la propiedad de los modelos finitos a la hora de estudiar posibles implicaciones entre las propiedades mencionadas. Hemos demostrado también las siguientes implicaciones: Toda lógica canónica es completa, y toda lógica con la propiedad de los marcos finitos es completa. Si consideramos las propiedades anteriores excepto la decidibilidad, las dos implicaciones demostradas son las únicas que se dan entre propiedades aisladas. En este capítulo vamos a estudiar las propiedades de varias lógicas, lógicas que servirán de contraejemplos para todas las otras posibles implicaciones.

LA LÓGICA GL

La lógica GL es la lógica $K+GL$, donde, recordemos, GL es la fórmula

$$\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p.$$

PROPOSICIÓN 7.1: $\vdash_{GL} \Box p \rightarrow \Box \Box p$.

Prueba: $\vdash_{GL} p \rightarrow ((\Box p \wedge \Box \Box p) \rightarrow (p \wedge \Box p))$, al ser esta fórmula una instancia de sustitución de una tautología. Por tanto, por la regla de necesidad, el axioma distributivo y lógica sentencial, $\vdash_{GL} \Box p \rightarrow \Box((\Box p \wedge \Box \Box p) \rightarrow (p \wedge \Box p))$. Por el axioma GL,

lógica sentencial, y sustitución $\vdash_{GL} \Box p \rightarrow (\Box p \wedge \Box \Box p)$. Por tanto $\vdash_{GL} \Box p \rightarrow \Box \Box p$. $\blacksquare$

La lógica GL es completa y decidible pero no es canónica. La completitud se demuestra demostrando que tiene la p.ma.f., de lo que se sigue también, puesto que es finitamente axiomatizable, que es decidible. Para llegar a demostrar que GL tiene la p.ma.f. necesitamos antes un par de lemas sobre filtrados.

LEMA 7.2: *Para todo modelo $\langle M, R, e \rangle$, todo conjunto finito de fórmulas cerrado bajo subfórmulas, Σ , y todo filtrado $\langle M/\Sigma, R^*, e_\Sigma \rangle$ del modelo a través de Σ , ocurre que para cada $[u] \in M/\Sigma$ existe una fórmula A tal que para todo $v \in M$:*

$$\langle M, R, e \rangle \models_v A \text{ si y sólo si } v \in [u].$$

Prueba: Dada $[u] \in M/\Sigma$, sean, $A_1, \dots, A_n$ las fórmulas de Σ verdaderas en u , si existe alguna. Y sean $B_1, \dots, B_m$ las fórmulas de Σ falsas en u , si existe alguna. Entonces la fórmula $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge \dots \wedge \neg B_m$ es la fórmula buscada. $\blacksquare$

LEMA 7.3: *Dados un modelo $\langle M, R, e \rangle$, un conjunto finito de fórmulas cerrado bajo subfórmulas, Σ , y un filtrado $\langle M/\Sigma, R^*, e_\Sigma \rangle$ del modelo a través de Σ , entonces para todo conjunto $X \subseteq M/\Sigma$ existe una fórmula A tal que para todo $u \in M$:*

$$\langle M, R, e \rangle \models_u A \text{ si y sólo si } [u] \in X.$$

Prueba: Al ser M/Σ finito, X es finito. Si $X = \emptyset$, A es $\perp$. Si $X \neq \emptyset$, supongamos que $X = \{[u_1], \dots, [u_n]\}$. Sea para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, A_i una fórmula tal que para cada $v \in M$, es verdadera en v si y sólo si $v \in [u_i]$. Tales fórmulas existen en virtud del lema anterior. Entonces $A_1 \vee \dots \vee A_n$ es la fórmula buscada. $\blacksquare$

LEMA 7.4: *Si una fórmula A es GL-consistente, lo es la fórmula $(A \wedge \Box \neg A)$.*

Prueba: Si $(A \wedge \Box \neg A)$ no es GL-consistente, $\vdash_{GL} \neg (A \wedge \Box \neg A)$. Por tanto resulta que $\vdash_{GL} \Box \neg A \rightarrow \neg A$. Por tanto $\vdash_{GL} \Box (\Box \neg A \rightarrow \neg A)$. En virtud del axioma GL y *modus ponens*, tenie-

mos que $\vdash_{GL} \Box \neg A$. Por tanto, por *modus ponens*, tenemos que $\vdash_{GL} \neg A$, y así A no es GL-consistente.■

Queremos demostrar que GL tiene la propiedad de los modelos finitos. Para hacerlo la técnica habitual consistente en construir filtrados del modelo canónico mediante conjuntos finitos de fórmulas no nos da necesariamente modelos cuyos marcos sean GL-marcos. Puesto que los GL-marcos son transitivos, consideremos filtrados transitivos. La única posibilidad de que el marco de un modelo finito obtenido como filtrado transitivo del modelo canónico de GL no sea un GL-marco es que en él existan elementos relacionados consigo mismos o existan bucles, es decir, cadenas del tipo $a_0 R a_1 R \dots R a_n R a_0$. Debe observarse que, al ser la relación transitiva, en una cadena de este tipo todos los componentes están relacionados entre sí de todos los modos posibles. A estos conjuntos de objetos que están todos relacionados entre sí de todos los modos posibles los podemos llamar *aglomeraciones*. Para cada filtrado transitivo del modelo canónico de GL a través de un conjunto finito de fórmulas Σ , construiremos un modelo transitivo e irreflexivo —así en él no existirán aglomeraciones del tipo señalado— equivalente al original en lo que respecta a las fórmulas de Σ . Para construir tal modelo reemplazaremos cada aglomeración por un orden total estricto de sus componentes. Esto es lo que hacemos en la prueba de la proposición 7.6.

Refirámonos al modelo canónico de la lógica GL con $\langle M^G, R^G, e^G \rangle$. La razón de utilizar superíndices en lugar de subíndices obedece a la necesidad de utilizar al hablar de filtrados ambos tipos de índice.

LEMA 7.5: *Para todo filtrado $\langle M^G/\Sigma, R^*, e_\Sigma^G \rangle$ del modelo canónico de GL a través de un conjunto finito de fórmulas cerrado bajo subfórmulas Σ , y cada conjunto $X \subseteq M^G/\Sigma$ distinto del vacío existe $u \in M^G$ tal que $[u] \in X$ y para cada $v \in M^G$ tal que $u R^G v$, $[v] \notin X$.*

Prueba: Sea A una fórmula tal que para cada $u \in M^G$, A es verdadera en u si y sólo si $[u] \in X$. Puesto que X no es vacío, A es GL-consistente. Por tanto, por el lema anterior, $(A \wedge \Box \neg A)$ es GL-consistente. Sea pues $v \in M^G$ tal que en v es verdadera la última fórmula. En tal caso A es verdadera en v , con lo cual tenemos que $[v] \in X$. Además, $\Box \neg A$ es verdadera en v y, por tanto, para

todo $w \in M^G$ tal que $\forall R^G w, A$ es falsa en w . Por consiguiente $[w] \notin X$. $\square$

LEMA 7.6: *Para todo filtrado transitivo $\langle M^G/\Sigma, R^*, e_\Sigma^G \rangle$ del modelo canónico de GL a través de un conjunto finito de fórmulas Σ cerrado bajo subfórmulas, existe una relación $R^{**} \subseteq R^*$ irreflexiva y transitiva tal que para cada fórmula $B \in \Sigma$ y cada $u \in M^G$:*

$$(*) \langle M^G/\Sigma, R^{**}, e_\Sigma^G \rangle \models_{[u]} B \text{ si y sólo si } \langle M^G/\Sigma, R^*, e_\Sigma^G \rangle \models_{[u]} B.$$

Prueba: Definamos en M^G/Σ una relación de equivalencia $\approx$ mediante:

$$[u] \approx [v] \text{ syss } [u] = [v] \text{ o } ([u] R^* [v] \text{ y } [v] R^* [u]).$$

Esta relación es de equivalencia al ser R^* transitiva. Las clases de equivalencia por esta relación son aglomeraciones de las que hablábamos antes, y además son las aglomeraciones maximales respecto a la inclusión. Elijamos, para cada elemento X del conjunto cociente $(M^G/\Sigma)/\approx$, una relación $R_X \subseteq R^* \cap (X \times X)$ que sea un orden total estricto de X . Consideremos la relación

$$R' = \bigcup \{R_X : X \in (M^G/\Sigma)/\approx\},$$

y definamos la relación R^{**} en M^G/Σ mediante:

$$[u] R^{**} [v] \text{ syss } ([u] \approx [v] \text{ y } [u] R' [v]) \\ \text{o } ([u] \neq [v] \text{ y } [u] R^* [v]).$$

Entonces R^{**} es irreflexiva, transitiva y está incluida en R^* .

Veamos ahora que se cumple la condición 1). Lo probaremos por inducción. Para el caso de las letras sentenciales y de la fórmula $\perp$ es inmediato. Si vale para fórmulas A y B es fácil ver que vale para $(A \rightarrow B)$. Demostremos el caso interesante. Supongamos que $(*)$ vale para B . Supongamos que $\Box B \in \Sigma$, entonces $B \in \Sigma$. Supongamos además que

$$\langle M^G/\Sigma, R^*, e_\Sigma^G \rangle \models_{[u]} \Box B.$$

En tal caso si $[u]R^{**}[v]$, $[u]R^*[v]$, y por tanto $\langle M^G/\Sigma, R^*, e_\Sigma^G \rangle \models_{[v]} B$, con lo que por la hipótesis inductiva obtenemos que $\langle M^G/\Sigma, R^{**}, e_\Sigma^G \rangle \models_{[v]} B$. Por tanto tenemos que $\langle M^G/\Sigma, R^{**}, e_\Sigma^G \rangle \models_{[u]} \Box B$.

Por otra parte supongamos que $\langle M^G/\Sigma, R^{**}, e_\Sigma^G \rangle \models_{[u]} \Box B$, y que $\langle M^G/\Sigma, R^*, e_\Sigma^G \rangle \not\models_{[u]} \Box B$. En tal caso, por el teorema de los filtrados, la fórmula $\Box B$ es falsa, en el modelo canónico, en u . Consideremos el conjunto

$$X = \{[v]: [u] \approx [v]\},$$

y un elemento $z \in M^G$ tal que $[z] \in X$ pero para cada $y \in M^G$ tal que zR^Gy $[y] \notin X$, que existe en virtud del lema anterior. Entonces, en el modelo canónico, $\Box B$ es falsa en z . La razón es la siguiente: si $[u] = [z]$, lo obtenemos por el teorema de los filtrados, y si $[u] \neq [z]$, entonces $[u]R^*[z]$ y $[z]R^*[u]$, y por tanto, en el caso de que $\Box B$ fuese verdadera en el modelo canónico en z , en el filtrado lo sería en $[z]$, y puesto que el filtrado es transitivo $\Box \Box B$ sería verdadera en $[z]$; entonces $\Box B$ sería verdadera, en el filtrado, en $[u]$, en contra de la suposición. Puesto que en el modelo canónico $\Box B$ es falsa en z , existe $w \in M^G$ tal que zR^Gw y B es falsa, en el modelo canónico, en w . Por tanto, en el filtrado, B es falsa en $[w]$. Ahora bien, puesto que zR^Gw , tenemos que $[w] \in X$, y así $[w] \neq [u]$, y además $[z]R^*[w]$. Por tanto, si $[z] = [u]$, $[u]R^*[w]$, y si $[u]R^*[z]$ y $[z]R^*[u]$, al ser R^* transitiva, también tenemos que $[u]R^*[w]$. Pero como $[w] \neq [u]$, tenemos que $[u]R^{**}[w]$. Por la hipótesis inductiva tenemos, al ser B falsa, en el modelo canónico, en w , que $\langle M^G/\Sigma, R^{**}, e_\Sigma^G \rangle \not\models_{[w]} B$, y por tanto que $\langle M^G/\Sigma, R^{**}, e_\Sigma^G \rangle \not\models_{[u]} \Box B$, en contra de la suposición. $\square$

TEOREMA 7.7: *La lógica GL tiene la propiedad de los marcos finitos.*

Prueba: Supongamos que A no es un teorema de GL. Consideremos el conjunto Σ de todas las subfórmulas de A . Consideremos un filtrado transitivo a través de Σ del modelo canónico de GL, $\langle M^G/\Sigma, R^*, e_\Sigma^G \rangle$. Puesto que A no es válida en el modelo canónico (no es teorema de GL), A no será válida en este filtrado. Por el lema anterior existe una relación R^{**} irreflexiva y transitiva incluida en R^* y para la que se cumple la condición (*) anterior. Por tanto A no es válida en $\langle M^G/\Sigma, R^{**}, e_\Sigma^G \rangle$. Ahora

bien, al ser finito el dominio de este modelo, R^{**} es inversamente bien fundada. Por tanto su marco es un GL-marco. Y, así, A no es válida en un GL-marco finito.■

COROLARIO 7.8: *La lógica GL es completa y decidible.*

Vamos a demostrar ahora que la lógica GL no es canónica.

Una lógica normal L tiene la *propiedad de la disyunción* si para cada n ocurre que si $A_0, \dots, A_n$ son fórmulas tales que $\vdash_L \Box A_0 \vee \dots \vee \Box A_n$ entonces existe algún $i \leq n$ tal que $\vdash_L A_i$.

Un marco $\langle M, R \rangle$ está *fuertemente generado* si existe $u \in M$ tal que para todo $v \in M$ uRv .

LEMA 7.9: *El marco canónico de toda lógica consistente L con la propiedad de la disyunción está fuertemente generado.*

Prueba: Consideremos el conjunto $\{\neg \Box A : A \text{ no es teorema de } L\}$. Este conjunto es L -consistente. En caso contrario existirían fórmulas $A_0, \dots, A_n$ que no son teoremas de L y tales que $\vdash_L (\neg \Box A_0 \wedge \dots \wedge \neg \Box A_n) \rightarrow \perp$. Entonces $\vdash_L \Box A_0 \vee \dots \vee \Box A_n$. Al tener L la propiedad de la disyunción, para algún $i \leq n$ $\vdash_L A_i$, y esto es absurdo. Consideremos un conjunto maximal y L -consistente Σ que incluya el conjunto $\{\neg \Box A : A \notin L\}$. Entonces para cada fórmula A , si $\Box A \in \Sigma$, A es un teorema de L . Así, puesto que L está incluida en todo conjunto maximal L -consistente, el conjunto $\{A : \Box A \in \Sigma\}$ está incluido en todo conjunto maximal L -consistente, y por tanto Σ está relacionado, en el modelo canónico, con todos los elementos del dominio de éste.■

PROPOSICIÓN 7.10: *La lógica GL tiene la propiedad de la disyunción.*

Prueba: Supongamos que $\vdash_{GL} \Box A_0 \vee \dots \vee \Box A_n$. Supongamos que para todo $i \leq n$ A_i no es un teorema de GL. Al ser GL completa tenemos que en tal caso para cada $i \leq n$ existe un modelo $\langle M_i, R_i, e_i \rangle$ cuyo marco es un GL-marco, y un índice $u_i \in M_i$ en el que es falsa A_i . Podemos suponer que los dominios M_i de los marcos son disjuntos dos a dos. Tomemos un objeto a tal que para cada $i \leq n$ $a \notin M_i$. Consideremos el modelo $\langle M, R, e \rangle$ en el que:

$$\begin{aligned} M &= \bigcup_{i \leq n} M_i \cup \{a\} \\ R &= \bigcup_{i \leq n} R_i \cup \{\langle a, u \rangle : u \in \bigcup_{i \leq n} M_i\} \\ e(p) &= \bigcup_{i \leq n} e_i(p). \end{aligned}$$

Al ser los conjuntos M_i disjuntos entre sí, R es transitiva e inversamente bien fundada. El submodelo de $\langle M, R, e \rangle$ generado por u_i es precisamente el submodelo de $\langle M_i, R_i, e_i \rangle$ generado por u_i . Por tanto en él A_i es falsa en u_i , con lo cual resulta que en $\langle M, R, e \rangle$ A_i es falsa en u_i . Puesto que aRu_i , en a es falsa $\Box A_i$. Por tanto en $\langle M, R, e \rangle$ la fórmula $\Box A_0 \vee \dots \vee \Box A_n$ es falsa en a . Pero esto es absurdo ya que $\langle M, R \rangle$ es un GL-marco. ■

COROLARIO 7.11: *La lógica GL no es canónica.*

Prueba: La lógica GL tiene la propiedad de la disyunción. Por tanto su marco canónico está fuertemente generado y, por consiguiente, la relación del mismo no es inversamente bien fundada. ■

LA LOGICA KH

La lógica KH es la lógica $K + H$ donde H es el axioma

$$\Box(\Box p \leftrightarrow p) \rightarrow \Box p.$$

Esta lógica está emparentada con la GL. La lógica KH es una lógica incompleta y GL es la menor lógica completa que incluye a la lógica KH. Para demostrarlo probaremos primero que $KH \subseteq GL$, luego que la fórmula $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ no es un teorema de KH y, por último, que los KH-marcos son precisamente los GL-marcos.

PROPOSICIÓN 7.12: $KH \subseteq GL$.

Prueba: El axioma H es un teorema de GL, pues $\vdash_{GL} (\Box p \leftrightarrow p) \rightarrow (\Box p \rightarrow p)$, y por tanto $\vdash_{GL} \Box(\Box p \leftrightarrow p) \rightarrow \Box(\Box p \rightarrow p)$. Por consiguiente $\vdash_{GL} \Box(\Box p \leftrightarrow p) \rightarrow \Box p$. ■

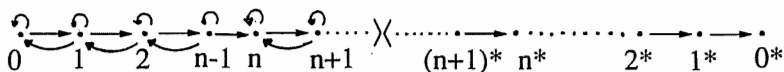
Para demostrar que la fórmula $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ no es un teorema de KH, obtendremos un modelo de KH en el que no es válida la fórmula $\Box p \rightarrow \Box \Box p$. De ello se sigue que la fórmula $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ no es un teorema de KH ya que todas las lógicas son completas respecto a modelos. Puesto que KH y GL tienen los mismos marcos, el marco del modelo no será un KH-marco. La prueba que damos se debe a M. J. Creswell (Creswell [1987]). Pasemos a definir el modelo.

Consideremos el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, y un

conjunto de la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, disjunto de $\mathbb{N}$. Supongamos que $*$ es una biyección entre ambos, de modo que $\mathbb{N}^* = \{n^* : n \in \mathbb{N}\}$. El dominio del modelo es el conjunto $M = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^*$. Llamemos a los elementos de $\mathbb{N}^*$ números naturales*. Vamos a definir una relación R en M de modo que los números naturales* queden ordenados según su orden natural inverso (por la relación de «mayor que»), los números naturales queden ordenados por la relación de «menor o igual», y además cada natural esté relacionado con su predecesor en el orden «menor que» (si lo tiene), y cada número natural esté relacionado con cada número natural*. La definición de R es pues la siguiente:

para cada $n^*, m^* \in \mathbb{N}^*$ $n^* R m^*$ si y sólo si $n > m$
 para cada $n, m \in \mathbb{N}$ $n R m$ si y sólo si $n \leq m$ o $n = m + 1$
 para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $m^* \in \mathbb{N}^*$ $n R m^*$.

El gráfico nos indica cómo es R :



Obviamente la relación R no es transitiva ($4R3$, $3R2$, pero no $4R2$). Por tanto el marco definido no es un GL-marco.

Refirámonos con $FC(M)$ al conjunto de todos los subconjuntos de M que son finitos o son cofinitos (tienen complemento finito). Esta colección de conjuntos está cerrada bajo intersecciones (finitas), uniones (finitas) y complementos.

Vamos a demostrar que:

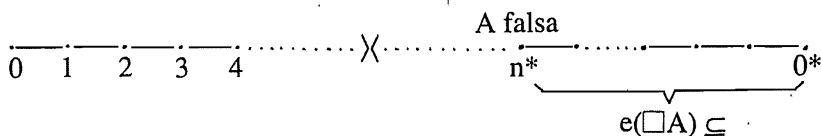
1. Toda asignación en el marco $\langle M, R \rangle$, e , que asigna a las letras sentenciales conjuntos de índices finitos o cofinitos ($e: \mathcal{P} \rightarrow FC(M)$) asigna a toda fórmula un conjunto de índices finito o cofinito.

2. Toda asignación en $\langle M, R \rangle$, $e: \mathcal{P} \rightarrow FC(M)$, es tal que, para toda fórmula A , la fórmula $\Box(\Box A \leftrightarrow A) \rightarrow \Box A$ es válida en el modelo $\langle M, R, e \rangle$.

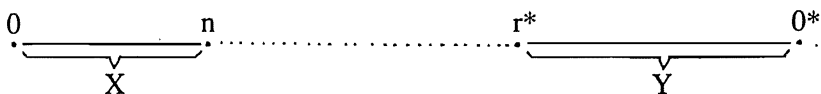
3. Existe una asignación en $\langle M, R \rangle$, $e : \mathcal{P} \rightarrow FC(M)$, tal que en el modelo $\langle M, R, e \rangle$ no es válida la fórmula $\Box p \rightarrow \Box \Box p$.

Prueba de 1: Supongamos que e es una asignación en $\langle M, R \rangle$ que asigna a cada letra sentencial un elemento de $FC(M)$. $e(\perp)$ es evidentemente un elemento de $FC(M)$. Puesto que $FC(M)$ está cerrado bajo uniones (finitas) y complementos, si $e(A)$ y $e(B)$ son elementos de $FC(M)$, lo es $e(A \rightarrow B)$. Por último, supongamos que $e(A)$ es finito o cofinito. Hay pues dos casos a considerar.

Caso 1: $e(A)$ es finito. En tal caso existe n^* tal que $n^* \notin e(A)$. Entonces $e(\Box A) \subseteq \{m^* : m \leq n\}$, y por tanto es finito.



Caso 2: $e(A)$ es cofinito. En tal caso existe n tal que para todo $m \geq n$, $m \in e(A)$, y existe r tal que para todo $m \geq r$, $m^* \in e(A)$. Sean n y r los números menores para los que esto ocurre. Consideremos los conjuntos siguientes: $X = \{m : m < n\}$ y $Y = \{m^* : m < r\}$. Si $Y = \emptyset$, tenemos que $M - (X \cup \{n\}) \subseteq e(\Box A)$, y por tanto este último conjunto es cofinito. Si $Y \neq \emptyset$, algún elemento de Y no pertenece a $e(A)$, por tanto $e(\Box A)$ es subconjunto de Y , y es pues finito.



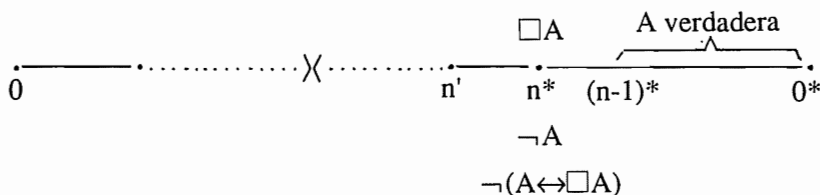
Prueba de 2: Supongamos que e es una asignación en $\langle M, R \rangle$ que asigna a cada letra sentencial un elemento de $FC(M)$. Supongamos que A es una fórmula tal que $\Box(\Box A \leftrightarrow A) \rightarrow \Box A$ no es válida en $\langle M, R, e \rangle$. Sea pues $u \in M$ tal que $\Box(\Box A \leftrightarrow A)$ es verdadera en u y $\Box A$ es falsa en u . Existe por tanto $u' \in M$ tal que $u Ru'$ y A es falsa en u' . Tenemos dos posibilidades:

a) $u' \in \mathbb{N}^*$. En cuyo caso sea n el menor natural tal que $uR n^*$ y A es falsa en n^* . Entonces en n^* es verdadera $\Box A$, con lo que en

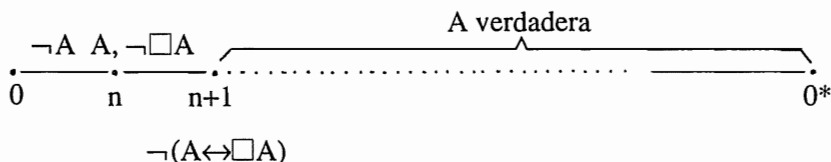
n^* es falsa la fórmula $\Box A \leftrightarrow A$. Por tanto en u es falsa $\Box(\Box A \leftrightarrow A)$, en contra de la suposición.

b) $u' \in \mathbb{N}$. En tal caso, si A es falsa en algún n^* , tomando el menor y razonando como en a) tenemos una contradicción. Supongamos pues que A es verdadera en todo natural*. Entonces $e(A)$ debe ser cofinito, y existe por tanto un mayor n tal que uRn y A es falsa en n . Entonces A es verdadera en $n+1$, pero como $n+1 Rn$, $\Box A$ es falsa en $n+1$. Por tanto $(\Box A \leftrightarrow A)$ es falsa en $n+1$. Ahora bien, $uRn+1$, de lo que se sigue que $\Box(\Box A \leftrightarrow A)$ es falsa en u , en contra de la suposición.

a)



b)



Prueba de 3: Sea e una asignación cualquiera en $\langle M, R \rangle$ que asigna a cada letra sentencial un elemento de $FC(M)$, y tal que

$$e(p) = M - \{0\}.$$

Entonces $\Box p$ es falsa en 1, al ser p falsa en 0. Y $\Box \Box p$ es falsa en 2, al ser $\Box p$ falsa en 1. Además $\Box p$ es verdadera en 2. Por tanto $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ es falsa en 2. ||

Por todo lo anterior tenemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 7.13: $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ no es un teorema de KH.

Puesto que la lógica KH está incluida en la GL, todo GL-marco es un KH-marco. Demostremos a continuación la inversa.

PROPOSICIÓN 7.14: *Un marco es un KH-marco si y sólo si es un GL-marco.*

Prueba: Un marco $\langle M, R \rangle$ es un GL-marco si y sólo si (Ver 4.15)
 (1) $\forall X \subseteq M \forall x \in M ((\forall y \in M)(xRy \rightarrow ((\forall z \in M)(yRz \rightarrow z \in X) \rightarrow y \in X)) \rightarrow (\forall y \in M)(xRy \rightarrow y \in X))$. (Pg. 64)

Un marco $\langle M, R \rangle$ es un KH-marco si y sólo si

(2) $\forall X \subseteq M \forall x \in M ((\forall y \in M)(xRy \rightarrow ((\forall z \in M)(yRz \rightarrow z \in X) \leftrightarrow y \in X)) \rightarrow (\forall y \in M)(xRy \rightarrow y \in X))$.

(2) implica (1). Para demostrarlo supongamos (2). Supongamos además que $X \subseteq M$, $x \in M$ y

$$(*) (\forall y \in M)(xRy \rightarrow ((\forall z \in M)(yRz \rightarrow z \in X) \rightarrow y \in X))$$

Veamos que $(\forall y \in M)(xRy \rightarrow y \in X)$. Para ello consideremos el conjunto

$$X' = \{u \in X : (\forall z \in M)(uR^*z \rightarrow z \in X)\}, \quad (*)$$

donde R^* es la relación ancestro de R , es decir, la transitivización de R . Entonces para X' ocurre que

$$(**) (\forall y \in M)(xRy \rightarrow ((\forall z \in M)(yRz \rightarrow z \in X') \leftrightarrow y \in X')).$$

Por tanto por (2) $(\forall y \in M)(xRy \rightarrow y \in X')$, y así $(\forall y \in M)(xRy \rightarrow y \in X)$. Para demostrar $(**)$ supongamos que xRy y que $(\forall z \in M)(yRz \rightarrow z \in X')$. Entonces $(\forall z \in M)(yRz \rightarrow z \in X)$, con lo que por $(*)$ obtenemos que $y \in X$. Además, si yR^*z , entonces, si yRz tenemos que $z \in X$, y si existen $x_1, \dots, x_n$ tales que $yRx_1, \dots, x_nRz$, tenemos que $x_1 \in X'$, y puesto que x_1R^*z , que $z \in X$. Por tanto $(\forall z \in M)(yR^*z \rightarrow z \in X)$. Por tanto $y \in X'$. Por otra parte, para demostrar el otro condicional, supongamos que $y \in X'$. Entonces $y \in X$ y $(\forall z \in M)(yR^*z \rightarrow z \in X)$. Si yRz , para obtener que $z \in X'$ tenemos que $z \in X$. Además, si zR^*u , entonces yR^*u , y por tanto $u \in X$. Por consiguiente tenemos que $(\forall u \in M)(zR^*u \rightarrow u \in X)$, y por tanto que $z \in X'$. Concluimos pues que $(\forall z \in M)(yRz \rightarrow z \in X')$. $\square$

(*) Endogénica, sólo relacionado con elementos de X .

PROPOSICIÓN 7.15 : *La lógica KH es incompleta.*

Prueba: La fórmula $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ no es un teorema de KH, pero sin embargo es válida en todo KH-marco, ya que es un teorema de GL. $\blacksquare$

LA LÓGICA VB

La lógica VB es la lógica KTM + $(\Diamond p \wedge \Box(p \rightarrow \Box p)) \rightarrow p$. Recordemos que T es el axioma $\Box p \rightarrow p$ y M el axioma $\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$. A esta lógica la llamamos VB en honor a Van Benthem, que es quien la ha estudiado (Van Benthem [1978] y [1984]). Es un ejemplo de lógica incompleta cuya clase de marcos puede definirse mediante una sentencia de primer orden. En esto se diferencia de la lógica KH, también incompleta, pero en la que su clase de marcos (los transitivos e inversamente bien fundados) no es definible en primer orden ni siquiera por un conjunto de sentencias,

Los VB-marcos son precisamente aquellos en que la relación es la identidad. La lógica Trivial es pues la menor lógica completa que extiende a la lógica VB.

Recordemos que los marcos en que es válida la fórmula $\Box p \rightarrow p$ son los marcos reflexivos.

Primero demostraremos que los VB-marcos son los marcos cuya relación es la identidad. Para ello necesitamos introducir cierta terminología y demostrar un lema intermedio. Luego demostraremos que VB es incompleta, demostrando que $p \rightarrow \Box p$ no es un teorema de VB.

Dado un marco $\langle M, R \rangle$, una *R-cadena* (finita) de longitud n ($n \geq 1$) es una sucesión finita de elementos de M , $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, tal que para cada $m \geq 1$, si $m < n$, $x_m R x_{m+1}$. Dado $x \in M$, un *R-sucesor* de x es todo elemento $y \in M$ tal que $x R y$.

PROPOSICIÓN 7.16: *Si $\langle M, R \rangle$ es un marco reflexivo, entonces la fórmula $(\Diamond p \wedge \Box(p \rightarrow \Box p)) \rightarrow p$ es válida en él si y sólo si para todo $x \in M$ y todo R-sucesor y de x , existe, para algún $n \geq 1$, una R-cadena $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ de R-sucesores de x tal que $y R x_1$ y $x_n R x$.*

Prueba: 1) Supongamos que $(\Diamond p \wedge \Box(p \rightarrow \Box p)) \rightarrow p$ es válida en $\langle M, R \rangle$. Sea $x \in M$. Supongamos que $x R y$. Si $y R x$, $\langle y \rangle$ verifica la condición que nos interesa. Si $y \not R x$, consideremos el conjunto X

$= \{v: \exists n \geq 1 \exists R\text{-cadena } \langle x_1, \dots, x_n \rangle \text{ de } R\text{-sucesores de } x \text{ tal que } yRx_1 \text{ y } x_nRv\}$. Basta ver que $x \in X$. Por la suposición que para X y x , en $\langle M, R \rangle$ vale que

$$(*) [\exists v(xRv \wedge v \in X) \wedge \forall z(xRz \wedge z \in X \rightarrow \forall u(zRu \rightarrow u \in X))] \rightarrow x \in X.$$

Puesto que xRy y yRy , $\langle y \rangle$ es una R -cadena de R -sucesores de x que cumple la condición que nos interesa. Por tanto $y \in X$, y $\exists v(xRv \wedge v \in X)$. Por otro lado, si xRz y $z \in X$ y zRu , consideremos una R -cadena $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ de R -sucesores de x tal que yRx_1 y x_nRz . Entonces la cadena $\langle x_1, \dots, x_n, z \rangle$ tiene las propiedades necesarias para que $u \in X$. Por tanto tenemos el otro componente del antecedente de $(*)$. Concluimos que $x \in X$.

2) Supongamos el consecuente del bicondicional de la proposición. Consideremos una asignación cualquiera en $\langle M, R \rangle$, e , y un elemento arbitrario de M , x . Supongamos que la fórmula $(\Diamond p \wedge \Box(p \rightarrow \Box p))$ es verdadera en x . Sea, pues, $u \in M$ tal que xRu y p es verdadera en u . Consideremos una R -cadena de R -sucesores de x , $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, tal que uRx_1 y x_nRx . Puesto que $\Box(p \rightarrow \Box p)$ es verdadera en x y p es verdadera en u , al tener que xRu , $\Box p$ es verdadera en u . Por tanto, siguiendo la R -cadena, $\Box p$ es verdadera en $x_1, \dots, x_n$, y por tanto, ya que x_nRx , p es verdadera en x . ■

PROPOSICIÓN 7.17: *Un marco $\langle M, R \rangle$ es un VB-marco si y sólo si R es la relación de identidad en M .*

Prueba: a) Si R es la relación de identidad en M , es fácil comprobar que el marco es un VB-marco. b) Supongamos que $\langle M, R \rangle$ es un VB-marco. Entonces R es reflexiva. Veamos además que $\forall x y \in M (xRy \rightarrow x = y)$. Para ello, dado $x \in M$, vamos a definir una asignación e que tendrá las propiedades siguientes:

- i) $\forall y \in M (xRy \rightarrow y \in e(p))$
- ii) $e(p) = \{x\}$.

De lo que se sigue lo deseado.

Para definir e , definamos para cada número natural n , $S_n(x)$ como sigue:

$$S_0(x) = \{x\}$$

$$S_1(x) = \{u \in M : xRu \wedge x \neq u \wedge uRx\}, \text{ y para } n > 1$$

$S_{n+1}(x) = \{u \in M : xRu \wedge x \neq u \wedge \exists \text{ R-cadena de R-sucesores de } x \text{ de longitud } n, \langle x_1, \dots, x_n \rangle, \text{ tal que } uRx_1, x_nRx, \text{ y no existe ninguna de longitud menor con esta propiedad, ni } uRx\}.$

Entonces : i) Los conjuntos $S_n(x)$ son disjuntos entre si. ii) Si $u \in S_{n+1}(x)$, existe un R-sucesor de u , v , elemento de $S_n(x)$.

Sea e cualquier asignación tal que $e(p) = \bigcup \{S_{2n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$.

Entonces:

a) $\Box \Diamond p$ es verdadera en x : Supongamos que xRy . Si $x = y$, $y \in S_0(x)$, por tanto p es verdadera en y , y puesto que yRy , $\Diamond p$ es verdadera en y . Si yRx , puesto que p es verdadera en x , $\Diamond p$ es verdadera en y . Si $x \neq y$ y yRx , en virtud de la proposición anterior, existe una R-cadena de R-sucesores de x , todos distintos de y , $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, tal que yRx_1 y x_nRx . Supongamos que la cadena es de la menor longitud. En tal caso $y \in S_{n+1}(x)$. Si n es impar, p es verdadera en y , y puesto que yRy , $\Diamond p$ es verdadera en y . Si n es par, existe un R-sucesor de y , v , elemento de $S_n(x)$ y, ya que n es par, p es verdadera en v , y por tanto $\Diamond p$ es verdadera en y .

b) $\Diamond \Box p$ es verdadera en x : En $\langle M, R \rangle$ es válida $\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$.

c) $\forall y \in M (xRy \rightarrow y \in e(p))$: Puesto que $\Diamond \Box p$ es verdadera en x , sea u tal que xRu y $\Box p$ es verdadera en u . Entonces $\forall y \in M (uRy \rightarrow y \in e(p))$. Por tanto, ya que uRu , tenemos que p es verdadera en u . Así, para algún n par $u \in S_n(x)$. Ahora bien, n debe ser 0, pues en caso contrario, al ser par, existiría $v \in S_{n-1}(x)$ R-sucesor de u , y por tanto p debería ser verdadera en v , y esto no es posible. Por tanto $u = x$, y $\forall y \in M (xRy \rightarrow y \in e(p))$.

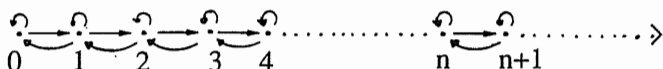
d) $e(p) = \{x\}$: Si p es verdadera en u y $u \neq x$, entonces $u \in S_n(x)$ para algún n par diferente de 0. En tal caso existe v tal que uRv y $v \in S_{n-1}(x)$. Por tanto xRv , con lo cual, por c), tenemos que p es verdadera en v , pero esto es imposible al ser $n-1$ impar. $\blacksquare$

Para demostrar que la fórmula $p \rightarrow \Box p$ no es un teorema de VB, definiremos un modelo de VB en el que no es válida la fórmula. Puesto que toda lógica es completa respecto a modelos podremos concluir lo deseado.

Consideremos el marco $\langle \mathbb{N}, R \rangle$, llamado *recession frame*, cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y R es la relación definida por:

$$nRm \text{ si y sólo si } n \leq m \text{ o } m = n-1,$$

y de gráfico:



Sea e una asignación en $\langle \mathbb{N}, R \rangle$ que a cada letra sentencial le asigna un conjunto finito o cofinito de números naturales. Entonces

i) e asigna a toda fórmula A un conjunto finito o cofinito de naturales.

ii) $\langle \mathbb{N}, R, e \rangle$ es un modelo de la lógica VB: a) Para toda fórmula A la fórmula $\Box A \rightarrow A$ es válida en el modelo puesto que la relación es reflexiva. b) Para toda fórmula A la fórmula $\Box \Diamond A \rightarrow \Diamond \Box A$ es válida en el modelo: Si $\Box \Diamond A$ es verdadera en n , entonces $\forall m (nRm \rightarrow \exists r (mRr \wedge r \in e(A)))$. Por tanto $e(A)$ es cofinito. En tal caso existe $m > n$ tal que $\forall s (mRs \rightarrow s \in e(A))$. Por tanto $\Diamond \Box A$ es verdadera en n . c) Para toda fórmula A , la fórmula $(\Diamond A \wedge \Box (A \rightarrow \Box A)) \rightarrow A$ es válida en el modelo: Si el antecedente es verdadero en n , $\Diamond A$ es verdadera en n . Sea pues m el menor número natural tal que nRm y A es verdadera en m . Si $m = n$, A es verdadera en n . Si $m \neq n$, puesto que $\forall r (nRr \wedge r \in e(A) \rightarrow \forall s (rRs \rightarrow s \in e(A)))$ y nRm tenemos que al ser A verdadera en m , $\forall s (mRs \rightarrow s \in e(A))$. Por tanto $e(A)$ es cofinito. Además, como que $mRm-1$, A es verdadera en $m-1$. Entonces tenemos que no $nRm-1$, pues en caso contrario m no sería el menor. Por tanto $m-1 < n$, y $m < n$, y por consiguiente mRn , y A es verdadera en n .

iii) La asignación e que asigna a toda letra sentencial distinta de p el conjunto $\mathbb{N}$ y a p el conjunto $\mathbb{N} - \{0\}$, es tal que en $\langle \mathbb{N}, R, e \rangle$, que es modelo de la lógica, p es verdadera en 1 y $\Box p$ es falsa en 1 (al ser p falsa en 0, y $1R0$). Por tanto $p \rightarrow \Box p$ es falsa en 1.

Por i), ii) y iii) tenemos que:

PROPOSICIÓN 7.19: *La lógica VB es incompleta.*

LAS LÓGICAS DE URQUHART

Vamos a estudiar una colección de lógicas, debidas a A. Urquhart (Urquhart [1981]), con las siguientes propiedades: Tienen la propiedad de los marcos finitos, son completas, canónicas, su clase de marcos es definible por un conjunto de fórmulas de primer orden, son recursivamente axiomatizables, pero no son decidibles. Por tanto en el teorema 6.1 que afirma que toda lógica finitamente axiomatizable con la p.ma.f. es decidible, no puede debilitarse la condición de la axiomatizabilidad finita.

Para cada conjunto X de números naturales recursivamente enumerable pero no recursivo y al que pertenece 1, la lógica de Urquhart asociada a X , a la que llamaremos U , tiene los siguientes axiomas:

- A.1 $\Box(\Diamond p \rightarrow \Box p)$
- A.2 $\Diamond(\Box \perp \wedge p) \rightarrow \Box(\Box \perp \rightarrow p)$
- A.3 $\Diamond(\Diamond T \wedge p) \rightarrow \Box(\Diamond T \rightarrow p)$
- A.4ⁿ $(\Diamond \Box \perp \wedge \Diamond \Diamond T) \rightarrow \Box^n \Diamond T$ para cada $n \in X$,

La lógica U es, por el teorema de Craig (teorema 2.4), recursivamente axiomatizable. Los axiomas corresponden, respectivamente, a las siguientes condiciones sobre la relación de los marcos, condiciones todas ellas expresables en primer orden:

- C.1 $\forall xyzw \in M (xRy \wedge yRz \wedge yRw \rightarrow z = w)$
- C.2 $\forall xyz \in M (xRy \wedge xRz \wedge y \text{ es punto final} \wedge z \text{ es punto final} \rightarrow z = y)$
- C.3 $\forall xyz \in M. (xRy \wedge xRz \wedge \text{ni } y \text{ ni } z \text{ son puntos finales} \rightarrow z = y)$
- C.4ⁿ $\forall xyz \in M (xRy \wedge xRz \wedge y \text{ es punto final} \wedge z \text{ no lo es} \rightarrow \forall w \in M (xR^n w \rightarrow w \text{ no es punto final}))$, para cada $n \in X$.

Así, para cada marco $\langle M, R \rangle$, $\langle M, R \rangle$ es un U -marco si y sólo si en él valen las condiciones C.1-C.4ⁿ ($n \in X$). El lector que haya realizado los ejercicios 4.8-11 sabe que esto es cierto, y el que no, puede comprobarlo.

No es difícil comprobar que la lógica U es canónica y, por tanto, completa. El lector puede demostrarlo como ejercicio.

Para llegar a demostrar que la lógica U tiene la p.ma.f., definamos los siguientes marcos:

Sea para cada $n \in \mathbb{N}$, $n^* = \{m : m < n\}$. Y sea w un objeto no perteneciente a $\mathbb{N}$. Definamos, para cada $n \neq 0$, los marcos

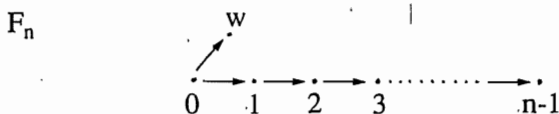
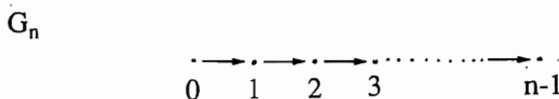
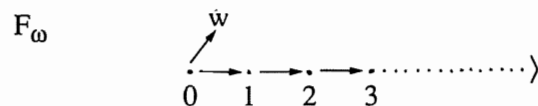
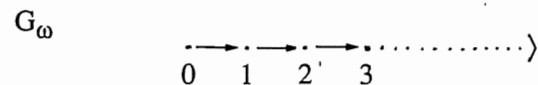
$$F_n = \langle n^* \cup \{w\}, R \rangle, \text{ con } R = \{\langle m, m+1 \rangle : m+1 < n\} \cup \{\langle 0, w \rangle\}$$

$$G_n = \langle n^*, S \rangle, \text{ con } S = \{\langle m, m+1 \rangle : m+1 < n\}$$

$$F_\omega = \langle \mathbb{N} \cup \{w\}, R \rangle, \text{ con } R = \{\langle m, m+1 \rangle : m \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle 0, w \rangle\}$$

$$G_\omega = \langle \mathbb{N}, S \rangle, \text{ con } S = \{\langle m, m+1 \rangle : m \in \mathbb{N}\}.$$

Sus diagramas, no transitivos, son los siguientes:



Observemos que:

i) Para cada $n \neq 0$, en G_n se cumplen las condiciones C.1, C.2, C.3, y para cada n , elemento o no de X , C.4ⁿ.

ii) Para cada $n > 2$, en F_n se cumplen las condiciones C.1, C.2, y C.3.

iii) Si $n \notin X$, en F_{n+1} se cumple la condición C.4^m para cada $m \in X$, pero no se cumple la condición C.4ⁿ, pues 0 tiene un R-sucesor que es un punto final y otro que no lo es, pero $0 R^n n$ y n es un punto final.

iv) En F_ω y G_ω se cumplen todas las condiciones C.1-4ⁿ para todo n tanto si n es elemento de X como si no lo es.

PROPOSICIÓN 7.20: *La lógica U tiene la propiedad de los marcos finitos.*

Prueba: Supongamos que A no es un teorema de U. Al ser U completa existen un U-marco $\langle M, R \rangle$, una asignación e en el mismo, y un índice $u \in M$, tales que A es falsa en u (en $\langle M, R, e \rangle$). Sea M_u el submodelo generado por u . Entonces en M_u A es falsa en u . Como que $\langle M, R \rangle$ es un U-marco, lo es el marco del modelo M_u . Si M_u es finito, ya hemos acabado. Si es infinito, pueden ocurrir dos cosas: a) Existe un único R-sucesor de u . En tal caso M_u es isomorfo a un modelo en el marco G_ω . b) Existe más de un R-sucesor de u . En tal caso existirán sólo dos, pues el marco de M_u es un U-marco, y uno de ellos será un punto final y el otro no. En tal caso M_u es isomorfo a un modelo en F_ω . Por tanto, o A es falsa en 0 en el modelo sobre F_ω , o lo es en el modelo sobre G_ω , ya que en modelos isomorfos son válidas las mismas fórmulas (el lector puede comprobarlo o esperar al capítulo 8). En cualquiera de los dos casos podemos escoger $m \notin X$, $m > 1$, tal que m sea mayor que el grado de A. Entonces A no será válida en G_{m+1} o no lo será en F_{m+1} (ver ejercicio 3.16). Por tanto A no será válida en un U-marco finito. ■

TEOREMA 7.21: *La lógica U es indecidible.*

Prueba: Para cada n , $A4^n$ es un teorema de U si y sólo si $n \in X$. Si $n \notin X$, puesto que en el U-marco F_{n+1} $A4^n$ no es válida (en este marco no se cumple la condición C.4ⁿ) y U es completa, $A4^n$ no es un teorema de U.

Si U fuese decidable, el conjunto X sería recursivo, pues es decidable de entre los teoremas de U cuáles son de la forma $A4^n$ para algún n . Pero X no es recursivo. ■

EJERCICIOS

7.1. Demostrar i) de la página 107.

7.2. Demostrar que la lógica U es canónica.

7.3. Demostrar i)-iv) de la página 109.

7.4. Consideremos la lógica $KT + \Box(\Box\Box p \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box p \rightarrow q)$, que también puede axiomatizarse como $KT + (\Box p \wedge q) \rightarrow \Diamond(\Box\Box p \wedge \Diamond q)$. A esta lógica G. E. Hughes y M. J. Creswell (Hughes y Creswell [1984]), la llaman lógica Mk^3 . Demostrar que el *reces-*

sion frame, el marco utilizado para demostrar que $p \rightarrow \Box p$ no es un teorema de la lógica que hemos llamado VB, es un marco para la lógica Mk^3 . Concluir que $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ no es un teorema de esta lógica.

7.5. Demostrar que en todo marco finito de la lógica del ejercicio anterior es válida la fórmula $\Box p \rightarrow \Box \Box p$. Para ello razonar por absurdo demostrando que en todo modelo $\langle M, R, e \rangle$ sobre un marco $\langle M, R \rangle$ para Mk^3 en el que no es válida la fórmula $\Box p \rightarrow \Box \Box p$, ocurre que para cada $n > 1$ el conjunto $e(\Box^{n+1}p)$ está incluido propiamente en el conjunto $e(\Box^n p)$. Concluir, usando el ejercicio 7.4, que la lógica Mk^3 no tiene la p.m.a.f.

7.6. Demostrar que un marco es un Mk^3 -marco si y sólo si su relación es reflexiva y verifica que:

$$(\forall u \in M) (\exists v \in M) (uRv \wedge vRu \wedge (\forall w \in M) (vR^2w \rightarrow uRw)).$$

Concluir que la clase de marcos de la lógica Mk^3 es definible en primer orden.

7.7. Demostrar que la lógica Mk^3 es canónica.

7.8. Demostrar que la lógica GL está caracterizada por la clase de los marcos que son órdenes parciales estrictos (irreflexivos) finitos.

7.9. Consideremos la lógica $K4.3W$ que es la lógica GL más el axioma $D1_0$: $\Box((p \wedge \Box p) \rightarrow q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \rightarrow p)$. Demostrar que esta lógica está caracterizada por los órdenes totales estrictos finitos. Recordar la proposición 4.9. Demostrar que esta lógica es decidable.

7.10. Demostrar que la lógica del ejercicio anterior es la lógica del marco $\langle \mathbb{N}, > \rangle$.

CAPÍTULO 8

P-MORFISMOS, UNIONES DISJUNTAS Y ULTRAPRODUCTOS

P-MORFISMOS

Dados dos marcos $\langle M, R \rangle$ y $\langle M', R' \rangle$, una función $h: M \rightarrow M'$ es un *p-morfismo* de $\langle M, R \rangle$ en $\langle M', R' \rangle$ si y sólo si:

- i) para cada $u, v \in M$, si uRv entonces $h(u)R'h(v)$.
- ii) para cada $u \in M$ y cada $w \in M'$, si $h(u)R'w$, entonces existe $v \in M$ tal que uRv y $h(v)=w$.

Dados dos modelos $\langle M, R, e \rangle$ y $\langle M', R', e' \rangle$, una función $h: M \rightarrow M'$ es un *p-morfismo* de $\langle M, R, e \rangle$ en $\langle M', R', e' \rangle$ si y sólo si:

- i) es un p-morfismo de $\langle M, R \rangle$ en $\langle M', R' \rangle$.
- ii) para cada letra sentencial p , $e(p) = \{u \in M: h(u) \in e'(p)\}$.

Diremos que h es un p-morfismo de $\langle M, R, e \rangle$ ($\langle M, R \rangle$) sobre $\langle M', R', e' \rangle$ ($\langle M', R' \rangle$) si es un p-morfismo y h es una función de M sobre M' , es decir, con recorrido M' .

TEOREMA 8.1 (del p-morfismo, Segerberg [1971]): *Si h es un p-morfismo de $\langle M, R, e \rangle$ en $\langle M', R', e' \rangle$, entonces para cada fórmula modal A y cada $u \in M$*

$$\langle M, R, e \rangle \models_u A \quad \text{si y sólo si} \quad \langle M', R', e' \rangle \models_{h(u)} A.$$

Prueba: Por inducción. Para el caso de las letras sentenciales se cumple por la definición de p-morfismo. Para el caso de $\perp$ es obvio. El único caso interesante es el caso de las fórmulas de tipo

□A. Supongamos, para demostrarlo en este último caso, que vale para A, es decir, que

$$e(A) = \{u \in M: h(u) \in e'(A)\}.$$

Tenemos pues que

$$u \in e(\Box A) \text{ si y sólo si } (\forall v \in M) (uRv \rightarrow v \in e(A))$$

si y sólo si

$$(\forall v \in M) (uRv \rightarrow h(v) \in e'(A)) \text{ (por hip. ind.).}$$

Ahora bien, esta última expresión equivale, al ser h un p-morfismo, a la siguiente $(\forall w \in M') (h(u)R'w \rightarrow w \in e'(A))$, lo que equivale a decir que $h(u) \in e'(\Box A)$.||

COROLARIO 8.2: Si h es un p-morfismo de $\langle M, R, e \rangle$ sobre $\langle M', R', e' \rangle$, entonces para toda fórmula modal A

$$\langle M, R, e \rangle \models A \text{ si y sólo si } \langle M', R', e' \rangle \models A.$$

h es suryeco

Prueba: El condicional de derecha a izquierda es una consecuencia inmediata del teorema del p-morfismo. Para demostrar el otro condicional supongamos que A es válida en $\langle M, R, e \rangle$ y que $u \in M'$. Al ser h una función de M sobre M', sea $v \in M$ tal que $h(v) = u$. Puesto que en $\langle M, R, e \rangle$ A es verdadera en v, por el teorema del p-morfismo tenemos que en $\langle M', R', e' \rangle$ A es verdadera en h(v).||

COROLARIO 8.3: Si h es un p-morfismo de $\langle M, R \rangle$ sobre $\langle M', R' \rangle$, entonces para toda fórmula modal A

$$\text{si } \langle M, R \rangle \models A \text{ entonces } \langle M', R' \rangle \models A.$$

Prueba: Supongamos que $\langle M, R \rangle \models A$. Sea e' una asignación en $\langle M', R' \rangle$. Consideremos la asignación e en $\langle M, R \rangle$ definida por: para cada letra sentencial p

$$e(p) = \{u \in M: h(u) \in e'(p)\}.$$

Claramente h es un p -morfismo de $\langle M, R, e \rangle$ sobre $\langle M', R', e' \rangle$. Por tanto, por el corolario anterior, y puesto que por suposición $\langle M, R, e \rangle \models A$, tenemos que $\langle M', R', e' \rangle \models A$. $\blacksquare$

Si existe un p -morfismo del marco $\langle M, R \rangle$ sobre el marco $\langle M', R' \rangle$ diremos que el marco $\langle M', R' \rangle$ es una *imagen p -mórfica* del marco $\langle M, R \rangle$. Así, el corolario 8.3 afirma que las fórmulas modales se preservan bajo imágenes p -mórficas de marcos.

OBSERVACIÓN: Si h es un p -morfismo inyectivo de $\langle M, R \rangle$ en $\langle M', R' \rangle$, entonces para todo $u, v \in M$ ocurre que

$$(*) \ uRv \text{ si y sólo si } h(u)R'h(v).$$

Diremos que una función que cumple la condición $(*)$ es un *homomorfismo* de $\langle M, R \rangle$ en $\langle M', R' \rangle$. Así, todo homomorfismo cuyo recorrido incluya el de R' es un p -morfismo, y todo p -morfismo inyectivo es un homomorfismo. Ahora bien, no todo p -morfismo es un homomorfismo. El lector puede buscar un ejemplo.

Dados dos marcos $\langle M, R \rangle$ y $\langle M', R' \rangle$, diremos que una función h de M en M' es un *isomorfismo* entre ambos si es una biyección que cumple la condición $(*)$. Todo isomorfismo es pues un p -morfismo. Además la función inversa de un isomorfismo es también un p -morfismo, lo que es fácil comprobar.

Diremos que dos marcos son *isomorfos* si existe un isomorfismo entre ambos.

PROPOSICIÓN 8.4: *Si dos marcos son isomorfos, son modalmente equivalentes, es decir, en ellos son válidas las mismas fórmulas modales, o, en otras palabras, poseen la misma lógica.*

Prueba: Si h es un isomorfismo entre dos marcos $\langle M, R \rangle$ y $\langle M', R' \rangle$, entonces, puesto que h es un p -morfismo de $\langle M, R \rangle$ sobre $\langle M', R' \rangle$ y h^{-1} un p -morfismo de $\langle M', R' \rangle$ sobre $\langle M, R \rangle$, por el corolario 8.3 tenemos lo deseado. $\blacksquare$

Utilizando los p -morfismos podemos dar otra prueba del hecho ya conocido de que no existe ninguna lógica modal normal cuyos marcos son precisamente los marcos con relación irreflexiva. La relación de un marco es irreflexiva si y sólo si el marco es un modelo de la sentencia de primer orden $\forall x \neg Rxx$. Esta senten-

cia no se preserva bajo imágenes p-morficas. Por ejemplo, $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ $\models \forall x \neg Rxx$ pero $\langle \{0\}, \{\langle 0,0 \rangle\} \rangle \not\models \forall x \neg Rxx$. Ahora bien este último marco es una imagen p-mórfica del primero por la función h de $\mathbb{N}$ sobre $\{0\}$ definida por $h(n) = 0$ para cada número natural n . Tenemos pues un ejemplo de una clase de marcos, los irreflexivos, caracterizables mediante una sentencia de primer orden, en el lenguaje de tipo $\{R\}$, pero que, sin embargo, no son la clase de marcos de ninguna lógica normal.

Si consideramos los dos marcos del párrafo anterior observaremos que en $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ no es válida la fórmula $\Box p \rightarrow p$, pero que esta fórmula es válida en el otro marco. Esta observación nos muestra que la inversa del corolario 8.3 no es cierta, puesto que el segundo marco es una imagen p-mórfica del primero.

Vamos a presentar ahora un resultado interesante, consecuencia de las proposiciones 5.17 y 5.18, pero para la prueba del cual no utilizaremos estas proposiciones sino que haremos uso de los p-morfismos y de los submarcos generados por índices, noción esta que hemos introducido en el capítulo 3, §4.

LEMA 8.5 (Makinson): *Para todo marco $\langle M, R \rangle$ ocurre que toda fórmula modal válida en él es válida en el marco $\langle \{0\}, \emptyset \rangle$ o que toda fórmula modal válida en él es válida en el marco $\langle \{0\}, \{\langle 0,0 \rangle\} \rangle$.*

Prueba: Dado un marco $\langle M, R \rangle$, ocurre que o tiene puntos finales, es decir, índices sin R-sucesores, o no tiene puntos finales (todo índice tiene un R-sucesor). Demostremos el lema considerando los dos casos por separado. Si el marco tiene puntos finales, sea u un punto final del mismo. Entonces el submarco generado por u es el marco $\langle \{u\}, \emptyset \rangle$. Puesto que las fórmulas modales se preservan bajo submarcos generados por índices, toda fórmula modal válida en $\langle M, R \rangle$ es válida en $\langle \{u\}, \emptyset \rangle$, y por tanto en el marco isomorfo $\langle \{0\}, \emptyset \rangle$.

Si el marco no tiene puntos finales, definamos la función h de M en $\{0\}$ mediante: $h(u) = 0$ para cada $u \in M$. Es fácil comprobar que h es un p-morfismo de $\langle M, R \rangle$ sobre $\langle \{0\}, \{\langle 0,0 \rangle\} \rangle$. Por tanto, por el corolario 8.3, toda fórmula válida en $\langle M, R \rangle$ es válida en $\langle \{0\}, \{\langle 0,0 \rangle\} \rangle$. ■

Recordemos que la lógica $K + \Box p$ es la llamada lógica Verum, y que la lógica $K + \Box p \rightarrow p$ es la llamada lógica Trivial. Sabemos

que los marcos para la lógica Verum son aquellos cuya relación es vacía, y los marcos para la lógica Trivial son aquellos cuya relación es la identidad. Ambas lógicas son canónicas y, por tanto, completas. Pero resulta que puede caracterizarse cada una de ellas por un marco muy simple.

PROPOSICION 8.6:

- i) La lógica $L(\langle\{0\}, \emptyset\rangle)$ es la lógica Verum.
- ii) La lógica $L(\langle\{0\}, \{\langle 0,0\rangle\}\rangle)$ es la lógica Trivial.

Prueba: Se deja como ejercicio para el lector. Debe utilizar submarcos generados por índices.■

SUBMARCOS Y SUBMARCOS GENERADOS

Un marco $\langle M, R \rangle$ es un *submarco* de un marco $\langle M', R' \rangle$ si y sólo si $M \subseteq M'$ y $R = R' \cap (M \times M)$.

Un marco $\langle M, R \rangle$ es un *submarco generado* de un marco $\langle M', R' \rangle$ si y sólo si es un submarco del mismo y además M está cerrado bajo R' -sucesores, es decir, para cada $u \in M$ y cada $v \in M'$, si $uR'v$, entonces $v \in M$.

Un modelo $\langle M, R, e \rangle$ es un *submodelo generado* de un modelo $\langle M', R', e' \rangle$ si y sólo si el marco $\langle M, R \rangle$ es un submarco generado del marco $\langle M', R' \rangle$ y además para cada letra sentencial p ocurre que $e(p) = e'(p) \cap M$.

Obsérvese que las nociones de submarco generado y de submodelo generado son generalizaciones de las nociones de submarco y submodelo generados por un índice presentadas en el capítulo 3, §4.

TEOREMA 8.7 (Segerberg, Feferman): Si $\langle M, R, e \rangle$ es un submodelo generado de $\langle M', R', e' \rangle$, entonces para toda fórmula modal A y todo $u \in M$

$$\langle M, R, e \rangle \models_u A \text{ si y sólo si } \langle M', R', e' \rangle \models_u A.$$

Prueba: Se deja al lector. Es esencialmente la misma que la del teorema 3.10.■

COROLARIO 8.9: Si $\langle M, R \rangle$ es un submarco generado del marco $\langle M', R' \rangle$, entonces para toda fórmula A :

$$\text{si } \langle M', R' \rangle \models A, \text{ entonces } \langle M, R \rangle \models A.$$

El corolario anterior afirma que las fórmulas modales se preservan bajo submarcos generados. No todas las propiedades de relaciones se preservan bajo submarcos generados. Por ejemplo, la propiedad de ser una relación no vacía no se preserva bajo submarcos generados puesto que el marco $\langle \{1\}, \emptyset \rangle$ es un submarco generado del marco $\langle \{0,1\}, \{\langle 0,1 \rangle\} \rangle$ en el que la relación es vacía. Por tanto no existe ninguna lógica cuyos marcos sean aquellos cuya relación es distinta del conjunto vacío. Puesto que la propiedad de que una relación no sea vacía es expresable en el lenguaje de primer orden de tipo $\{R\}$, tenemos otro ejemplo de una clase de marcos que no es la clase de marcos de ninguna lógica modal pero que, sin embargo, es la clase de los marcos que son modelos de una sentencia de primer orden de dicho lenguaje.

PROPOSICIÓN 8.10: Si h es un p -morfismo de $\langle M, R \rangle$, en $\langle M', R' \rangle$ entonces el marco $\langle h[M], R' \cap (h[M] \times h[M]) \rangle$ es un submarco generado de $\langle M', R' \rangle$.

Prueba: $h[M]$ está cerrado bajo R' -sucesores puesto que, h es un p -morfismo. ■

Dado un marco $\langle M, R \rangle$, sabemos que posee submarcos generados, los generados por sus índices. Además cada subconjunto X de M da lugar a un submarco generado de $\langle M, R \rangle$, a saber, el menor submarco generado de $\langle M, R \rangle$ que incluye a X , que es el marco con dominio

$$M' = U \{ Y \subseteq M : X \subseteq Y \text{ y } Y \text{ está cerrado bajo } R\text{-sucesores} \},$$

y relación $R' = R \cap (M' \times M')$. A tal marco se le conoce como el submarco generado por X . Si además consideramos una asignación e en $\langle M, R \rangle$, y consideramos la asignación e' en $\langle M', R' \rangle$ tal que para cada letra sentencial p , $e'(p) = e(p) \cap M$, al modelo $\langle M', R', e' \rangle$ se le conoce como el submodelo generado por X del modelo $\langle M, R, e \rangle$.

UNIONES DISJUNTAS

Consideremos una familia de marcos $\{\langle M_i, R_i \rangle : i \in I\}$. Queremos obtener un marco que tenga como dominio la unión de los dominios de los marcos de la familia y como relación la unión de las relaciones, pero que sea tal que, para cada marco $\langle M_i, R_i \rangle$ de la familia, cada elemento de M_i tenga las mismas propiedades modales en el nuevo marco que en el marco $\langle M_i, R_i \rangle$. Si algunos marcos de la familia tienen elementos en común, en la unión pueden aparecer nuevas conexiones entre elementos y puede que éstas impidan que se cumpla el objetivo señalado. Por ejemplo, un punto final podría dejar de serlo. Para evitar este problema consideraremos copias isomorfas de los marcos de la familia de modo que tengan dominios disjuntos dos a dos y tomaremos como nuevo marco la unión. Un modo sistemático de hacer todo esto es el siguiente: Consideremos la unión disjunta de los dominios de los marcos de la familia

$$M_{\oplus} = \bigcup \{M_i \times \{i\} : i \in I\}$$

y definamos para cada $i \in I$ la relación R_i' en $M_i \times \{i\}$ por

$$R_i' = \{\langle \langle u, i \rangle, \langle v, i \rangle \rangle : u R_i v\}$$

Claramente el marco $\langle M_i \times \{i\}, R_i' \rangle$ es isomorfo al marco $\langle M_i, R_i \rangle$. Definamos la relación $R_{\oplus}$ en $M_{\oplus}$ por

$$R_{\oplus} = \bigcup \{R_i' : i \in I\}$$

Definamos $\bigoplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle = \langle M_{\oplus}, R_{\oplus} \rangle$. Este marco es la *unión disjunta* de la familia de marcos $\{\langle M_i, R_i \rangle : i \in I\}$.

PROPOSICIÓN 8.11: Si $\{\langle M_i, R_i \rangle : i \in I\}$ es una familia de marcos, entonces para cada $i \in I$, el marco $\langle M_i \times \{i\}, R_i' \rangle$ es un sub-marco generado de la unión disjunta $\bigoplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle$.

Prueba: Obviamente $M_i \times \{i\} \subseteq M_{\oplus}$ y $R_i' = R_{\oplus} \cap ((M_i \times \{i\}) \times (M_i \times \{i\}))$. Además, si $\langle u, i \rangle R_{\oplus} \langle v, j \rangle$, resulta que $i = j$ y $u R_i v$, y por tanto $\langle u, i \rangle R_i' \langle v, j \rangle$, y $\langle v, j \rangle \in M_i \times \{i\}$. $\blacksquare$

TEOREMA 8.12: Para toda familia de marcos $\{\langle M_i, R_i \rangle : i \in I\}$ y toda fórmula modal A

$$\bigoplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle \models A \text{ si y sólo si para cada } i \in I \langle M_i, R_i \rangle \models A.$$

Prueba: Por el corolario 8.9 y la proposición 8.11 tenemos que toda fórmula válida en la unión disjunta será, para cada $i \in I$, válida en $\langle M_i \times \{i\}, R_i \rangle$, y por tanto en el marco isomorfo $\langle M_i, R_i \rangle$.

Por otra parte, si para cada $i \in I$ A es válida en $\langle M_i, R_i \rangle$, entonces para cada $i \in I$ A es válida en $\langle M_i \times \{i\}, R_i \rangle$. Supongamos que A no es válida en la unión disjunta $\bigoplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle$. Consideremos en tal caso una asignación e en este marco y un índice $\langle u, j \rangle$ tales que $\langle M_\oplus, R_\oplus, e \rangle \models_{\langle u, j \rangle} A$. Consideremos el modelo $\langle M_j \times \{j\}, R_j', e' \rangle$ donde para cada letra sentencial p , $e'(p) = e(p) \cap M_j \times \{j\}$. Este modelo es un submodelo generado de la unión disjunta. Por tanto, por el teorema 8.7 resulta que $\langle M_j \times \{j\}, R_j', e' \rangle \models_{\langle u, j \rangle} A$. Pero esto último contradice la suposición. ■

Tenemos pues que las fórmulas modales se preservan bajo uniones disjuntas. Podemos utilizar las uniones disjuntas para ver que no existe ninguna lógica normal cuyos marcos sean aquellos en los que la relación es la total (todo elemento está relacionado con todos). En los marcos $\langle \{0\}, \{\langle 0, 0 \rangle\} \rangle$ y $\langle \{1\}, \{\langle 1, 1 \rangle\} \rangle$ la relación es la total. Sin embargo, en su unión disjunta, que es (isomorfa a) $\langle \{0, 1\}, \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\} \rangle$, la relación no es la total. Tenemos pues otro ejemplo de una clase de marcos definible mediante una sentencia del lenguaje de primer orden de tipo $\{R\}$, $\forall x \forall y Rxy$ que, sin embargo, no es la clase de marcos de ninguna lógica modal.

PROPOSICIÓN 8.13: *Todo marco es la imagen p-mórfica de una unión disjunta de submarcos suyos generados por un índice.*

Prueba: Dado un marco $\langle M, R \rangle$, consideremos para cada $u \in M$ el submarco generado por u . Consideremos la unión disjunta de estos marcos. Entonces el marco $\langle M, R \rangle$ es una imagen p-mórfica de la misma. Los detalles se dejan como ejercicio. ■

PROPOSICIÓN 8.14: *Si C es una clase de marcos, entonces existe un marco $\langle M, R \rangle$ tal que $L(\langle M, R \rangle) = L(C)$. Así toda lógica completa está caracterizada por un solo marco.*

Prueba: Elijamos para cada fórmula $A \notin L(C)$ un marco $\langle M, R \rangle$ perteneciente a C en el que A no sea válida. Consideremos la unión disjunta de todos estos marcos. El marco así obtenido es un marco para la lógica $L(C)$ en el que sólo son válidos los teoremas de esta lógica. ■

ULTRAPRODUCTOS

Vamos a presentar ahora una construcción de marcos de uso muy frecuente en la teoría de modelos de la lógica de primer orden. La presentación será un tanto esquemática, y los resultados para los lenguajes de primer orden que necesitemos se van a enunciar sin dar sus demostraciones. Sólo demostraremos aquellos hechos específicos para los lenguajes modales sentenciales que nos interesan. El lector puede consultar los libros de Chang y Keisler [1973], capítulo 4, y Bell y Slomson [1969], capítulo 5.

Dada una familia de marcos $\langle \langle M_i, R_i \rangle : i \in I \rangle$ consideremos su producto cartesiano generalizado, $\Pi_{i \in I} M_i$, definido por:

$$\Pi_{i \in I} M_i = \{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i : \forall i \in I f(i) \in M_i \}.$$

Dado un ultrafiltro U sobre I , definamos la relación de equivalencia $\approx$ en $\Pi_{i \in I} M_i$ por

$$f \approx g \text{ si y sólo si } \{ i \in I : f(i) = g(i) \} \in U.$$

Denotemos por $[f]$ la clase de equivalencia determinada por f . Observemos que la relación $\approx$ es tal que, si $f \approx f'$ y $g \approx g'$ y $\{ i \in I : f(i) R_i g(i) \} \in U$, entonces $\{ i \in I : f'(i) R_i g'(i) \} \in U$. Ello nos permite definir una relación R en el conjunto cociente $\Pi_{i \in I} M_i / \approx$, por

$$[f] R [g] \text{ si y sólo si } \{ i \in I : f(i) R_i g(i) \} \in U.$$

El *ultraproducto* de la familia de marcos $\langle \langle M_i, R_i \rangle : i \in I \rangle$ respecto al ultrafiltro sobre I , U , es el marco $\Pi_U \langle M_i, R_i \rangle = \langle \Pi_{i \in I} M_i / \approx, R \rangle$.

TEOREMA 8.15 (de Łoś): Si $\langle \langle M_i, R_i \rangle : i \in I \rangle$ es una familia de marcos y U es un ultrafiltro sobre I , entonces para toda fórmula $\phi(x_0, \dots, x_n)$ del lenguaje de primer orden en tipo de semejanza $\{R\}$ y cada $f_0, \dots, f_n \in \Pi_{i \in I} M_i$, $\Pi_U \langle M_i, R_i \rangle \models \phi [f_0, \dots, f_n]$ si y sólo si $\{ i \in I : \langle M_i, R_i \rangle \models \phi [f_0(i), \dots, f_n(i)] \} \in U$.

COROLARIO 8.16: Si $\langle \langle M_i, R_i \rangle : i \in I \rangle$ es una familia de marcos y U es un ultrafiltro sobre I , y σ es una sentencia del lenguaje

de primer orden en tipo de semejanza $\{R\}$ tal que para todo $i \in I$ $\langle M_i, R_i \rangle \models \sigma$, entonces

$$\Pi_U \langle M_i, R_i \rangle \models \sigma.$$

Una *ultrapotencia* es un ultraproducto de una familia de marcos $\langle \langle M_i, R_i \rangle : i \in I \rangle$ tal que para cada $i, j \in I$ $\langle M_i, R_i \rangle = \langle M_j, R_j \rangle$. Por el corolario anterior tenemos que para cada marco $\langle M, R \rangle$ y cada conjunto no vacío I , si consideramos la familia de marcos $\langle \langle M_i, R_i \rangle : i \in I \rangle$ que para cada $i \in I$ $\langle M_i, R_i \rangle = \langle M, R \rangle$, entonces, para todo ultrafiltro U sobre I , la ultrapotencia $\Pi_U \langle M, R \rangle$ es elementalmente equivalente a $\langle M, R \rangle$.

Dada una familia de marcos $\langle \langle M_i, R_i \rangle : i \in I \rangle$, y dada, para cada $i \in I$, una asignación e_i en el marco $\langle M_i, R_i \rangle$, podemos definir para cada ultrafiltro U sobre I una asignación e en el ultraproducto $\Pi_U \langle M_i, R_i \rangle$ que para cada letra sentencial p

$$(*) \quad e(p) = \{ [f] : \{ i \in I : f(i) \in e_i(p) \} \in U \}.$$

Esta definición es independiente de los representantes elegidos, puesto que, si $[g] = [f]$ y $\{ i \in I : f(i) \in e_i(p) \} \in U$, entonces, puesto que el conjunto $\{ i \in I : f(i) = g(i) \}$ pertenece a U , la intersección de ambos conjuntos pertenece a U . Y esta intersección está incluida en $\{ i \in I : g(i) \in e_i(p) \}$. Por tanto este último conjunto pertenece a U .

TEOREMA 8.17 (de Łoś para lógica modal): *Para toda familia de marcos $\langle \langle M_i, R_i \rangle : i \in I \rangle$, toda familia $\langle e_i : i \in I \rangle$ de asignaciones tal que para cada $i \in I$, e_i es una asignación en $\langle M_i, R_i \rangle$, y todo ultrafiltro U sobre I , si e es la asignación en $\Pi_U \langle M_i, R_i \rangle$ definida en el párrafo anterior, entonces para toda fórmula A y toda $g \in \Pi_{i \in I} M_i$*

$$(*) \quad \langle \Pi_U \langle M_i, R_i \rangle, e \rangle \models_{[g]} A \text{ si y sólo si } \{ i \in I : g(i) \in e_i(A) \} \in U$$

Prueba: Por inducción. Por la definición de e , (*) vale para las letras sentenciales. Para la fórmula $\perp$ es inmediato. Si (*) vale para fórmulas A y B , no hay dificultad, utilizando las propiedades de los ultrafiltros, en comprobar que vale para $(A \rightarrow B)$. Demostremoslo para el caso de fórmulas de tipo $\Box A$.

Supongamos que (*) vale para A. Si $\langle \Pi_U \langle M_i, R_i \rangle, e \rangle \models_{[g]} \Box A$, tenemos que $\forall [g'] ([g]R[g'] \rightarrow [g'] \in e(A))$, con lo cual, por la hipótesis inductiva, obtenemos que

$$\forall [g'] ([g]R[g'] \rightarrow \{i \in I: g'(i) \in e_i(A)\} \in U).$$

Debemos demostrar que

$$\{i \in I: g(i) \in e_i(\Box A)\} \in U.$$

Resulta que

$$\begin{aligned} & \{i \in I: g(i) \in e_i(\Box A)\} = \\ & = \{i \in I: \forall u \in M_i (g(i)R_i u \rightarrow u \in e_i(A))\}. \end{aligned}$$

Supongamos que $\{i \in I: g(i) \in e_i(\Box A)\} \notin U$. En tal caso $\{i \in I: g(i) \notin e_i(\Box A)\}$ pertenece a U. Llamemos E a este conjunto. Elijamos para cada $i \in E$ un elemento u_i de M_i tal que $g(i)R_i u_i$ pero $u_i \notin e_i(A)$. Consideremos una función $f \in \prod_{i \in I} M_i$ tal que para cada $i \in I$ $f(i) = u_i$. Entonces

$$E \subseteq \{i \in I: g(i)R_i f(i)\}$$

Por tanto este último conjunto pertenece al ultrafiltro U, y $[g]R[f]$. Por tanto $\{i \in I: f(i) \in e_i(A)\} \in U$, pero este conjunto es disjunto de E y por tanto no pertenece a U, y esto es absurdo.

Por otra parte, si $\{i \in I: g(i) \in e_i(\Box A)\} \in U$ y $[g]R[g']$, entonces tenemos que $\{i \in I: g(i)R_i g'(i)\} \in U$, con lo cual obtenemos que

$$\{i \in I: g(i)R_i g'(i)\} \cap \{i \in I: g(i) \in e_i(\Box A)\} \in U,$$

pero este conjunto está incluido en $\{i \in I: g'(i) \in e_i(A)\}$, y por tanto este último conjunto pertenece también al ultrafiltro U, y por la hipótesis inductiva tenemos que $\langle \Pi_U \langle M_i, R_i \rangle, e \rangle \models_{[g']} A$. ■

COROLARIO 8.18: *Para toda familia de marcos $\langle \langle M_i, R_i \rangle: i \in I \rangle$, todo ultrafiltro U sobre I y toda fórmula modal A,*

si $\Pi_U \langle M_i, R_i \rangle \models A$ entonces $\{i \in I: \langle M_i, R_i \rangle \models A\} \in U$.

Prueba: Supongamos el antecedente y que $\{i \in I: \langle M_i, R_i \rangle \models A\} \notin U$. En tal caso $E = \{i \in I: \langle M_i, R_i \rangle \models A\} \in U$. Elijamos para cada $i \in E$, $u_i \in M_i$ y una asignación e_i en $\langle M_i, R_i \rangle$ tal que en $\langle M_i, R_i, e_i \rangle$ A es falsa en u_i . Sea f una función elemento de $\prod_{i \in I} M_i$ tal que para cada $i \in E$ $f(i) = u_i$. Sea e la asignación definida a partir de las asignaciones e_i por la condición (*) del párrafo anterior a 8.17. Entonces $\langle \prod_U \langle M_i, R_i \rangle, e \rangle \models_{[f]} A$ y, por el teorema, tenemos que el conjunto $\{i \in I: f(i) \in e_i(A)\}$ pertenece a U . Por tanto $\{i \in I: f(i) \notin e_i(A)\}$ no pertenece a U . Ahora bien $E \subseteq \{i \in I: f(i) \notin e_i(A)\}$, y por tanto este último conjunto pertenece a U . Y esto es absurdo. ■

La inversa del corolario 8.18 es falsa. Para la fórmula modal $\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$ existe una colección de marcos $\langle \langle M_n, R_n \rangle: n \in \mathbb{N} \rangle$ y un ultrafiltro no-principal sobre $\mathbb{N}$ tal que el conjunto de números naturales $\{n \in \mathbb{N}: \langle M_n, R_n \rangle \models \Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p\}$ pertenece al ultrafiltro pero, sin embargo, la fórmula no es válida en el ultraproducto.

LEMA 8.19 (Goldblatt): *Todo ultraproducto $\prod_U \langle M_i, R_i \rangle$ de una familia de marcos $\langle \langle M_i, R_i \rangle: i \in I \rangle$ es isomorfo a un submarco generado de la ultrapotencia $\prod_U (\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle)$.*

Prueba: Consideremos una familia de marcos $\langle \langle M_i, R_i \rangle: i \in I \rangle$ y un ultrafiltro U sobre I . Consideremos el ultraproducto de esta familia respecto a U , la unión disjunta $\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle$ y la ultrapotencia $\prod_U (\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle)$. Obsérvese que $\prod_U \langle M_i, R_i \rangle \cong \prod_U \langle M_i \times \{i\}, R_i' \rangle$ (donde R_i' es la relación utilizada en la definición de unión disjunta). Veamos que este último ultraproducto es isomorfo a un submarco generado de la ultrapotencia $\prod_U (\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle)$.

Puesto que $\prod_{i \in I} M_i \times \{i\} \subseteq \prod_{i \in I} (U \{M_i \times \{i\}: i \in I\})$, utilicemos $[.]$ para referirnos a las clases de equivalencia del ultraproducto $\prod_U \langle M_i \times \{i\}, R_i' \rangle$, y $[.]^*$ para referirnos a las clases de equivalencia de la ultrapotencia $\prod_U (\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle)$. Llamemos R^* a la relación de la ultrapotencia.

Consideremos el conjunto $M_1 = \{[g]^*: g \in \prod_{i \in I} M_i \times \{i\}\}$, y definamos la relación R_1 en M_1 como la restricción a M_1 de la relación de la ultrapotencia. El marco $\langle M_1, R_1 \rangle$ es un submarco generado de la ultrapotencia y es isomorfo al ultraproducto. Está claro que es un submarco. Para demostrar que es generado debemos ver que está cerrado bajo R^* -sucesores. Supongamos que $[g_1]^* R^* [g_2]^*$ y $[g_1]^* \in M_1$. Podemos suponer sin pérdida de gene-

alidad que $g_1 \in \prod_{i \in I} M_i \times \{i\}$. Para ver que $[g_2]^* \in M_1$ basta con encontrar $g_3 \in \prod_{i \in I} M_i \times \{i\}$ tal que $[g_3]^* = [g_2]^*$. Sea $g_3 \in \prod_{i \in I} M_i \times \{i\}$ tal que $g_3(i) = g_2(i)$, si $g_2(i) \in M_i \times \{i\}$, y $g_3(i) = \langle v_i, i \rangle$ en caso contrario, donde para cada $i \in I$, v_i es un elemento fijado de M_i . Pongamos $g_1(i) = \langle u, i \rangle$ con $u \in M_i$, y $g_2(i) = \langle v, j \rangle$, con $j \in I$ y $v \in M_j$ (ya que g_2 no tiene por qué ser un elemento de $\prod_{i \in I} M_i \times \{i\}$ j e i pueden ser en principio diferentes). Puesto que tenemos que $\langle u, i \rangle R_\oplus \langle v, j \rangle$, resulta que $i = j$ y $u R_i v$. Por lo tanto tenemos que $\{i \in I : g_1(i) R_\oplus g_2(i)\} \supseteq \{i \in I : g_2(i) \in M_i \times \{i\}\} = \{i \in I : g_2(i) = g_3(i)\}$. Por la suposición tenemos que $\{i \in I : g_1(i) R_\oplus g_2(i)\} \in U$. Por tanto, el conjunto $\{i \in I : g_2(i) = g_3(i)\} \in U$, y así $[g_3]^* = [g_2]^*$ y $[g_2]^* \in M_1$.

La función h del dominio del ultraproducto en el de la ultrapotencia tal que para cada $g \in \prod_{i \in I} M_i \times \{i\}$ $h([g]) = [g]^*$, es un isomorfismo entre el ultraproducto y el marco $\langle M_1, R_1 \rangle$. El lector puede comprobarlo sin dificultad. ▮

COROLARIO 8.20 (Lema de Goldblatt): *Toda clase de marcos cerrada bajo uniones disjuntas, submarcos generados, isomorfismos y ultrapotencias está cerrada bajo ultraproductos.*

Prueba: Inmediata por el lema anterior. ▮

EJERCICIOS

- 8.1. Demostrar el teorema 8.7.
- 8.2. Demostrar la proposición 8.13.
- 8.3. Demostrar el teorema 8.15 (de Łoś).
- 8.4. Completar la demostración de la proposición 8.19.
- 8.5. *Conexiones zigzag*: Dados dos modelos $\langle M_1, R_1, e_1 \rangle$ y $\langle M_2, R_2, e_2 \rangle$, una conexión zigzag del primero en el segundo es una relación $S \subseteq M_1 \times M_2$ tal que:
 - i) $\text{dom}(S) = M_1$ y $\text{rec}(S) = M_2$
 - ii) Si uSv , $u' \in M_1$ y uR_1u' , entonces existe $v' \in M_2$ tal que vR_2v' y $u'Sv'$ (condición zig).
 - iii) Si uSv , $v' \in M_2$ y vR_2v' , entonces existe $u' \in M_1$ tal que uR_1u' y $u'Sv'$ (condición zag).
 - iv) Si uSv , entonces para cada letra sentencial p , $u \in e_1(p)$ si y sólo si $v \in e_2(p)$.

Mostrar que: i) todo p-morfismo exhaustivo (o sobre) es una conexión zigzag. ii) Si S es una conexión zigzag de $\langle M_1, R_1, e_1 \rangle$ en $\langle M_2, R_2, e_2 \rangle$ entonces para todo índice $u \in M_1$ y todo índice $v \in M_2$ tal que uSv , ocurre que para toda fórmula modal A ,

$$\langle M_1, R_1, e_1 \rangle \models_u A \text{ si y sólo si } \langle M_2, R_2, e_2 \rangle \models_v A.$$

8.6. Demostrar que no existe ninguna lógica modal normal cuyos marcos son los marcos con dominio finito.

8.7. Demostrar que no existe ninguna lógica modal normal cuyos marcos son los marcos con dominio infinito.

8.8. Demostrar que, para cada número natural n , no existe ninguna lógica modal normal cuyos marcos son los marcos con exactamente n elementos.

Para los ejercicios que vienen a continuación necesitaremos las nociones siguientes:

Dado un marco $\langle M, R \rangle$ y un índice $u \in M$, decimos que un índice $v \in M$ es un *R-predecesor* de u si y sólo si vRu .

Un *árbol* es un marco $\langle M, R \rangle$ tal que:

- i) existe $u_0 \in M$ sin *R-predecesores*,
- ii) para cada $u \in M$ existe un número natural n tal que $u_0 R^n u$,
- iii) todo índice $u \in M$ diferente de u_0 tiene un único *R-predecesor*.

Observemos que un árbol es un marco irreflexivo e intransitivo (para cada $u, v, w \in M$ si uRv y vRw entonces no uRw).

Una *rama finita* en un árbol $\langle M, R \rangle$ es una función f de un segmento inicial propio no vacío del conjunto de los números naturales en M tal que para cada $n \in \text{dom}(f)$, si $n \neq 0$, $f(n-1)Rf(n)$, y el elemento máximo de $\text{dom}(f)$, m , es tal que $f(m)$ no tiene *R-sucesores*. Una *rama infinita* es una función f del conjunto de los números naturales en M tal que para cada número natural n , $f(n)Rf(n+1)$. Evidentemente todo árbol tiene ramas.

A todo árbol podemos asociarle un nuevo marco, el obtenido relacionando además cualquier índice consigo mismo. A los marcos obtenidos de este modo los llamaremos *árboles reflexivos*. De modo parecido, a todo árbol podemos asociarle un nuevo marco, aquel cuya relación es la menor relación transitiva que incluye a la relación del árbol. Los marcos obtenidos de este modo se llamarán *árboles transitivos*. Si la relación de un árbol transitivo la extende-

mos relacionando cada índice consigo mismo, obtenemos lo que llamaremos un *árbol reflexivo y transitivo*.

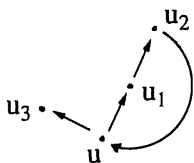
Decimos que un marco $\langle M, R \rangle$ está *generado por un índice* si existe un índice $u \in M$ tal que para todo $v \in M$ hay un número natural n tal que $uR^n v$.

Evidentemente todo submarco generado por un índice es un marco generado por un índice, y viceversa.

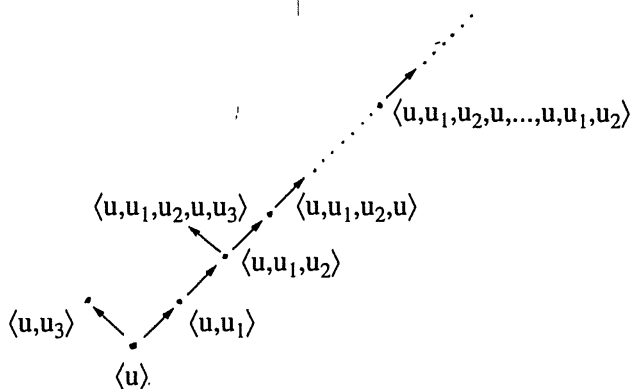
Dado un marco $\langle M, R \rangle$ generado por un índice, digamos u , consideremos el conjunto M^* de todas las sucesiones finitas y no vacías de elementos de M que empiezan por u , $\langle u, u_1, \dots, u_n \rangle$, y tales que para cada m con $1 \leq m < n$ $u_m R u_{m+1}$ y $u R u_1$. Definamos en este conjunto la relación R^* mediante:

$$\langle u, \dots, u_n \rangle R^* \langle u, \dots, u_n, u_{n+1} \rangle \text{ si y sólo si } u_n R u_{n+1}.$$

Veamos un ejemplo: Si $\langle M, R \rangle$ es el marco de diagrama



el marco $\langle M^*, R^* \rangle$ tiene por diagrama:



La técnica que acabamos de describir para obtener un marco a partir de un marco generado por un índice se conoce como la técnica del *desenmarañamiento* (*unravelling*). Se debe a H. Sahlqvist (H. Sahlqvist [1975]).

8.9. Dado un modelo $\langle M, R, e \rangle$ en un marco generado por u , $\langle M, R \rangle$, consideremos el marco obtenido por desenmarañamiento a partir de $\langle M, R \rangle$ y la asignación e^* definida en él por:

$$e^*(p) = \{ \langle u, \dots, v_n \rangle \in M^* : v_n \in e(p) \}.$$

Demostrar que para cada fórmula A ocurre que

$$e^*(A) = \{ \langle u, \dots, v_n \rangle \in M^* : v_n \in e(A) \}.$$

Y, por tanto, que en $\langle M, R, e \rangle$ y en $\langle M^*, R^*, e^* \rangle$ son válidas exactamente las mismas fórmulas modales.

8.10. Demostrar que el marco obtenido por desenmarañamiento a partir de un marco generado por un índice es un árbol.

8.11. Demostrar que todo marco generado por un índice es una imagen p-mórfica del marco obtenido por desenmarañamiento a partir de él, y por tanto imagen p-mórfica de un árbol.

8.12. Demostrar que la lógica K está caracterizada por la clase de los árboles. Concluir que no existe ninguna sentencia de primer orden en el lenguaje de tipo $\{R\}$ verdadera en todos los árboles y cuyos modelos sean precisamente los marcos de una lógica modal que extiende propiamente a K . Por tanto ni la asimetría, ni la anti-simetría, ni la intransitividad, ni la irreflexividad son propiedades que puedan caracterizar la clase de marcos de una lógica modal.

8.13. Demostrar que la lógica $K4$ está caracterizada por la clase de los árboles transitivos. Sug.: Utilizar la técnica del desenmarañamiento.

8.14. Demostrar que la lógica KT está caracterizada por la clase de los árboles reflexivos. Sug.: Utilizar la técnica del desenmarañamiento.

8.15. Demostrar que la lógica KD está caracterizada por la clase de los árboles con todas sus ramas infinitas.

8.16. Demostrar que la lógica $KT4$ está caracterizada por la clase de los árboles reflexivos y transitivos. Y que la lógica $KT4D$ lo está por la clase de los árboles transitivos y reflexivos

con todas sus ramas infinitas. Sug.: Utilizar la técnica del desenmarañamiento.

8.17. Demostrar que la lógica GL está caracterizada por la clase de los árboles transitivos finitos.

8.18. Demostrar que, para todo marco $\langle M, R \rangle$ y todo marco $\langle N, S \rangle$ con $M \subseteq N$, $\langle M, R \rangle$ es un submarco generado de $\langle N, S \rangle$ si y sólo si la función identidad i de M en N es un p-morfismo.

CAPÍTULO 9

CLASES DE MARCOS DEFINIBLES EN PRIMER ORDEN

En este capítulo, en el primer apartado, vamos a estudiar qué condiciones debe cumplir una clase de marcos caracterizada por una fórmula modal (es decir, cuyos elementos son todos los marcos en los que cierta fórmula modal es válida) para que sea definible mediante una sentencia o un conjunto de sentencias del lenguaje de primer orden con igualdad y un único relator diádico R . Después estudiaremos el mismo tipo de problema pero para las clases de marcos de lógicas modales normales cualesquiera. En un capítulo posterior estudiaremos el problema inverso.

En el segundo apartado probaremos el teorema de K. Fine, que afirma que toda lógica normal completa con su clase de marcos cerrada bajo equivalencia elemental es canónica.

1. Diremos que una clase de marcos C es una clase EC o *elemental* si y sólo si existe una sentencia de primer orden, σ , en el lenguaje de tipo de semejanza $\{R\}$ (R un relator diádico) tal que $C = \{\langle M, R \rangle : \langle M, R \rangle \models \sigma\}$.

Diremos que una clase de marcos C es una clase EC_Δ o Δ -*elemental* si y sólo si existe un conjunto Γ de sentencias de primer orden en el lenguaje de tipo de semejanza $\{R\}$ tal que $C = \{\langle M, R \rangle : \langle M, R \rangle \models \Gamma\}$.

Diremos que una clase de marcos C es una clase EC_Σ o Σ -*elemental* si y sólo si es una unión de clases elementales.

Diremos que una clase de marcos C es una clase $EC_{\Sigma\Delta}$ o $\Sigma\Delta$ -*elemental* si y sólo si es una unión de clases EC_Δ .

Dos marcos son *elementalmente equivalentes* si y sólo si en ellos son verdaderas exactamente las mismas sentencias del lenguaje de primer orden de tipo de semejanza $\{R\}$.

Una clase de marcos es definible por una fórmula modal, A , si es la clase de marcos de A , $C(A)$.

Recordemos que dos marcos isomorfos son elementalmente equivalentes y que todo marco es elementalmente equivalente a cualquier ultrapotencia de sí mismo.

En la terminología empleada, la letra griega Σ corresponde a la unión y la letra Δ a la intersección. Es fácil ver que una clase EC_{Δ} es la intersección de una colección de clases elementales. Podríamos en principio seguir definiendo nuevos tipos de clases, clases $\Delta\Sigma$, $\Delta\Sigma\Delta$, $\Sigma\Delta\Sigma\Delta$, etc. Ahora bien, como veremos a continuación, todas estas clases se reducen al caso $\Sigma\Delta$.

Todas las definiciones anteriores son un caso especial, para el lenguaje de primer orden con igualdad y un único relator diádico, de nociones que pueden definirse para todo lenguaje de primer orden. Los resultados de este capítulo que no mencionan fórmulas modales son completamente generales. Aunque formulados para el lenguaje que nos ocupa, valen para todo lenguaje de primer orden. El siguiente es uno de los de este tipo.

PROPOSICIÓN 9.1: *Una clase de marcos C es $EC_{\Sigma\Delta}$ si y sólo si está cerrada bajo equivalencia elemental.*

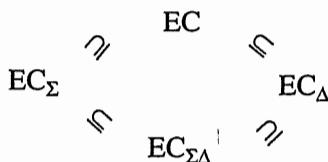
Prueba: Supongamos que C es una clase de marcos $EC_{\Sigma\Delta}$. Entonces C es una unión de clases EC_{Δ} . Las clases EC_{Δ} están cerradas bajo equivalencia elemental. Por tanto lo está también la clase C .

Por otra parte, si C es una clase de marcos cerrada bajo equivalencia elemental, sea para cada marco $\langle M, R \rangle$ perteneciente a C , $C(\langle M, R \rangle)$, la clase de todos aquellos marcos elementalmente equivalentes a $\langle M, R \rangle$. Entonces $C \subseteq \bigcup \{C(\langle M, R \rangle) : \langle M, R \rangle \in C\}$. Además, si $\langle M, R \rangle \in \bigcup \{C(\langle M, R \rangle) : \langle M, R \rangle \in C\}$, entonces $\langle M, R \rangle$ es elementalmente equivalente a algún $\langle M', R' \rangle \in C$, y por consiguiente $\langle M, R \rangle \in C$. Por tanto $C = \bigcup \{C(\langle M, R \rangle) : \langle M, R \rangle \in C\}$. Puesto que cada $C(\langle M, R \rangle)$ es una clase EC_{Δ} (es la clase de marcos modelo de la teoría de primer orden de $\langle M, R \rangle$), C es una clase $\Sigma\Delta$ -elemental. ■

Cualquier clase que definamos iterando uniones e intersecciones de, en último término, clases elementales es una clase cerrada bajo equivalencia elemental y por tanto $EC_{\Sigma\Delta}$.

Es obvio que toda clase elemental es Σ -elemental y Δ -elemental, y que toda clase EC_{Σ} es $EC_{\Sigma\Delta}$ y toda clase EC_{Δ} es $EC_{\Sigma\Delta}$. Además, toda clase $EC_{\Sigma\Delta}$ es $EC_{\Delta\Sigma}$, lo cual puede demostrarse ape-

lando a la ley distributiva para uniones (posiblemente infinitas) de intersecciones (posiblemente infinitas). De este modo es fácil ver que en general, para lenguajes de primer orden cualesquiera, una clase de estructuras definida iterando uniones e intersecciones de clases (posiblemente vacías) elementales, o es EC, o EC_{Δ} , o EC_{Σ} , o $EC_{\Sigma\Delta}$ y no hay más posibilidades. Tenemos pues la siguiente situación:



Para lenguajes de primer orden cualesquiera, las inclusiones en el otro sentido no son ciertas. Para cierto tipo de clases esta jerarquía puede reducirse. Las próximas proposiciones van a proporcionarnos la información necesaria. Primero enunciemos una serie de teoremas generales (valen para cualquier lenguaje de primer orden) que vamos a necesitar.

PROPOSICIÓN 9.2: *Si una clase de marco, es EC_{Δ} y EC_{Σ} es EC.*

Prueba: Supongamos que C es una clase de marcos EC_{Δ} y EC_{Σ} . Entonces su complemento es EC_{Δ} . Sean pues Γ_1 y Γ_2 conjuntos de sentencias tales que C es la clase de marcos modelo de Γ_1 y también es la clase de marcos que no son modelo de Γ_2 . Entonces el conjunto $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfactible. Por el teorema de compacidad existe un subconjunto finito, Δ , de este conjunto, insatisfactible. Sea σ_1 la conjunción de las sentencias pertenecientes a Δ que pertenecen a Γ_1 , y sea σ_2 la conjunción de las sentencias que pertenecen a Δ y a Γ_2 . Entonces C es la clase de marcos modelo de σ_1 . $\square$

TEOREMA 9.3: i) *Una clase de marcos es EC_{Δ} si y sólo si está cerrada bajo formación de ultraproductos y equivalencia elemental.*

ii) *Una clase de marcos es EC si y sólo si tanto ella como su complemento están cerrados bajo formación de ultraproductos y equivalencia elemental.*

Prueba: i) Si una clase de marcos es EC_{Δ} es inmediato que está cerrada bajo ultraproductos y equivalencia elemental. Por otra parte, supongamos que C es una clase de marcos cerrada bajo ultraproductos y equivalencia elemental. Consideremos el conjunto de sentencias

$$\Gamma = \{\sigma: \text{para todo } \langle M, R \rangle \in C \langle M, R \rangle \models \sigma\}.$$

Entonces $C = \{\langle M, R \rangle: \langle M, R \rangle \text{ es modelo de } \Gamma\}$. Demostrémoslo. Dada la definición de Γ , lo único que debemos demostrar es que todo modelo de Γ pertenece a C . Supongamos que $M = \langle M, R \rangle$ es un modelo de Γ . Consideremos la teoría de primer orden de M , $Th(M)$. Entonces:

a) $Th(M)$ es finitamente satisfactible en C (cualquier subconjunto finito de la misma tiene un modelo perteneciente a C): Si $\Delta = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ es un subconjunto finito de $Th(M)$ y no tiene ningún modelo en C , tenemos que la fórmula $(\neg\sigma_1 \vee \dots \vee \neg\sigma_n)$ pertenece a Γ , y por tanto alguna sentencia perteneciente a Δ es falsa en M , y esto es imposible.

b) M pertenece a C : Consideremos el conjunto

$$I = \{\Delta: \Delta \text{ es un subconjunto finito de } \Gamma\}$$

Escojamos para cada $\Delta \in I$, $M_{\Delta} \in C$ modelo de Δ , que existe por a). Consideremos para cada sentencia σ perteneciente a $Th(M)$, el subconjunto de I

$$\sigma^+ = \{\Delta \in I: \sigma \in \Delta\}.$$

Entonces, el conjunto $\{\sigma^+: \sigma \in Th(M)\}$ tiene la propiedad de las intersecciones finitas. Por el teorema del ultrafiltro existe un ultrafiltro, U , sobre I que incluye a dicho conjunto. Consideremos el ultraproducto de la familia de marcos $\{M_{\Delta}: \Delta \in I\}$ respecto al ultrafiltro U . Puesto que para cada $\sigma \in Th(M)$ $\sigma^+ \in U$, tenemos que cada $\sigma \in Th(M)$ es verdadera en el ultraproducto. Así, el ultraproducto y M son elementalmente equivalentes. Puesto que C está cerrada bajo ultraproductos y equivalencia elemental, M pertenece a C .

ii) Se sigue de i) y 9.2.1

TEOREMA 9.4 (Keisler, Shelah): *Dos marcos son elementalmente equivalentes si y sólo si poseen ultrapotencias isomorfas.*

Prueba: Ver Chang y Keisler [1973], teorema 6.1.15, p. 319.■

TEOREMA 9.5 (Keisler): i) *Una clase de marcos es EC_{Δ} si y sólo si está cerrada bajo formación de ultraproductos e imágenes isomorfas y su complemento lo está bajo la formación de ultrapotencias.*

ii) *Una clase de marcos es elemental si y sólo si tanto ella como su complemento están cerrados bajo formación de ultraproductos e imágenes isomorfas.*

Prueba: i) Usando los teoremas 9.4 y 9.3. ii) Por i) y 9.2. Se deja al lector la tarea de completar la prueba.■

PROPOSICIÓN 9.6: i) *Si una clase de marcos está definida por una sentencia universal de segundo orden en el lenguaje de tipo de semejanza $\{R\}$, y es EC_{Δ} , entonces es EC .*

ii) *Si una clase de marcos es $EC_{\Sigma\Delta}$ y está definida por una sentencia universal del lenguaje de segundo orden de tipo de semejanza $\{R\}$, entonces es EC_{Σ} .*

Prueba: Supongamos que C es una clase de marcos definida por una sentencia universal de segundo orden (sentencia Π_1^1) en el lenguaje de tipo de semejanza $\{R\}$. Por comodidad supongamos que únicamente tiene variables de segundo orden de conjunto. Supongamos que esta sentencia es $\forall X_1 \dots X_n \phi$, donde en ϕ no hay variables de conjunto cuantificadas. Supongamos además que la clase es EC_{Δ} . Sea Γ una colección de sentencias de primer orden tal que

$$C = \{ \langle M, R \rangle : \langle M, R \rangle \models \Gamma \}.$$

Entonces $\Gamma \models_2 \forall X_1 \dots X_n \phi$ ($\models_2$ indica consecuencia en segundo orden). Puesto que las variables $X_1, \dots, X_n$ no ocurren en las fórmulas de Γ , si las reemplazamos en ϕ por los símbolos de predicado $P_1, \dots, P_n$, y llamamos ϕ^* al resultado, tenemos que $\Gamma \models \phi^*$. Por el teorema de compacidad existe un conjunto de sentencias $\Delta \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Delta \models \phi^*$. Puesto que $P_1, \dots, P_n$ no ocurren en las fórmulas de Δ tenemos que $\Delta \models_2 \forall X_1 \dots X_n \phi$. Si σ es la conjunción de las sentencias pertenecientes a Δ , tenemos que

$$C = \{ \langle M, R \rangle : \langle M, R \rangle \models \sigma \},$$

y por tanto que es EC.

ii) Se deja como ejercicio para el lector. ▮

COROLARIO 9.7: *Toda clase de marcos EC_Δ definible por una fórmula modal es EC. Y toda clase de marcos $EC_{\Sigma\Delta}$ definible por una fórmula modal es EC_Σ .*

Prueba: Si C es definible por una fórmula modal lo es por una sentencia universal de segundo orden (ver capítulo 4). ▮

Por tanto, para clases de marcos caracterizadas por sentencias de segundo orden universales, la jerarquía anterior se convierte en:

EC

$\cap$

EC_Σ

Para clases de marcos definibles por fórmulas modales tenemos que estas dos posibilidades se reducen a una sola. Demostraremos que toda clase de marcos caracterizada por una fórmula modal que sea EC_Σ es EC. Puesto que toda clase de marcos que sea EC_Σ y EC_Δ es EC, bastará demostrar que toda clase de marcos caracterizada por una fórmula modal que sea EC_Σ es EC_Δ .

LEMA 9.8: *Toda clase de marcos $\Sigma\Delta$ -elemental, cerrada bajo submarcos generados y uniones disjuntas es EC_Δ .*

Prueba: Si C es $\Sigma\Delta$ -elemental está cerrada bajo equivalencia elemental, y por tanto bajo isomorfismos y ultrapotencias. Por tanto, por el lema de Goldblatt (Corolario 8.20), al estar cerrada bajo uniones disjuntas y submarcos generados, está cerrada bajo ultraprodutos. Además, puesto que el complementario de C está también cerrado bajo equivalencia elemental, lo está bajo ultrapotencias. Por tanto por el teorema 9.5 la clase C es EC_Δ . ▮

COROLARIO 9.9: *Toda clase de marcos EC_Σ que sea la clase de marcos de una lógica normal es EC.*

Prueba: Toda clase EC_{Σ} es $EC_{\Sigma\Delta}$. Y toda clase de marcos que sea la clase de marcos de una lógica normal está cerrada bajo submarcos generados y uniones disjuntas. Por tanto puede aplicarse el lema 9.8. Puesto que toda clase EC_{Σ} y EC_{Δ} es EC, tenemos lo deseado. $\square$

Para las clases de marcos caracterizadas por una fórmula modal sólo hay pues dos posibilidades, o son elementales o son esencialmente de orden superior, es decir, no son de ninguna manera definibles en términos de sentencias de primer orden del lenguaje en tipo de semejanza $\{R\}$. Para las clases de marcos de las lógicas normales no finitamente axiomatizables hay tres posibilidades, o son elementales, o Δ -elementales, o esencialmente de orden superior. El problema que inmediatamente se plantea es el de caracterizar aquellas fórmulas modales cuya clase de marcos asociada es elemental. La respuesta nos la proporcionan los teoremas 9.12 y 9.13, el primero debido a Goldblatt y el segundo a Van Benthem. El teorema de Goldblatt es básicamente un caso particular de un teorema para la lógica de segundo orden que demostraremos en primer lugar.

TEOREMA 9.10: *Toda clase de marcos caracterizada por una sentencia existencial de segundo orden (Σ_1^1) está cerrada bajo formación de ultraproductos.*

Prueba: Supongamos que C es una clase de marcos caracterizada por una sentencia existencial de segundo orden, $\exists X_1 \dots X_n \phi$ (en ϕ no hay ninguna variable de segundo orden cuantificada). Suponemos por comodidad que las variables de segundo orden que aparecen en la sentencia son variables de conjunto. Consideremos una familia cualquiera de marcos $\langle \langle M_i, R_i \rangle : i \in I \rangle$ y un ultrafiltro U sobre I . Sean, para cada $i \in I$, $X_1^i, \dots, X_n^i$ subconjuntos de M_i tales que $\langle M_i, R_i \rangle \models \phi [X_1^i, \dots, X_n^i]$. Sustituyamos en la fórmula ϕ las variables de conjunto $X_1, \dots, X_n$, por símbolos de predicado nuevos $Q_1, \dots, Q_n$ respectivamente. Sea ϕ'' la fórmula resultante. En el ultraproducto respecto a U de la familia de estructuras $\langle \langle M_i, R_i, X_1^i, \dots, X_n^i \rangle : i \in I \rangle$, la fórmula ϕ'' es verdadera. Por tanto, en dicho ultraproducto es verdadera la sentencia $\exists X_1 \dots X_n \phi$, y puesto que tal ultraproducto es una expansión del ultraproducto $\prod_U \langle M_i, R_i \rangle$, tenemos que la sentencia $\exists X_1 \dots X_n \phi$ es verdadera

(al no contener los signos $Q_1, \dots, Q_n$) en $\Pi_U \langle M_i, R_i \rangle$. Por tanto este ultraproducto pertenece a C .■

TEOREMA 9.11: *Una clase de marcos caracterizada por una sentencia universal de segundo orden es una clase elemental si y sólo si está cerrada bajo la formación de ultraproductos.*

Prueba: Si la clase es elemental, es inmediato, por el teorema de Łoś, que está cerrada bajo ultraproductos. Por otra parte, si está cerrada bajo la formación de ultraproductos, puesto que su complemento está caracterizado por una fórmula existencial de segundo orden (la clase lo está por una fórmula universal), está cerrado bajo la formación de ultraproductos. Además, puesto que la clase está caracterizada por una fórmula de segundo orden, tanto ella como su complemento están cerrados bajo isomorfismo. Por tanto, por el teorema 9.5 de Keisler, la clase es EC.■

TEOREMA 9.12 (Goldblatt): *La clase de marcos de una fórmula modal es elemental si y sólo si está cerrada bajo ultraproductos.*

Prueba: Se sigue del teorema anterior puesto que toda clase de marcos definible por una fórmula modal lo es por una fórmula universal de segundo orden (ver capítulo 4).■

TEOREMA 9.13 (Van Benthem): *La clase de marcos de una fórmula modal es elemental si y sólo si está cerrada bajo ultrapotencias.*

Prueba: Sea A una fórmula modal y $C(A)$ su clase de marcos asociada. Si $C(A)$ es elemental, está obviamente cerrada bajo equivalencia elemental y por tanto bajo ultrapotencias. Si $C(A)$ está cerrada bajo ultrapotencias, como, además, al estar caracterizada por una fórmula modal, está cerrada bajo submarcos generados, uniones disjuntas e imágenes isomorfas, por el lema de Goldblatt tenemos que está cerrada bajo ultraproductos. Por otra parte, el complemento de $C(A)$ está cerrado bajo ultraproductos, puesto que para cada familia $\langle \langle M_i, R_i \rangle : i \in I \rangle$ de marcos pertenecientes al complemento de $C(A)$, el conjunto $\{i \in I : \langle M_i, R_i \rangle \models A\}$, que es vacío, no pertenece a ningún ultrafiltro sobre I . Por tanto, puesto que tanto $C(A)$ como su complemento están cerrados bajo

isomorfismo, por el teorema de Keisler obtenemos que la clase $C(A)$ es elemental. $\square$

COROLARIO 9.14 (Van Benthem): *Para toda clase de marcos C definible por una fórmula modal los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i) C es EC .
- ii) C es EC_Σ .
- iii) C es EC_Δ .
- iv) C es $EC_{\Sigma\Delta}$.
- v) C está cerrada bajo ultraproductos.
- vi) C está cerrada bajo ultrapotencias.
- vii) C está cerrada bajo equivalencia elemental.

Prueba: Por los corolarios 9.9, 9.10 y 9.12 tenemos que los enunciados i)-iv) son equivalentes. El teorema de Goldblatt establece la equivalencia de i) y v); el teorema de Van Benthem, la de i) y vi). La proposición 9.1 nos dice que iv) y vii) son equivalentes. $\square$

Podemos plantearnos ahora el problema de caracterizar aquellas lógicas cuya clase de marcos es definible en primer orden. Lo primero que tenemos es una variante del teorema 9.13.

TEOREMA 9.15 (Goldblatt): *Para toda lógica normal L , la clase de marcos de L es EC_Δ si y sólo si está cerrada bajo ultraproductos.*

Prueba: Si la clase de L -marcos es EC_Δ , por el teorema de Los tenemos que está cerrada bajo ultraproductos. Por otra parte, supongamos que la clase de los L -marcos está cerrada bajo ultraproductos. Para demostrar que es EC_Δ utilicemos el teorema de Keisler (9.5 i)). Puesto que la clase en cuestión es la clase de marcos de una lógica, está cerrada bajo imágenes isomorfas. Veamos que su complemento está cerrado bajo ultrapotencias. Supongamos que $\mathbf{M}$ es un marco que no es un L -marco. Sea, pues, A un teorema de L que no es válido en $\mathbf{M}$. Por el corolario 8.18, A no es válida en ninguna ultrapotencia de $\mathbf{M}$. Por tanto ninguna ultrapotencia de $\mathbf{M}$ pertenece a la clase de los L -marcos. Por el teorema de Keisler, la clase de los L -marcos es EC_Δ . $\square$

COROLARIO 9.16 (Goldblatt): *Para toda lógica normal los siguientes enunciados acerca de su clase de marcos son equivalentes:*

- i) es EC_{Δ} ,
- ii) es $EC_{\Sigma\Delta}$,
- iii) está cerrada bajo ultraproductos,
- iv) está cerrada bajo ultrapotencias.

Prueba: Puesto que la clase de marcos de una lógica está cerrada bajo uniones disjuntas y submarcos generados, por el lema 9.8 tenemos la equivalencia entre i) y ii). El teorema anterior nos da la equivalencia entre i) y iii). Por último, claramente, i) implica iv). Por otro lado, iv) implica i), puesto que si la clase de marcos está cerrada bajo ultrapotencias, al estar cerrada bajo uniones disjuntas, submarcos generados e imágenes isomorfas, por el lema de Goldblatt (Corolario 8.20), está cerrada bajo ultraproductos. Por tanto por el teorema anterior es EC_{Δ} . $\square$

Este resultado no puede mejorarse. Existe una lógica cuya clase de marcos es EC_{Δ} pero no es EC. Y, por tanto, cuya clase de marcos no es la clase de marcos de ninguna fórmula modal. Veamos un ejemplo de lógica con estas propiedades debido a Van Benthem (Van Benthem [1976]).

Consideremos la lógica normal L con el siguiente conjunto de axiomas

$$\{\Diamond^n \Box \perp \rightarrow \Box^{n+1} \perp : n \geq 1\}$$

Entonces:

a) Para cada $n \geq 1$, $\Diamond^n \Box \perp \rightarrow \Box^{n+1} \perp$ es válida en un marco si y sólo si en él es verdadera la sentencia de primer orden

$$\forall x (\exists y (R^n xy \wedge \neg \exists z Ryz) \rightarrow \forall y (R^n xy \rightarrow \neg \exists z Ryz)).$$

b) La clase de los marcos modelo del conjunto de sentencias de primer orden

$$\Delta = \{ \forall x (\exists y (R^n xy \wedge \neg \exists z Ryz) \rightarrow \forall y (R^n xy \rightarrow \neg \exists z Ryz)) : n \geq 1 \},$$

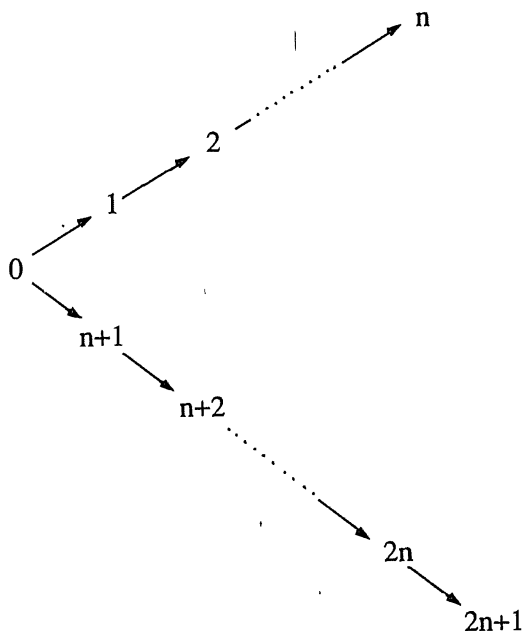
que es la clase de los L-marcos, no es EC.

El lector puede demostrar *a*). Para demostrar *b*), consideremos los marcos siguientes: Definamos para cada número natural $n \geq 1$, el marco $\langle M_n, R_n \rangle$ tal que:

$$M_n = \{m: m \leq 2n+1\}$$

$$R_n = \{\langle m, m+1 \rangle: 0 < m < n-1\} \cup \{\langle 0, n+1 \rangle\} \cup \{\langle m, m+1 \rangle: n+1 \leq m \leq 2n\}.$$

El diagrama de $\langle M_n, R_n \rangle$ es:



Es fácil ver que para cada $n \geq 1$ y cada $m \geq 1$ distinto de n

$$\langle M_n, R_n \rangle \models \forall x (\exists y (R^m_{xy} \wedge \neg \exists z R_{yz}) \rightarrow \forall y (R^m_{xy} \rightarrow \neg \exists z R_{yz}))$$

y

$$\langle M_n, R_n \rangle \models \forall x (\exists y (R^n_{xy} \wedge \neg \exists z R_{yz}) \rightarrow \forall y (R^n_{xy} \rightarrow \neg \exists z R_{yz})),$$

(la fórmula $\exists y (R^n xy \wedge \neg \exists z Ryz) \rightarrow \forall y (R^n xy \rightarrow \neg \exists z Ryz)$ no es satisfecha por 0).

Si la clase de marcos modelos de Δ fuese EC, sería definible mediante una sentencia de primer orden. Pero entonces lo sería, gracias al teorema de compacidad, por una conjunción finita de sentencias pertenecientes a Δ . Pero los modelos construidos nos muestran que esto es imposible.

El ejemplo anterior de Van Benthem permite obtener también un ejemplo de clase de marcos EC_Σ que no es EC. Para cada $n \geq 1$, refirámonos con ϕ_n a la sentencia

$$\forall x (\exists y (R^n xy \wedge \neg \exists z Ryz) \rightarrow \forall y (R^n xy \rightarrow \neg \exists z Ryz)).$$

Entonces la clase de marcos $\bigcup \{M(\phi_n): n \geq 1\}$, donde $M(\phi_n)$ es la clase de los marcos modelo de ϕ_n , es EC_Σ . Sin embargo no es EC. Si lo fuese, existiría una sentencia de primer orden σ que sería consecuencia de cada ϕ_n , y además su negación sería consecuencia del conjunto $\{\neg \phi_n: n \geq 1\}$. Por compacidad, $\neg \sigma$ sería consecuencia de $\{\neg \phi_1, \dots, \neg \phi_n\}$ para algún número n . Por tanto tendríamos que $\{\neg \phi_1, \dots, \neg \phi_n\} \models \neg \phi_{n+1}$. Ahora bien la unión disjunta de los marcos $\langle M_1, R_1 \rangle, \dots, \langle M_n, R_n \rangle$ es modelo de $\{\neg \phi_1, \dots, \neg \phi_n\}$ y de ϕ_{n+1} .

2. Vamos a demostrar en este apartado el teorema de K. Fine, que ya enunciamos en un capítulo anterior, y que afirma que toda lógica completa con su clase de marcos cerrada bajo equivalencia elemental es canónica. Las nociones que introduciremos y uno de los lemas nos permitirán entender mejor ciertas nociones del capítulo 12. Todo el contenido de este apartado se debe a K. Fine (K. Fine [1975]).

Debe tenerse en cuenta que nuestra noción de lógica canónica y la de K. Fine no coinciden. Toda lógica canónica en el sentido de K. Fine lo es en nuestro sentido, pero no a la inversa.

Dado un lenguaje modal $\mathcal{P}$ de cardinalidad κ , consideremos el lenguaje de primer orden asociado de tipo de semejanza $\rho_{\mathcal{P}}$ (ver capítulo 4). Se dice que una $\rho_{\mathcal{P}}$ -estructura $\langle M, R, \langle P_\alpha^M \rangle_{\alpha < \kappa} \rangle$ es ω -saturada si para cada número natural n , cada conjunto de fórmulas Δ cuyas variables libres están entre $x_0, \dots, x_n$, y cada $a_1, \dots,$

$a_n \in M$, ocurre que el conjunto de fórmulas en el lenguaje que obtenemos al añadir las constantes nuevas $a_1, \dots, a_n$

$$\Delta' = \{ \phi(x_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) : \phi(x_0, \dots, x_n) \in \Delta \},$$

si es finitamente satisfactible en $\langle M, R, \langle P_\alpha^M \rangle_{\alpha < \kappa}, a_1, \dots, a_n \rangle$, es también satisfactible. Nos van a interesar de hecho sólo estructuras 2-saturadas, es decir, tales que lo que afirma la definición anterior se cumple para conjuntos de fórmulas con a lo sumo dos variables libres.

El siguiente es un teorema conocido de la teoría de modelos de la lógica de primer orden

TEOREMA 9.17: *Toda estructura $\langle M, R, \langle P_\alpha^M \rangle_{\alpha < \kappa} \rangle$ posee una extensión elemental ω -saturada.*

Diremos que una fórmula modal es *satisfactible* en un modelo si es verdadera en un índice del modelo.

Diremos que un conjunto de fórmulas modales es *satisfecho por un índice* u de un modelo si y sólo si toda fórmula del conjunto es verdadera en u .

Diremos que un conjunto de fórmulas modales es *satisfactible* en un modelo si y sólo si existe un índice del modelo en el que es verdadera toda fórmula del conjunto.

Diremos que un conjunto de fórmulas modales es *finitamente satisfactible* en un modelo si y sólo si todo subconjunto finito del mismo es satisfactible en el modelo.

Un modelo $\langle M, R, e \rangle$ es *modalmente 1-saturado* si y sólo si todo conjunto de fórmulas modales finitamente satisfactible en el mismo es satisfactible en él.

Un modelo $\langle M, R, e \rangle$ es *modalmente 2-saturado* si y sólo si para todo $u \in M$ y para todo conjunto Δ de fórmulas modales tal que para cada subconjunto finito Σ de Δ existe $w \in M$ tal que w satisface Σ y uRw , existe un índice $v \in M$ tal que uRv y en el que es satisfecho el conjunto Δ .

Un modelo $\langle M, R, e \rangle$ es *modalmente saturado* si y sólo si es modalmente 1-saturado y modalmente 2-saturado.

LEMA 9.18: *Todo modelo 2-saturado es modalmente saturado.*

Prueba: Supongamos que $M = \langle M, R, \langle P_{\alpha}^M \rangle_{\alpha < \kappa} \rangle$ es 2-saturado. Entonces:

a) M es modalmente 1-saturado: Sea Δ un conjunto de fórmulas modales finitamente satisfactible en M (recordemos que toda p_p -estructura puede verse como un modelo modal). Consideremos el conjunto de fórmulas $\{A^*(x_0): A \in \Delta\}$ ($A^*(x_0)$ es la traducción de A al lenguaje de primer orden de tipo p_p). Este conjunto es finitamente satisfactible en M , y por tanto (M es 2-saturado) satisfactible en M , digamos por $u \in M$. Entonces toda fórmula de Δ es verdadera en u , y por tanto Δ es satisfactible en M .

b) M es modalmente 2-saturado: Sea $u \in M$. Supongamos que Δ es un conjunto de fórmulas modales tal que para cada subconjunto finito del mismo existe un índice $w \in M$ tal que satisface el conjunto y uRw . Entonces el conjunto de fórmulas de primer orden

$$\{R\bar{u}x_0\} \cup \{A^*(x_0): A_0 \in \Delta\}$$

es finitamente satisfactible en $\langle M, R, \langle P_{\alpha}^M \rangle_{\alpha < \kappa}, u \rangle$, y al ser M 2-saturado, es satisfactible en $\langle M, R, \langle P_{\alpha}^M \rangle_{\alpha < \kappa}, u \rangle$. Supongamos que es satisfecho por v . Entonces uRv , y Δ es satisfecho por v . $\square$

Dado un modelo $\langle M, R, e \rangle$, la teoría modal del mismo es el conjunto de fórmulas:

$$T_m(\langle M, R, e \rangle) = \{A: A \text{ es válida en } \langle M, R, e \rangle\}.$$

LEMA 9.19: *Para todo modelo modalmente saturado $M = \langle M, R, e \rangle$ existe un p -morfismo del marco $\langle M, R \rangle$ en el marco del modelo canónico de la lógica $L(\langle M, R \rangle)$ tal que su recorrido es el conjunto de los conjuntos maximales y $L(\langle M, R \rangle)$ -consistentes que incluyen a la teoría modal de M .*

Prueba: Definamos la función f de M en el dominio del modelo canónico M_L de la lógica $L = L(\langle M, R \rangle)$, por:

$$\text{para cada } u \in M, f(u) = \{A: u \in e(A)\}.$$

Esta función está bien definida pues para cada $u \in M$ el conjunto $\{A: u \in e(A)\}$ es un conjunto maximal $L(\langle M, R \rangle)$ -consistente que incluye a $T_m(M)$. Veamos que es el p -morfismo buscado.

a) El recorrido de f es el conjunto de los conjuntos maximales y $L(\langle M, R \rangle)$ -consistentes que extienden a $T_m(M)$: Supongamos que Σ es uno de estos conjuntos. Entonces Σ es finitamente satisfactible en M . Si no lo fuese, al estar cerrado bajo conjunciones, existiría una fórmula $A \in \Sigma$ falsa en todo índice $u \in M$, y entonces $\neg A \in \Sigma$, y Σ no sería consistente. Puesto que M es modalmente saturado Σ es satisfactible en M , digamos por $v \in M$. Entonces $f(v) = \Sigma$.

b) Es un p -morfismo: i) si uRv , entonces $f(u)R_L f(v)$, pues para toda fórmula A , si $\Box A \in f(u)$, $u \in e(\Box A)$, con lo que $v \in e(A)$, y por tanto $A \in f(v)$. ii) si $f(u)R_L \Sigma$, tenemos que $\{\Diamond A: A \in \Sigma\} \supseteq f(u)$. Por tanto, puesto que Σ está cerrado bajo conjunciones, todo subconjunto finito de Σ es satisfactible en algún índice w tal que uRw . Al ser M modalmente saturado, existe $v \in M$ tal que uRv y Σ es satisfecho por v . Entonces $f(v) = \Sigma$. $\square$

TEOREMA 9.20 (K. Fine): *Si L es una lógica normal completa y su clase de marcos está cerrada bajo equivalencia elemental, entonces es canónica.*

Prueba: Por comodidad supongamos que el lenguaje de L es numerable. Para otras cardinalidades la prueba es similar. Sea $\{A_n: n \in \omega\}$ una enumeración de las fórmulas que no son teoremas de L . Entonces, al ser L completa, existe para cada n un L -marco $\langle M_n, R_n \rangle$, una asignación en él e_n , y un índice $u_n \in M_n$ tales que A_n es falsa en u_n . Consideremos la unión disjunta de los modelos $\langle M_n, R_n, e_n \rangle$. Llamémosla M . Entonces el marco de la unión disjunta es un L -marco, y $T_m(M) = L$, pues todas las fórmulas que no son teoremas de L son falsas en algún índice de M . Por tanto la lógica del marco de la unión disjunta es L . Sea ahora M' una extensión elemental ω -saturada de M . Puesto que la clase de los L -marcos está cerrada bajo equivalencia elemental, M' es un L -marco. Por otro lado, M y M' tienen la misma teoría modal al ser elementalmente equivalentes en el lenguaje de primer orden de tipo de semejanza ρ_P (donde P es el lenguaje de L). Por el lema 9.19 existe un p -morfismo f del marco de M' en el marco del modelo canónico de la lógica del marco de M , a saber L , cuyo recorrido es el conjunto de todos los conjuntos de fórmulas maximales y L -consistentes que incluyen a la teoría modal de M . Pero puesto que la teoría modal de M es L , todo conjunto maximal L -consistente incluye a la teoría modal de M , y de este modo f es un p -

morfismo del marco de $\mathbf{M}'$ sobre el marco del modelo canónico de L . Por tanto, puesto que el marco de $\mathbf{M}'$ es un L -marco, lo es el marco del modelo canónico de L (las fórmulas modales se preservan bajo imágenes p-mórficas). L es pues canónica. $\blacksquare$

3. Vamos a estudiar en este apartado un ejemplo de lógica finitamente axiomatizable, canónica, completa, pero cuya clase de marcos no es elemental. El ejemplo se debe a Kit Fine (K. Fine [1975]).

La lógica que estudiaremos tiene por axioma la fórmula

$$\Diamond\Box p \rightarrow (\Diamond\Box(p \wedge q) \vee \Diamond\Box(p \wedge \neg q)).$$

Vamos a llamar a esta lógica KF , en honor de K. Fine. Para demostrar que es canónica necesitamos algunos lemas previos.

Dado un conjunto cualquiera de fórmulas modales Δ , refirámonos con $\wedge\Delta$ a la clausura de Δ bajo conjunciones. Con $\Box\Delta$ al conjunto $\{\Box A : A \in \Delta\}$. Y con $\Diamond\Delta$ al conjunto $\{\Diamond A : A \in \Delta\}$.

LEMA 9.21: *Para todo conjunto Σ de fórmulas modales maximal KF -consistente, toda fórmula B , y todo conjunto no vacío de fórmulas Δ , si el conjunto $\Diamond\Box\wedge\Delta \subseteq \Sigma$, entonces*

$$\Diamond\Box\wedge(\Delta \cup \{B\}) \subseteq \Sigma \quad o \quad \Diamond\Box\wedge(\Delta \cup \{\neg B\}) \subseteq \Sigma.$$

Prueba: Supongamos que $\Diamond\Box\wedge\Delta \subseteq \Sigma$. Supongamos además que el conjunto $\Diamond\Box\wedge(\Delta \cup \{B\})$ no es un subconjunto de Σ . En tal caso, o $\Diamond\Box B \notin \Sigma$, o existe algún n y $A_1, \dots, A_n \in \Delta$ tales que $\Diamond\Box(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge B) \notin \Sigma$. Supongamos que se da el primer caso. Entonces, si A es una conjunción de fórmulas pertenecientes a Δ , tenemos que $\Diamond\Box(A \wedge B) \notin \Sigma$, pues en caso contrario, puesto que la fórmula $\Diamond\Box(A \wedge B) \rightarrow \Diamond\Box B$ es un teorema de la lógica K , $\Diamond\Box B$ pertenecería a Σ . Como que $\Diamond\Box A \in \Sigma$ (por la suposición), tenemos por el axioma de KF que $\Diamond\Box(A \wedge B) \vee \Diamond\Box(A \wedge \neg B) \in \Sigma$. Por tanto $\Diamond\Box(A \wedge \neg B) \in \Sigma$. Por tanto, en el primer caso tenemos que $\Diamond\Box\wedge(\Delta \cup \{\neg B\}) \subseteq \Sigma$. En el segundo caso podemos razonar de modo parecido. $\blacksquare$

LEMA 9.22: Si $\{\Delta_i: i \in I\}$ es una colección de conjuntos de fórmulas ordenado totalmente por inclusión, entonces todo conjunto de fórmulas Σ con la propiedad de que para cada $i \in I$ el conjunto $\Diamond \Box \wedge \Delta_i \subseteq \Sigma$, verifica que

$$\Diamond \Box \wedge (\bigcup_{i \in I} \Delta_i) \subseteq \Sigma.$$

Prueba: Es obvio. $\blacksquare$

LEMA 9.23: Todo marco $\langle M, R \rangle$ que verifique la condición

(*) $\forall xy \in M (xRy \rightarrow \exists z \in M (xRz \wedge \forall uv \in M (zRu \wedge zRv \rightarrow u = v \wedge yRv)))$ es un KF-marco.

Prueba: Supongamos que $\langle M, R \rangle$ es un marco que verifica la condición (*). Supongamos que e es una asignación en $\langle M, R \rangle$. Supongamos además que $\Diamond \Box p$ es verdadera en u y que el consecuente del axioma de KF es falso en u (todo ello para la asignación e). Puesto que $\Diamond \Box p$ es verdadera en u , sea v tal que uRv y $\forall w \in M (vRw \rightarrow w \in e(p))$. Al ser el consecuente falso en u tenemos que

$$\forall t \in M (uRt \rightarrow \exists s \in M (tRs \wedge (s \notin e(p) \vee s \notin e(q))))$$

y

$$\forall t \in M (uRt \rightarrow \exists s \in M (tRs \wedge (s \notin e(p) \vee s \in e(q))))$$

Puesto que uRv , sea, por (*), z tal que uRz y

$$\forall r \in M (zRr \wedge zRt \rightarrow r = t \wedge vRt)$$

Sean además s y s_1 tales que zRs , $(s \notin e(p) \vee s \notin e(q))$, zRs_1 , y $(s_1 \notin e(p) \vee s_1 \in e(q))$. Entonces $s = s_1$ y vRs . Por tanto, $s \in e(p)$, y por consiguiente s tanto pertenece como no a $e(q)$, y esto es absurdo. Concluimos pues que el axioma de la lógica KF es válido en el marco. $\blacksquare$

PROPOSICIÓN 9.24: La lógica KF es canónica y, por tanto, completa.

Prueba: Veamos que en el marco canónico de KF vale la condición (*) del lema anterior. Supongamos que $u, v \in M_{KF}$ y uRv . Sea $\Delta = \{A: \Box A \in u\}$. Razonemos por casos según que v tenga R_{KF} -sucesores o no.

a) Si v tiene R_{KF} -sucesores, sea w tal que $vR_{KF}w$. Entonces, y puesto que $\Delta \subseteq w$, Δ es KF-consistente. No es difícil ver que $\Diamond\Box\Delta \subseteq u$. Consideremos, usando el lema de Zorn, un conjunto maximal de fórmulas Γ con la propiedad de incluir a Δ y tal que $\Diamond\Box\Gamma \subseteq u$. Γ resulta ser maximal KF-consistente (en caso contrario, si A es tal que $A \notin \Gamma$ y $\neg A \notin \Gamma$, entonces por el lema 9.21, $\Diamond\Box(\Gamma \cup \{A\}) \subseteq u$ o $\Diamond\Box(\Gamma \cup \{\neg A\}) \subseteq u$, pero en este caso Γ no es un conjunto maximal con la propiedad considerada). Por tanto el conjunto $\Box\Gamma \cup \{B: \Box B \in u\}$ es KF-consistente. Sea t un conjunto maximal y KF-consistente que lo incluye. Entonces $uR_{KF}t$ y $\Box\Gamma \subseteq t$. Supongamos que $tR_{KF}s$ y $tR_{KF}r$. Entonces $\Gamma \subseteq s$ y $\Gamma \subseteq r$. Pero al ser todos estos conjuntos maximales y KF-consistentes, son iguales. Por tanto, puesto que $\Delta \subseteq \Gamma$, $vR_{KF}s$ y $vR_{KF}r$.

b) Si b no tiene R_{KF} -sucesores, se cumple trivialmente el consecuente de la condición. $\square$

Para demostrar que la lógica KF no es elemental obtendremos un KF-marco con la propiedad de que ningún submarco elemental numerable (en el sentido de la lógica de primer orden) del mismo es un KF-marco. Entonces tendremos lo deseado, puesto que si KF fuese elemental la clase de sus marcos estaría cerrada bajo submarcos elementales.

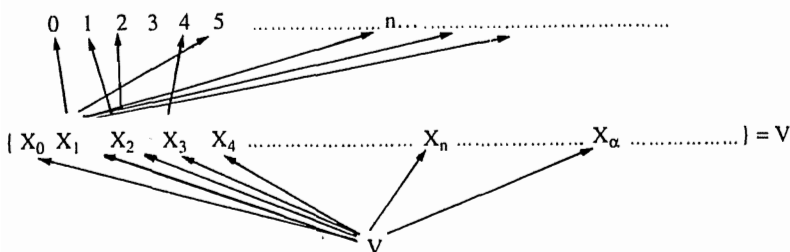
Consideremos un ultrafiltro no principal V sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$. El conjunto

$$M = \mathbb{N} \cup V \cup \{V\},$$

es el dominio del marco. La relación R del marco es la menor relación en M que cumple las condiciones:

- i) Para cada $X \in V$, VRX
- ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $X \in V$, XRn si y sólo si $n \in X$.

Así, R es la inversa de la relación de pertenencia en M (suponemos que la relación de pertenencia no se da entre números naturales). El gráfico de R es:



Resulta que:

a) $\langle M, R \rangle$ es un KF-marco.

b) Si $\langle M', R' \rangle$ es un submarco elemental de $\langle M, R \rangle$, entonces

i) $V \in M'$

ii) $V \cap M' \neq \emptyset$

iii) Para cada $X, Y \in V \cap M'$ $\{n \in \mathbb{N} \cap M' : XR_n \text{ y } YR_n\}$ es infinito.

c) Ningún submarco elemental numerable de $\langle M, R \rangle$ es un KF-marco.

Prueba de a): Sea e una asignación cualquiera en $\langle M, R \rangle$. Supongamos que $u \in M$ y que $\Diamond \Box p$ es verdadera en u . Consideremos los dos casos posibles: 1) $u \neq V$. En tal caso sea $v \in M$ tal que uRv y p es verdadera en todos sus R -sucesores. Puesto que $u \neq V$, y u tiene un R -sucesor, $u \in V$ y $v \in u$. Entonces, v no tiene R -sucesores. Por tanto, la fórmula $(p \wedge q)$ es verdadera en todo R -sucesor de v , y por consiguiente la fórmula $\Diamond \Box (p \wedge q)$ es verdadera en u .

2) $u = V$. Sea, como antes, $v \in M$ tal que uRv y p es verdadera en todos sus R -sucesores. Entonces tenemos que $v \in V$ y $v \subseteq e(p)$ (los elementos de v son precisamente sus R -sucesores). Por tanto, al ser V un ultrafiltro, $e(p) \cap \mathbb{N}$ pertenece a V , y además $e(q) \cap \mathbb{N} \in V$ o $\mathbb{N} - e(q) \in V$. En el primer caso tenemos que $v' = e(p) \cap e(q) \cap \mathbb{N} \in V$, y por tanto que la fórmula $\Box (p \wedge q)$ es verdadera en v' y VRv' . Por consiguiente, $\Diamond \Box (p \wedge q)$ es verdadera en u . En el segundo caso tenemos que el conjunto $v'' = e(p) \cap \mathbb{N} \cap (\mathbb{N} - e(q)) \in V$, y por tanto que $v'' \subseteq e(p) \cap e(\neg q)$. Así, la fórmula $\Box (p \wedge \neg q)$ es verdadera en v'' y VRv'' . Por tanto $\Diamond \Box (p \wedge \neg q)$ es verdadera en u .

Prueba de b) : i) La fórmula $\exists yz (Rxy \wedge Ryz)$ es satisfecha en $\langle M, R \rangle$ únicamente por V. ii) La fórmula $\exists y Rxy$ es satisfecha en $\langle M, R \rangle$ por V. iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, la fórmula $\exists x_1 \dots x_n (\bigwedge_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i \neq x_j \wedge Rxx_i \wedge Rxx_j)$ es satisfecha por cada $X, Y \in V$.

Prueba de c): Supongamos que $\langle M', R' \rangle$ es un submarco elemental de $\langle M, R \rangle$ numerable. Sea $\{X_n : n \in \alpha\}$ una enumeración de $V \cap M'$ (donde α es $\mathbb{N}$ o un segmento inicial de $\mathbb{N}$). Definamos dos secuencias infinitas de elementos de $X_0 \cap M'$, $\langle a_n : n \in \omega \rangle$ y $\langle b_n : n \in \omega \rangle$ tales que

- 1) Para cada $n \in \omega$ $a_n \in X_n$ y $b_n \in X_n$
- 2) Para cada $n \in \omega$ $a_n \neq b_n$
- 3) Para cada $n \in \omega$ y cada $m < n$ a_n y b_n son diferentes de a_m y de b_m .

La definición de las secuencias puede realizarse por recursión utilizando ii) y el hecho de que el ultrafiltro es no-principal. Sea e una asignación en $\langle M', R' \rangle$ tal que $e(p) = X_0 \cap M'$ y $e(q) = \{a_n : n \in \omega\}$. Entonces, dado $X \in V \cap M'$, tenemos que, para algún n , $X = X_n$. Pero, puesto que $b_n \in X_n$ y $b_n \notin e(q)$, tenemos que $\Box(p \wedge q)$ es falsa en X , y ya que $a_n \in X_n$ y $a_n \notin e(\neg q)$, tenemos que $\Box(p \wedge \neg q)$ es falsa en X . Por tanto, tanto $\Diamond\Box(p \wedge q)$ como $\Diamond\Box(p \wedge \neg q)$ son falsas en V . Ahora bien, $\Diamond\Box p$ es verdadera en V , puesto que X_0 pertenece a V y $e(p) = X_0 \cap M'$.

EJERCICIOS

9.1. Demostrar que las inclusiones de las que se habla antes de la proposición 9.2. son propias. Pensar en la clase de marcos finitos y en la clase de marcos infinitos.

9.2. Demostrar ii) del teorema 9.3.

9.3. Demostrar el teorema de compacidad utilizando ultraproductos. Dado un conjunto Σ de sentencias de un lenguaje de primer orden finitamente satisfactible, demostrar que Σ es satisfactible obteniendo a partir de modelos de los subconjuntos finitos de

Σ un ultraproducto de los mismos modelo de Σ . Tener en cuenta la prueba de i) del teorema 9.3.

9.4. Demostrar el teorema 9.5.

9.5. Demostrar ii) de la proposición 9.6.

9.6. Encontrar una sentencia universal de segundo orden tal que los marcos modelo de la misma sean los marcos finitos. Piénsese en la caracterización siguiente de la finitud: Un conjunto es finito si y sólo si no es biyectable con ningún subconjunto propio. Concluir que hay clases de marcos caracterizados por una sentencia universal de segundo orden que son EC_{Σ} pero no EC. Demostrar utilizando lo anterior que la clase de marcos finitos no es la clase de marcos de ninguna fórmula modal.

9.7. Demostrar a) del ejemplo que sigue al corolario 9.16, y completar los razonamientos del resto de dicho ejemplo.

9.8. Consideremos el axioma de McKinsey, la fórmula $\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$. La clase de marcos de esta fórmula no es de primer orden. Para demostrarlo considérese el marco $\langle M, R \rangle$ con

$$\begin{aligned} M &= \{0\} \cup \{n: n \geq 1\} \cup \{n^*: n \geq 1\} \cup \\ &\quad \cup \{-n: n \geq 1\} \cup \{f: f: \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \{0,1\}\} \\ \text{y } R &= \{\langle 0, n \rangle: n \geq 1\} \cup \{\langle n, n^* \rangle: n \geq 1\} \cup \{\langle n, -n \rangle: n \geq 1\} \\ &\quad \cup \{\langle n^*, n^* \rangle: n \geq 1\} \cup \{\langle -n, -n \rangle: n \geq 1\} \cup \{\langle 0, f \rangle: \\ f: \mathbb{N} - \{0\} &\rightarrow \{0,1\}\} \cup \{\langle f, -n \rangle: f: \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \{0,1\} \text{ y } f(n)=0\} \\ &\quad \cup \{\langle f, n^* \rangle: f: \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \{0,1\} \text{ y } f(n)=1\}. \end{aligned}$$

i) Demostrar que en este marco es válido el axioma de McKinsey. Dada una asignación, demostrar que es verdadero en los índices distintos de 0 no tiene dificultad. Para demostrar que es verdadero en 0 hay que considerar una función f apropiada.

ii) Demostrar que la clase de marcos en los que es válido el axioma de McKinsey no es EC. Para ello considerar una subestructura elemental numerable de $\langle M, R \rangle$, $\langle M', R' \rangle$, tal que el conjunto $\{0\} \cup \{n: n \geq 1\} \cup \{n^*: n \geq 1\} \cup \{-n: n \geq 1\}$ está incluido en M' , que existe por el teorema de Löwenheim-Skolem descendente. Sea, puesto que M' es numerable y el conjunto de funciones de $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}$ tiene la cardinalidad del continuo, una función f de $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}$ tal que pertenece a M pero no a M' . Considérese una asignación e en $\langle M', R' \rangle$ tal que

$$e(p) = \{n^*: f(n) = 1\} \cup \{-n: f(n) = 0\}.$$

Demostrar que en $\langle M', R', e \rangle$ $\Box \Diamond p$ es verdadera en 0, y $\Diamond \Box p$ es falsa en 0. Tener en cuenta que, si g es tal que para cada n , $g(n) = 0$ si y sólo si $f(n) = 1$, entonces $g \notin M'$. Para verlo encontrar una fórmula con únicamente dos variables libres en el lenguaje de primer orden de tipo de semejanza $\{R\}$, $\phi(x, y)$, tal que para cada $a, b \in M$ $\langle M, R \rangle \models \phi(x, y)[a, b]$ si y sólo si a y b son funciones y para cada n , $a(n) = 0$ si y sólo si $b(n) = 1$.

CAPÍTULO 10

ÁLGEBRAS MODALES

En el capítulo 3 hemos presentado las semánticas de marcos y de modelos para la lógica modal sentencial. En este capítulo vamos a presentar otra semántica para la lógica modal sentencial, la semántica algebraica, en la que las fórmulas modales se interpretan en las llamadas álgebras modales. El interés de las álgebras modales no se reduce al de ser las interpretaciones en una nueva semántica para la lógica modal. Nos van a permitir responder a la pregunta, relacionada con las cuestiones inversas a las tratadas en el capítulo anterior, por las condiciones que debe cumplir una clase de marcos para que sea caracterizable mediante una fórmula modal.

1. Un *álgebra modal normal* es un tuplo

$$A = \langle A, \wedge, \vee, *, 0, 1, \tau \rangle$$

donde $\langle A, \wedge, \vee, *, 0, 1 \rangle$ es un álgebra de Boole y τ es una operación monádica en A tal que para cada $a, b \in A$

- i) $\tau(a \wedge b) = \tau a \wedge \tau b$
- ii) $\tau 1 = 1$.

A menudo, al hablar de álgebras modales normales, omitiremos el adjetivo normal, pero nos referiremos, a menos que digamos lo contrario, a este tipo de álgebras.

Dada un álgebra de Boole A , definamos la relación $\leq$ en A por

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a \wedge b = a.$$

Esta relación es una relación de orden parcial reflexivo en A y la estructura $\langle A, \leq \rangle$ es un retículo complementado y distributivo con supremo e ínfimo.

Definamos, además

$$(a \Rightarrow b) = a^* \vee b$$

$$(a \Leftrightarrow b) = (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$$

PROPOSICIÓN 10.1: *En toda álgebra de Boole B*

i) $(a \Rightarrow b) = 1$ si y sólo si $a \leq b$

ii) $(a \Leftrightarrow b) = 1$ si y sólo si $a = b$.

Prueba: i) Si $(a \Rightarrow b) = 1$, $a^* \vee b = 1$. Por tanto $(a^* \vee b) \wedge a = a$, con lo cual tenemos que $b \wedge a = a$. Así, $a \leq b$. Por otra parte, si $a \leq b$, $a \wedge b = a$, y por tanto $(a \wedge b) \vee a^* = a \vee a^* = 1$. Así, $b \vee a^* = 1$ y $(a \Rightarrow b) = 1$.

ii) Si $(a \Leftrightarrow b) = 1$, tenemos que $(a \Rightarrow b) = 1$ y $(b \Rightarrow a) = 1$. Por tanto, por i), $a \leq b$ y $b \leq a$. Así, $a = b$. Por otra parte, si $a = b$ tenemos que $a \leq b$ y $b \leq a$, y por tanto que $(a \Rightarrow b) = 1$ y $(b \Rightarrow a) = 1$. Por consiguiente $(a \Leftrightarrow b) = 1$. ■

PROPOSICIÓN 10.2: *En toda álgebra modal normal ocurre que*

i) si $a \leq b$, entonces $\tau a \leq \tau b$

ii) $\tau(a \Rightarrow b) \wedge \tau a \leq \tau b$

iii) $(\tau(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\tau a \Rightarrow \tau b)) = 1$

iv) $\tau(a \Rightarrow b) \leq (\tau a \Rightarrow \tau b)$.

Prueba: i) Si $a \leq b$, $a \wedge b = a$, y por tanto $\tau(a \wedge b) = \tau a$. Por tanto, por la condición i) de la definición de álgebra modal normal, $\tau a \wedge \tau b = \tau a$, con lo cual tenemos que $\tau a \leq \tau b$.

ii) $\tau(a \Rightarrow b) \wedge \tau a = \tau((a \Rightarrow b) \wedge a) = \tau((a^* \vee b) \wedge a) = \tau(b \wedge a) \leq \tau b$.

iv) $\tau(a \Rightarrow b) \wedge (\tau a \Rightarrow \tau b) = (\tau(a \Rightarrow b) \wedge ((\tau a)^* \vee \tau b)) = (\tau(a \Rightarrow b) \wedge (\tau a)^*) \vee (\tau(a \Rightarrow b) \wedge \tau b) = \tau(a \Rightarrow b)$ pues, por ii), tenemos que $\tau(a \Rightarrow b) \wedge \tau a \leq \tau b$, y por tanto que $(\tau(a \Rightarrow b) \wedge \tau a) \leq (\tau(a \Rightarrow b) \wedge \tau b)$. Tenemos pues lo deseado.

iii) equivale a iv). ■

La idea de álgebra modal normal surge al considerar las álgebras de Lindenbaum-Tarski de las lógicas modales normales.

Para cada lógica modal normal L en el lenguaje modal senten-

cial $\mathcal{P}$, definamos en el conjunto $\text{For}(\mathcal{P})$ la relación de equivalencia $\sim_L$ por:

$$B \sim_L C \quad \text{si y sólo si} \quad \vdash_L B \leftrightarrow C.$$

Consideremos el conjunto cociente $\text{For}(\mathcal{P})/\sim_L = \{[B]: B \in \text{For}(\mathcal{P})\}$, donde $[B]$ es la clase de equivalencia determinada por B .

Observemos que si $B \sim_L B'$ y $C' \sim_L C'$ entonces

- i) $\neg B \sim_L \neg B'$
- ii) $\Box B \sim_L \Box B'$
- iii) $(B \wedge C) \sim_L (B' \wedge C')$
- iv) $(B \vee C) \sim_L (B' \vee C')$.

Por tanto, podemos definir en el conjunto $\text{For}(\mathcal{P})/\sim_L$ las operaciones diádicas $\vee_L$ y $\wedge_L$, y la operación monádica $*_L$ mediante:

$$\begin{aligned} [B] *_L &= [\neg B] \\ [B] \vee_L [C] &= [B \vee C] \\ [B] \wedge_L [C] &= [B \wedge C]. \end{aligned}$$

Definamos además $0_L = [\perp]$ y $1_L = [\top]$. Por último, definamos la operación monádica, τ_L , en $\text{For}(\mathcal{P})/\sim_L$ por:

$$\tau_L [B] = [\Box B].$$

El álgebra $\langle \text{For}(\mathcal{P})/\sim_L, \wedge_L, \vee_L, *_L, 0_L, 1_L, \tau_L \rangle$ es un álgebra modal normal como fácilmente puede comprobar el lector. A esta álgebra se la conoce como el *álgebra de Lindenbaum-Tarski* de la lógica L .

Observemos que para poder realizar la construcción del álgebra de Lindenbaum-Tarski hemos necesitado únicamente la propiedad modal de las lógicas normales de estar cerradas bajo la regla: si $B \leftrightarrow C \in L$, entonces $\Box B \leftrightarrow \Box C \in L$. Para que el álgebra sea normal, se necesita que la lógica esté cerrada bajo necesidad y contenga todas las instancias del axioma distributivo, es decir, que sea normal.

Por otra parte, si consideramos un lenguaje modal $\mathcal{P}$, para cualquier marco $\langle M, R \rangle$ y asignación en el mismo e , tenemos que el conjunto de los subconjuntos de M , $e = \{e(B): B \in \text{For}(\mathcal{P})\}$,

que la asignación e asigna a las fórmulas modales, es un álgebra de subconjuntos de M . Si definimos en este conjunto una operación τ de modo que para cada fórmula B

$$\tau(e(B)) = e(\Box B),$$

tenemos que el álgebra $\langle e, \cap, \cup, -, \emptyset, M, \tau \rangle$ es un álgebra modal (de conjuntos).

2. Vamos a interpretar los lenguajes modales sentenciales en las álgebras modales. Para ello necesitamos la noción de asignación de elementos de un álgebra a las letras sentenciales de un lenguaje.

Dado un lenguaje modal sentencial $\mathcal{P}$ y un álgebra modal A , una *asignación* en el álgebra A es una función s de $\mathcal{P}$ en el dominio de A .

Dada una asignación s en el álgebra A , podemos extenderla, en virtud del teorema de definición por recursión, a una función, a la que seguiremos llamando s , del conjunto de todas las $\mathcal{P}$ -fórmulas en el dominio A del álgebra de modo que:

$$\text{i) } s((B \rightarrow C)) = s(B)^* \vee s(C)$$

$$\text{ii) } s(\perp) = 0$$

$$\text{iii) } s(\Box B) = \tau(s(B)).$$

El lector puede comprobar que:

$$\text{iv) } s((B \wedge C)) = s(B) \wedge s(C)$$

$$\text{v) } s((B \vee C)) = s(B) \vee s(C)$$

$$\text{vi) } s(\neg B) = s(B)^*.$$

Aunque utilizamos el mismo signo para la conjunción y para la operación correspondiente de las álgebras modales, en cada caso está claro por el contexto cuál es su significado. Igual comentario vale para el caso del signo para la disyunción.

Una *fórmula modal* B es *válida* en un álgebra modal A si y sólo si para toda asignación s en A , $s(B) = 1$. Una *fórmula modal* B es *verdadera* en una asignación s en un álgebra modal A si y sólo si $s(B)$ es 1.

A continuación vamos a ver que cada álgebra modal A da

lugar a una lógica modal normal, a saber: el conjunto de todas las fórmulas válidas en el álgebra. A esta lógica la llamaremos la lógica de A y nos referiremos a ella con $L(A)$.

LEMA 10.3: *Para cualquier álgebra modal A y cualesquiera asignaciones s y s' en A , ocurre que para toda fórmula modal B cuyas letras sentenciales estén entre las letras sentenciales distintas $p_1, \dots, p_n$, y cualesquiera fórmulas modales $B_1, \dots, B_n$ entonces $s(p_1) = s'(B_1), \dots, s(p_n) = s'(B_n)$, $s'(B(p_1/B_1 \dots p_n/B_n)) = s(B)$.*

Prueba: Por inducción, teniendo en cuenta lo que sabemos de la operación de sustitución.■

PROPOSICIÓN 10.4: *Para toda álgebra modal normal A y todo lenguaje modal proposicional, el conjunto de fórmulas modales válidas en A , $L(A)$, es una lógica modal normal.*

Prueba: i) Puesto que toda asignación s en A asigna el valor 1 a cada tautología del sublenguaje proposicional del lenguaje modal (el lector puede demostrarlo apelando, por ejemplo, a un cálculo completo para la lógica sentencial), $L(A)$ contiene a toda tautología del sublenguaje proposicional del lenguaje modal. ii) $L(A)$ está cerrada bajo *modus ponens*, pues para cada asignación s en A , si $s(B \rightarrow C) = 1$ y $s(B) = 1$, resulta que $s(C) = 1$. iii) $L(A)$ está cerrada bajo necesidad, puesto que para cada asignación s en A , si $s(B) = 1$, entonces $s(\Box B) = 1$. iv) $L(A)$ contiene toda instancia del axioma distributivo. Si s es una asignación en A , entonces

$$s(\Box(B \rightarrow C) \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box C)) = \\ \tau(s(B) \Rightarrow s(C)) \Rightarrow (\tau(s(B)) \Rightarrow \tau(s(C))) = 1.$$

v) $L(A)$ está cerrado bajo sustitución, pues si B es válida en A y consideramos una instancia de sustitución de B , $B(p/C)$, y s es una asignación en A , podemos considerar la asignación s' que es en todo idéntica a s excepto en que $s'(p) = s(C)$. Por el lema anterior tenemos que $s(B(p/C)) = s'(B)$, y puesto que $s'(B) = 1$ (B es válida en A), $s(B(p/C)) = 1$.■

Si consideramos el álgebra de Lindenbaum-Tarski, A_L , de una

lógica modal normal L , en ella podemos definir una asignación s de modo que para cada letra sentencial p

$$s_L(p) = [p].$$

Entonces tenemos el siguiente lema:

LEMA 10.5: *Para cada fórmula modal A , $s_L(A) = [A]$.*

Prueba: Por inducción. Se deja al lector. ▮

TEOREMA 10.6: *Para cada fórmula modal A*

$$s_L(A) = 1_L \text{ si y sólo si } A \text{ es un teorema de } L.$$

Prueba: i) Si A es un teorema de L , lo es $(A \leftrightarrow T)$. Por tanto $s_L(A) = 1_L$. ii) Si $s_L(A) = 1_L$, entonces $[A] = 1_L$, y por tanto $(A \leftrightarrow T)$ es un teorema de L ; por consiguiente lo es también A . ▮

Este teorema tiene una consecuencia importante, que es la siguiente:

TEOREMA 10.7: *Para toda lógica normal L , la lógica de álgebra de Lindenbaum-Tarski de L es precisamente L .*

Prueba: Si B es válida en A_L , entonces $s_L(B) = 1_L$ y por tanto B es un teorema de L . Por otro lado, si B es un teorema de L y se da una asignación en A_L , supongamos que las letras sentenciales que ocurren en B están entre las letras sentenciales $p_1, \dots, p_n$. Sea $B_1, \dots, B_n$ fórmulas para las cuales $s(p_1) = [B_1], \dots, s(p_n) = [B_n]$. Entonces, puesto que para cada i , con $1 \leq i \leq n$, tenemos que $s(p_i) = s_L(B_i)$, por el lema 10.3 podemos concluir que

$$s_L(B(p_1/B_1, \dots, p_n/B_n)) = s(B).$$

Puesto que B es un teorema de L , lo es $B(p_1/B_1, \dots, p_n/B_n)$. Por tanto, la asignación s_L asigna a esta fórmula el valor 1_L , con lo cual concluimos que $s(B) = 1_L$. Por tanto, B es válida en A_L , pertenece a la lógica de A_L . ▮

Si L es una lógica modal normal, diremos que un álgebra

modal A es una L -álgebra si y sólo si en ella son válidos todos los teoremas de L , es decir si $L \subseteq L(A)$.

Diremos que una lógica L es *algebraicamente completa* si y sólo si los teoremas de L son precisamente las fórmulas válidas en toda L -álgebra.

A continuación podemos probar el teorema de completitud algebraica para las lógicas modales normales. Como vamos a ver, toda lógica normal es algebraicamente completa. Ello se sigue inmediatamente del último teorema. Este hecho ha llevado a algunos autores a afirmar que la semántica algebraica es simplemente *sintaxis disfrazada*, afirmación que se toma casi como sinónima de afirmar que es superflua. Ahora bien, por un lado, las álgebras modales son objetos interesantes en sí mismos, y la conexión entre ellas y las lógicas modales, proporcionada por la semántica que estamos estudiando, es útil para el estudio de las álgebras modales al permitir aplicar resultados lógicos al estudio de éstas. Por otro lado, como pone de manifiesto, por ejemplo, el trabajo de Blok (Blok [1980]), la semántica algebraica puede ser muy útil para estudiar relaciones entre las lógicas modales al permitir utilizar en dicho estudio métodos algebraicos muy potentes. Además, como veremos y hemos mencionado al principio del capítulo, a nosotros nos va a servir para caracterizar aquellas clases de marcos que son definibles mediante una fórmula modal. Para ello utilizaremos algún resultado del álgebra universal.

TEOREMA 10.8 (de completitud algebraica para K): *Para toda fórmula B*

$\vdash_K B$ si y sólo si B es válida en toda álgebra modal

Prueba: El conjunto de fórmulas válidas en toda álgebra modal es una lógica normal. Por tanto incluye a K . Por otra parte, toda fórmula válida en toda álgebra modal es válida en el álgebra A_K y por tanto, por el teorema 10.7, es un teorema de K . $\square$

TEOREMA 10.9 (de completitud algebraica para las lógicas normales): *Toda lógica normal L es algebraicamente completa.*

Prueba: Por el teorema 10.7, el álgebra A_L es una L -álgebra. Por tanto, si una fórmula es válida en toda L -álgebra, lo es en A_L , y por consiguiente, por el teorema 10.7, es un teorema de L . $\square$

3. Podemos hablar de las álgebras modales mediante un lenguaje de primer orden con identidad y sin relatores pero con los signos funcionales, $\bullet$, $+$, $*$, τ , y las constantes 0 y 1 . A este lenguaje lo llamaremos el lenguaje de las álgebras modales.

Dada un álgebra modal, el signo $\bullet$ se interpretará siempre como la operación $\wedge$ del álgebra. El signo $+$ como la operación $\vee$. El signo $*$ como la operación $*$. El signo τ como la operación τ . Y, por último, los signos 0 y 1 como el 0 y el 1 del álgebra, respectivamente.

Una ecuación del lenguaje de las álgebras modales es una fórmula de la forma $t_1 \approx t_2$ donde t_1 y t_2 son términos.

Diremos que una ecuación $t_1 \approx t_2$ es válida en un álgebra modal A si y sólo si su clausura universal es verdadera en A . O, de modo equivalente, siendo $x_1, \dots, x_n$ las variables que ocurren en la ecuación, si y sólo si para cada $a_1, \dots, a_n \in A$, $A \models t_1 \approx t_2 [a_1, \dots, a_n]$, lo que a su vez equivale a decir que para cada $a_1, \dots, a_n \in A$, $t_1^A[a_1, \dots, a_n] = t_2^A[a_1, \dots, a_n]$.

Al igual que podemos traducir los lenguajes modales a lenguajes de primer orden apropiados para hablar de marcos y de modelos, podemos traducir los lenguajes modales al lenguaje de las álgebras modales. Vamos a centrarnos en el caso del lenguaje modal numerable. Para el caso de un lenguaje no numerable debemos considerar el lenguaje de primer orden de las álgebras modales con un conjunto de variables de la cardinalidad del conjunto de las letras sentenciales del lenguaje modal.

Supongamos una enumeración sin repeticiones de las letras sentenciales del lenguaje modal, y una enumeración del mismo tipo de las variables del lenguaje de las álgebras modales. Definimos por recursión una función $\#$ que asigna, a cada fórmula modal B , un término del lenguaje de las álgebras modales, $B^\#$, de modo que:

$$\begin{aligned} p_n^\# &\text{ es } x_n \\ \perp^\# &\text{ es } 0 \\ (B \rightarrow C)^\# &\text{ es } (B^\#) * C^\# \\ (\Box B)^\# &\text{ es } \tau B^\# \end{aligned}$$

Es fácil demostrar que, para cada fórmula modal B y cada fórmula modal C , las ecuaciones siguientes son válidas en toda álgebra modal:

$$\begin{aligned}(B \wedge C)^{\#} &\approx B^{\#} \cdot C^{\#} \\ (B \vee C)^{\#} &\approx B^{\#} + C^{\#} \\ (\neg B)^{\#} &\approx (B^{\#})^*.\end{aligned}$$

La proposición siguiente nos enseña que a cada fórmula modal le corresponde una ecuación de modo que la fórmula y la ecuación son válidas en exactamente las mismas álgebras.

PROPOSICIÓN 10.11: *Para toda fórmula modal B, y toda álgebra modal A, B es válida en A si y sólo si $B^{\#} \approx 1$ es válida en A.*

Para la prueba de la proposición necesitamos el siguiente lema:

LEMA 10.12: *Si B es una fórmula cuyas letras sentenciales están entre las letras $p_1, \dots, p_n$, y s es una asignación en A, entonces*

$$s(B) = B^{\#A} A [s(p_1), \dots, s(p_n)].$$

Prueba: Por inducción.■

Prueba de la proposición 10.11: Sea B una fórmula cualquiera. Supongamos que las letras sentenciales que ocurren en B están entre $p_1, \dots, p_n$. Si B es válida en el álgebra modal A, entonces para cada asignación s en A, $s(B) = 1$. Dados $a_1, \dots, a_n \in A$, consideremos una asignación s tal que $s(p_1) = a_1, \dots, s(p_n) = a_n$. Por el lema tenemos que $B^{\#A} [s(p_1), \dots, s(p_n)] = B^{\#A} [a_1, \dots, a_n] = 1$. Por tanto la ecuación $B^{\#} \approx 1$ es válida en A.

Por otro lado, si la ecuación $B^{\#} \approx 1$ es válida en A, y s es una asignación cualquiera en A, tenemos que $B^{\#A} [s(p_1), \dots, s(p_n)] = 1$. Por tanto, por el lema, obtenemos que $s(B) = 1$. Así, podemos concluir que B es válida en A.■

COROLARIO 10.13: *Para toda lógica normal L y toda fórmula modal B $\vdash_L B$ si y sólo si $B^{\#} \approx 1$ es válida en toda L-álgebra.*

Prueba: Por la proposición anterior y el teorema de completitud algebraica.■

Diremos que un álgebra modal A es un *modelo* de un conjunto

de ecuaciones Δ si y sólo si todas las ecuaciones pertenecientes a Δ son válidas en A .

COROLARIO 10.14: Si Σ es un conjunto de axiomas para una lógica modal L , entonces:

i) Para toda fórmula modal B , $\vdash_L B$ si y sólo si $B^\# \approx 1$ es consecuencia de $\{C^\# \approx 1 : C \in \Sigma\}$.

ii) Para toda álgebra modal A , A es modelo del conjunto $\{C^\# \approx 1 : C \in \Sigma\}$ si y sólo si A es una L -álgebra.

Prueba: ii) Si A es modelo de $\{C^\# \approx 1 : C \in \Sigma\}$, en virtud de la proposición 10.11, las fórmulas de Σ son válidas en A , con lo cual podemos concluir que $L = L(\Sigma) \subseteq L(A)$, y por tanto que A es una L -álgebra. Por otra parte, en toda L -álgebra son válidas todos los teoremas de L . Por tanto también lo son todas las fórmulas de Σ y, por la proposición 10.11, todas las ecuaciones correspondientes a las fórmulas de Σ .

i) se sigue de ii): La afirmación de i) equivale a la siguiente: $B^\# \approx 1$ es una consecuencia de $\{C^\# \approx 1 : C \in \Sigma\}$ si y sólo si $B^\# \approx 1$ es válida en toda L -álgebra. Pero esta afirmación se sigue inmediatamente de ii).■

Una clase de álgebras modales se dice que es una *clase ecuacional* si y sólo si es la clase de todas las álgebras modales modelo de algún conjunto de ecuaciones.

El último corolario nos muestra que, para cada lógica modal normal L , la clase de las L -álgebras es una clase ecuacional de álgebras modales. La inversa de esta afirmación también es cierta. A cada clase ecuacional de álgebras modales le podemos asociar una lógica cuyas álgebras son precisamente los elementos de la clase. Para demostrarlo necesitamos una traducción de los términos del lenguaje de las álgebras modales a fórmulas del lenguaje modal sentencial. Definamos, por recursión, una función, $+$, del conjunto de los términos del lenguaje de las álgebras modales en el conjunto de las fórmulas modales de modo que

$$\begin{array}{lll} x_n^+ & \text{es} & p_n \\ 0^+ & \text{es} & \perp \\ 1^+ & \text{es} & \top \\ (t_1^*)^+ & \text{es} & \neg t_1^+ \end{array}$$

$$\begin{aligned}(t_1 \cdot t_2)^+ & \text{ es } (t_1^+ \wedge t_2^+) \\ (t_1 + t_2)^+ & \text{ es } (t_1^+ \vee t_2^+) \\ (\tau t)^+ & \text{ es } \Box t^+.\end{aligned}$$

Puede demostrarse, por inducción y sin dificultad, que, para todo término t , la ecuación $(t^+)^\# \approx t$ es válida en toda álgebra modal.

Introduzcamos nuevos signos funcionales, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$, en el lenguaje de las álgebras modales de modo que para cada par de términos t_1 y t_2 las ecuaciones siguientes sean válidas en toda álgebra modal:

$$\begin{aligned}(t_1^* + t_2) & \approx (t_1 \rightarrow t_2) \\ (t_1^* + t_2) \cdot (t_2^* + t_1) & \approx (t_1 \leftrightarrow t_2).\end{aligned}$$

El signo $\rightarrow$ corresponde a la operación $\Rightarrow$ en las álgebras modales, y el signo $\leftrightarrow$ a la operación $\Leftrightarrow$.

No es difícil demostrar que para cualesquiera términos t_1 y t_2 y toda álgebra modal A ocurre que:

- i) $(t_1 \leftrightarrow t_2) \approx I$ es válida en A si y sólo si $t_1 \approx t_2$ es válida en A
- ii) $(t_1 \rightarrow t_2) \approx I$ es válida en A si y sólo si $t_1 \cdot t_2 \approx t_1$ es válida en A

El lector puede comprobar que para cada par de términos t_1 y t_2 la ecuación $((t_1^+)^\# \leftrightarrow (t_2^+)^\#) \approx (t_1^+ \leftrightarrow t_2^+)^\#$ es válida en toda álgebra modal.

Si Δ es un conjunto de ecuaciones, podemos considerar el conjunto de fórmulas modales

$$\Delta^+ = \{t_1^+ \leftrightarrow t_2^+ : t_1 \approx t_2 \in \Delta\}.$$

Este conjunto da lugar a la lógica modal $L(\Delta^+)$, para la cual vale la proposición siguiente:

PROPOSICIÓN 10.15: *La clase ecuacional determinada por un conjunto de ecuaciones Δ es la clase de las $L(\Delta^+)$ -álgebras.*

Prueba: Si A es una $L(\Delta^+)$ -álgebra, entonces, para toda ecuación $t_1 \approx t_2$ perteneciente a Δ , la fórmula $t_1^+ \leftrightarrow t_2^+$ es válida en A . Y por la proposición 10.11, lo es la ecuación $(t_1^+ \leftrightarrow t_2^+)^\# \approx I$. Por

tanto, puesto que la ecuación $((t_1^+)^{\#} \leftrightarrow (t_2^+)^{\#}) \approx (t_1^+ \leftrightarrow t_2^+)^{\#}$ es válida en toda álgebra modal, tenemos que la ecuación $(t_1^+)^{\#} \leftrightarrow (t_2^+)^{\#} \approx 1$ es válida en A , con lo cual tenemos que lo es la ecuación $(t_1^+)^{\#} \approx (t_2^+)^{\#}$, y por tanto lo es $t_1 \approx t_2$.

Por otra parte, si A es una álgebra modal en la que son válidas todas las ecuaciones de Δ , y $t_1 \approx t_2 \in \Delta$, puesto que $t_1 \approx t_2$ es válida en A , tenemos que la ecuación $(t_1 \leftrightarrow t_2) \approx 1$ es válida en A . Por tanto también lo es la ecuación $((t_1^+)^{\#} \leftrightarrow (t_2^+)^{\#}) \approx 1$, con lo cual obtenemos que la ecuación $(t_1^+ \leftrightarrow t_2^+)^{\#} \approx 1$ es válida en A , y por consiguiente, en virtud de la proposición 10.11, lo es la fórmula $(t_1^+ \leftrightarrow t_2^+)$. Concluimos por tanto que A es una $L(\Delta^+)$ -álgebra. ■

4. Vamos a estudiar ahora tres nociones algebraicas: la de subálgebra, la de homomorfismo entre álgebras, y la de producto directo de álgebras.

Un álgebra A_1 del tipo de las álgebras modales (con dos operaciones diádicas, dos monádicas y dos objetos distinguidos) es una *subálgebra* de un álgebra modal A_2 si y sólo si

- i) $A_1 \subseteq A_2$
- ii) A_1 está cerrado bajo las operaciones de A_2
- iii) Cada operación de A_1 es la restricción a A_1 de la operación correspondiente de A_2
- iv) El cero y el uno de A_1 son, respectivamente, el cero y el uno de A_2 .

PROPOSICIÓN 10.16: Si A_1 es una subálgebra de A_2 , entonces

- i) Para todo término $t(x_1, \dots, x_n)$ del lenguaje de las álgebras modales, y cada $a_1, \dots, a_n \in A_1$

$$t^{A_1}[a_1, \dots, a_n] = t^{A_2}[a_1, \dots, a_n].$$

- ii) Para cada ecuación $t_1 \approx t_2$ cuyas variables libres están entre las $x_1, \dots, x_n$ y cada $a_1, \dots, a_n \in A_1$

$$A_1 \models t_1 \approx t_2 [a_1, \dots, a_n] \text{ si y sólo si } A_2 \models t_1 \approx t_2 [a_1, \dots, a_n].$$

- iii) Toda ecuación válida en A_2 es válida en A_1 .

Prueba: Por inducción. ■

COROLARIO 10.17: *Toda subálgebra de un álgebra modal es un álgebra modal.*

COROLARIO 10.18: *Si A_1 es una subálgebra de una álgebra modal A_2 , entonces toda fórmula modal válida en A_2 es válida en A_1 .*

Prueba: Por la proposición anterior y la correspondencia entre fórmulas modales y ecuaciones del lenguaje de las álgebras modales. **■**

Si $\langle A_i : i \in I \rangle$ es una familia no vacía de álgebras modales, su *producto directo* es el álgebra que tiene como dominio el producto

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i : \forall i \in I f(i) \in A_i\},$$

y como operaciones y elementos distinguidos las definidas a continuación:

$$\begin{aligned} (f \wedge g)(i) &= f(i) \wedge_i g(i) \\ (f \vee g)(i) &= f(i) \vee_i g(i) \\ f^*(i) &= f(i)^* \\ (\tau f)(i) &= \tau_i f(i) \\ 0(i) &= 0_i \\ 1(i) &= 1_i \end{aligned}$$

donde, por ejemplo, el subíndice i en $\wedge_i$ indica que ésta es la operación ínfimo del álgebra A_i . Al producto directo de la familia de álgebras $\langle A_i : i \in I \rangle$ nos referiremos con $\prod_{i \in I} A_i$.

PROPOSICIÓN 10.19: *Si $\langle A_i : i \in I \rangle$ es una familia no vacía de álgebras modales, entonces para todo término $t(x_1, \dots, x_n)$ del lenguaje de las álgebras modales y cada $f, f_1, \dots, f_n \in \prod_{i \in I} A_i$*

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} A_i \models t(x_1, \dots, x_n) \approx x [f_1, \dots, f_n, f] \quad &\text{si y sólo si} \\ \text{para cada } i \in I \quad A_i \models t(x_1, \dots, x_n) \approx x [f_1(i), \dots, f_n(i), f(i)]. \end{aligned}$$

Prueba: Por inducción. **■**

COROLARIO 10.20: *Todo producto directo de álgebras modales es un álgebra modal.*

PROPOSICIÓN 10.21: Si $\langle A_i; i \in I \rangle$ es una familia no vacía de álgebras modales, y t es un término tal que para cada $i \in I$ la ecuación $t \approx 1$ es válida en A_i , entonces esta ecuación es válida en $\prod_{i \in I} A_i$.

Prueba: Es una consecuencia de la proposición 10.19.■

COROLARIO 10.22: Si $\langle A_i; i \in I \rangle$ es una familia no vacía de álgebras modales, entonces toda fórmula modal válida en todas las álgebras de la familia es válida en $\prod_{i \in I} A_i$.

Prueba: Utilizando la última proposición y la correspondencia entre fórmulas modales y ecuaciones del lenguaje de las álgebras modales.■

Dadas dos álgebras modales A_1 y A_2 , un homomorfismo de A_1 en A_2 es una función h de A_1 en A_2 tal que:

- i) $h(a \wedge_1 b) = h(a) \wedge_2 h(b)$
- ii) $h(a \vee_1 b) = h(a) \vee_2 h(b)$
- iii) $h(a^{*1}) = h(a)^{*2}$
- iv) $h(0_1) = 0_2$
- v) $h(1_1) = 1_2$
- vi) $h(\tau_1 a) = \tau_2 h(a)$.

Debe observarse que si h es un homomorfismo de A_1 en A_2 , $h[A_1]$ es una subálgebra de A_2 .

PROPOSICIÓN 10.23: Si h es un homomorfismo de A_1 en A_2 , entonces :

- i) Para todo término $t(x_1, \dots, x_n)$ y todo $a_1, \dots, a_n \in A_1$

$$h(t^{A_1}[a_1, \dots, a_n]) = t^{A_2}[h(a_1), \dots, h(a_n)].$$

- ii) Si h es inyectivo, para toda ecuación $t_1 \approx t_2$ cuyas variables libres están entre $x_1, \dots, x_n$ y cada $a_1, \dots, a_n \in A_1$

$$A_1 \models t_1 \approx t_2 [a_1, \dots, a_n] \text{ si y sólo si } A_2 \models t_1 \approx t_2 [h(a_1), \dots, h(a_n)].$$

iii) Si h es inyectivo, toda ecuación válida en A_2 es válida en A_1 .

iv) Si el homomorfismo h es sobre A_2 , entonces toda ecuación válida en A_1 es válida en A_2 .

Prueba: i) se demuestra por inducción. ii), iii) y iv) se obtienen utilizando i).■

COROLARIO 10.24: Si h es un homomorfismo de A_1 en A_2 entonces

i) si h es sobre A_2 tenemos que toda fórmula modal válida en A_1 lo es también en A_2 .

ii) si h es inyectivo, toda fórmula modal válida en A_2 lo es también en A_1 .

Prueba: Por la última proposición y la correspondencia entre fórmulas modales y ecuaciones del lenguaje de las álgebras modales.■

Por las proposiciones 10.16; 10.21 y 10.23 tenemos que toda clase ecuacional de álgebras modales está cerrada bajo imágenes homomorfas, productos directos de familias no vacías y subálgebras.

El teorema de Birkhoff consiste en la afirmación inversa.

TEOREMA 10.23 (de Birkhoff): Una clase de álgebras modales es una clase ecuacional si y sólo si está cerrada bajo imágenes homomorfas, productos directos de familias no vacías de álgebras de la clase, y subálgebras.

Prueba: Ver Burris y Sankappanavar [1981] p. 75.■

Dada una clase de álgebras X , sean:

$H(X)$ la clase de todas las imágenes homomorfas de las álgebras pertenecientes a X ;

$S(X)$ la clase de todas las subálgebras de las álgebras pertenecientes a X ;

$P(X)$ la clase de todos los productos directos de familias no vacías de álgebras pertenecientes a X .

Dada una clase de álgebras X , consideremos la clase de álgebras $HSP(X)$, la clase que obtenemos a partir de la clase X cerrándola primero bajo productos directos de familias no vacías, cerrando luego el resultado bajo subálgebras, y cerrando, por último, la

clase obtenida bajo imágenes homomorfas. Resulta que $\mathbf{HSP}(X)$ es la menor clase de álgebras cerrada bajo subálgebras, imágenes homomorfas y productos directos de familias no vacías de álgebras de la clase. El lector puede comprobar que ello es así.

Una clase de álgebras cerrada bajo subálgebras, imágenes homomorfas y productos directos de familias no vacías de álgebras de la clase se dice que es una *variedad*. Por el teorema de Birkhoff tenemos que una clase de álgebras es una variedad si y sólo si es una clase ecuacional, y además que:

TEOREMA 10.24: *Para toda clase de álgebras X , la menor clase ecuacional que incluye a X es la clase $\mathbf{HSP}(X)$.*

EJERCICIOS

10.1. Comprobar que el álgebra de Lindenbaum-Tarski de una lógica modal normal es un álgebra modal normal.

10.2. Comprobar que el álgebra de conjuntos asociada a un modelo mediante su asignación es una álgebra modal normal.

10.3. Demostrar el lema 10.3.

10.4. Demostrar el lema 10.5.

10.5. Comprobar que para cada fórmula modal B y cada fórmula modal C las siguientes ecuaciones son válidas en toda álgebra modal normal:

$$(B \wedge C)^{\#} \approx B^{\#} \wedge C^{\#}$$

$$(B \vee C)^{\#} \approx B^{\#} \vee C^{\#}$$

$$(\neg B)^{\#} \approx (B^{\#})^*$$

10.6. Demostrar el lema 10.12.

10.7. Demostrar que para toda colección A de álgebras modales normales, el conjunto de fórmulas modales $L(A) = \{B: B \text{ es válida en toda álgebra elemento de } A\}$ es una lógica normal.

10.8. Dada un álgebra de Boole B , diremos de las álgebras modales cuya álgebra de Boole sea B que son álgebras sobre B . ¿Cuántas álgebras modales existen sobre el álgebra de Boole $\{0,1\}$, y cuáles son? ¿Y cuántas álgebras modales existen sobre el álgebra de Boole de cuatro elementos? ¿Cuáles son?

10.9. Demostrar que para cada término t del lenguaje de las

álgebras modales la ecuación $(t^+)^\# \approx t$ es válida en toda álgebra modal.

10.10. Demostrar que para cada par de términos t_1 y t_2 del lenguaje de las álgebras modales la ecuación $((t_1^+)^\# \leftrightarrow (t_2^+)^\#) \approx (t_1^+ \leftrightarrow t_2^+)$ es válida en toda álgebra modal.

10.11. Demostrar que para cualesquiera términos t_1 y t_2 y toda álgebra modal A ocurre que:

i) $(t_1 \leftrightarrow t_2) \approx I$ es válida en A si y sólo si $t_1 \approx t_2$ es válida en A

ii) $(t_1 \rightarrow t_2) \approx I$ es válida en A si y sólo si $t_1.t_2 \approx t_1$ es válida en A .

10.12. Demostrar la proposición 10.16 y los corolarios 10.17 y 10.18.

10.13. Demostrar la proposición 10.19 y los corolarios 10.20, 10.21 y 10.22.

10.14. Demostrar la proposición 10.23 y el corolario 10.24.

10.15. Demostrar que para cada clase X de álgebras modales $HSP(X)$ es la menor clase de álgebras modales que incluye a X y está cerrada bajo subálgebras, productos directos e imágenes homomorfas.

CAPÍTULO 11

ÁLGEBRAS MODALES Y MARCOS

1. A cada marco $\mathbf{M} = \langle M, R \rangle$ podemos asociarle el álgebra

$$A(\mathbf{M}) = \langle P(M), \cap, \cup, -, \emptyset, M, I \rangle,$$

donde I es la operación en el conjunto potencia de M , $P(M)$, definida por:

$$I(X) = \{u \in M : \forall v \in M (uRv \rightarrow v \in X)\}.$$

Es fácil comprobar que esta álgebra es un álgebra modal normal. Tiene la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 11.1: *Para toda fórmula modal B ,*

B es válida en $\mathbf{M}$ si y sólo si B es válida en $A(\mathbf{M})$.

Prueba: Dada una asignación e en $\mathbf{M} = \langle M, R \rangle$, podemos considerar la asignación s en $A(\mathbf{M})$ tal que para cada letra sentencial p , $s(p) = e(p)$. Resulta que para cada fórmula modal B , $s(B) = e(B)$ (se demuestra por inducción). De igual modo cada asignación s en $A(\mathbf{M})$ puede verse como una asignación e en $\langle M, R \rangle$. En este caso ocurre también que para cada fórmula modal B , $s(B) = e(B)$. $\square$

A continuación vamos a estudiar las relaciones que hay entre las construcciones que hemos venido considerando para marcos (submarcos generados, uniones disjuntas e imágenes p-mórficas) y las que hemos considerado para álgebras modales (imágenes homomorfas, productos directos y subálgebras) cuando las aplicamos a las álgebras asociadas a marcos del modo indicado.

PROPOSICIÓN 11.2: *Si el marco $\mathbf{M}_1 = \langle M_1, R_1 \rangle$ es un submarco generado del marco $\mathbf{M}_2 = \langle M_2, R_2 \rangle$, entonces la función f de*

$P(M_2)$ en $P(M_1)$ tal que para cada $X \supset M_2$ $f(X) = X \cap M_1$, es un homomorfismo del álgebra $A(M_2)$ sobre el álgebra $A(M_1)$.

Prueba: La función f es claramente una función sobre $P(M_1)$. Es rutinario comprobar que es un homomorfismo teniendo en cuenta, para el caso de las operaciones I_1 y I_2 , que M_1 está cerrado bajo R_2 . $\square$

La proposición nos permite afirmar que, si M_1 es un submarco generado de M_2 , entonces el álgebra $A(M_1)$ es una imagen homomorfa del álgebra $A(M_2)$. La proposición siguiente nos enseña que a la unión disjunta de una familia de marcos le corresponde el producto directo de las álgebras asociadas a los marcos de la familia.

PROPOSICIÓN 11.3: Si $\langle \langle M_i, R_i \rangle : i \in I \rangle$ es una familia no vacía de marcos, entonces el álgebra asociada a la unión disjunta $\bigoplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle$, $A(\bigoplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle)$, es isomorfa al producto directo $\prod_{i \in I} A(\langle M_i, R_i \rangle)$ de las álgebras asociadas a los marcos de la familia.

Prueba: Consideremos la función $f: \bigcup \{M_i \times \{i\} : i \in I\} \rightarrow \prod_{i \in I} P(M_i)$ definida por

$$f(X)(i) = \{u \in M_i : \langle u, i \rangle \in X\}.$$

Entonces: i) f es inyectiva. ii) f es sobre $\prod_{i \in I} P(M_i)$: Dada $g \in \prod_{i \in I} P(M_i)$, consideremos el conjunto $X_g = \bigcup \{g(i) \times \{i\} : i \in I\}$. Entonces, $f(X_g)(i) = g(i)$. iii) f respeta las operaciones de las álgebras: No hay dificultad en comprobar que respeta la intersección, la unión, el complementario, el cero y el uno. Para el caso de la operación I (correspondiente a τ) tenemos que

$$\begin{aligned} f(I(X))(i) &= \{u \in M_i : \langle u, i \rangle \in I(X)\} \\ &= \{u \in M_i : \forall v \in M_i (u R_i v \rightarrow \langle v, i \rangle \in X)\} \\ &= I_i f(X)(i), \end{aligned}$$

y por tanto, $f(I(X)) = \tau f(X)$. $\square$

PROPOSICIÓN 11.4: Si f es un p -morfismo de $M_1 = \langle M_1, R_1 \rangle$ en $M_2 = \langle M_2, R_2 \rangle$, entonces la función $h: P(M_2) \rightarrow P(M_1)$ definida por

$$h(X) = f^{-1}[X]$$

es un homomorfismo del álgebra $A(M_2)$ en el álgebra $A(M_1)$.

Prueba: Es fácil ver que h respeta la intersección, la unión, el complementario, y asigna el cero al cero y el uno al uno. Además, tenemos que $h(I_2(X)) = f^{-1}[I_2(X)] = I_1(f^{-1}[X])$. La razón es la siguiente: Si $u \in M_1$ es tal que $f(u) \in I_2(X)$, entonces para todo $v \in M_2$ tal que $f(u)R_2v$, $v \in X$. Ahora bien, si uR_1w entonces, al ser f un p -morfismo, $f(u)R_2f(w)$, y por tanto $f(w) \in X$, con lo cual concluimos que $w \in f^{-1}[X]$. Así, $u \in I_1(f^{-1}[X])$. Por otra parte, si $u \in I_1(f^{-1}[X])$, tenemos que para todo $w \in M_1$ tal que uR_1w , $w \in f^{-1}[X]$. Supongamos que $u \notin f^{-1}[I_2(X)]$. En tal caso $f(u) \notin I_2(X)$. Por tanto existe $v \in M_2$ tal que $f(u)R_2v$ y $v \notin X$. Sea $u' \in M_1$ tal que $f(u') = v$ y uR_1u' , que existe al ser f un p -morfismo. Entonces, $u' \in f^{-1}[X]$, y por tanto, $f(u') \in X$. Pero entonces $v \in X$, lo que es absurdo. Por tanto concluimos que $u \in f^{-1}[I_2(X)]$. ■

PROPOSICIÓN 11.5: Si f es un p -morfismo del marco $M_1 = \langle M_1, R_1 \rangle$ sobre el marco $M_2 = \langle M_2, R_2 \rangle$, la función h de $P(M_2)$ en $P(M_1)$ definida por

$$h(X) = f^{-1}[X]$$

es una inmersión del álgebra $A(M_2)$ en el álgebra $A(M_1)$.

Prueba: Por la proposición anterior h es un homomorfismo. Además es una función inyectiva. La razón es la siguiente: Si $X, Y \subseteq M_2$ son distintos, supongamos que $X \not\subseteq Y$. Sea pues $u \in X$ tal que $u \notin Y$. Sea $v \in M_1$ tal que $f(v) = u$. Un tal v existe al ser la función sobre M_2 . Entonces, v pertenece a $f^{-1}[X]$ pero no a $f^{-1}[Y]$. Si $Y \not\subseteq X$ razonamos de modo similar. ■

Por la proposición anterior tenemos que, si un marco M_2 es una imagen p -mórfica de un marco M_1 , el álgebra $A(M_2)$ es isomorfa a una subálgebra del álgebra $A(M_1)$.

2. En el apartado anterior hemos asociado a cada marco un álgebra modal; ahora asociaremos a cada álgebra modal un marco.

Consideremos un álgebra modal normal cualquiera

$$A = \langle A, \wedge, \vee, *, 0, 1, \tau \rangle.$$

Puesto que $\langle A, \wedge, \vee, *, 0, 1 \rangle$ es un álgebra de Boole, podemos considerar el conjunto de todos sus ultrafiltros

$$\text{St}(A) = \{U: U \text{ es un ultrafiltro en } \langle A, \wedge, \vee, *, 0, 1 \rangle\}.$$

Definamos en $\text{St}(A)$ la relación R_τ mediante:

$$U R_\tau V \text{ si y sólo si } \forall a \in A (\tau a \in U \rightarrow a \in V)$$

$$\text{si y sólo si } \{a \in A : \tau a \in U\} \subseteq V.$$

Observemos la analogía entre la definición de R_τ y la definición de la relación de los marcos canónicos. El operador τ corresponde al signo $\Box$, y los ultrafiltros a los conjuntos maximales L -consistentes.

Para ver de dónde surge la idea de la definición anterior consideremos el modelo canónico de una lógica L , $\langle M_L, R_L, e_L \rangle$, y el álgebra modal determinada por la asignación e_L , cuyo dominio es el conjunto

$$\{e_L(B): B \text{ es una fórmula modal}\}$$

Existe una correspondencia entre los ultrafiltros en esta álgebra y los conjuntos maximales L -consistentes. La correspondencia, que puede comprobar el lector, es la siguiente: Si U es un ultrafiltro en el álgebra, el conjunto $\{B: e_L(B) \in U\}$ es un conjunto de fórmulas modales maximal y L -consistente. Y si Σ es un conjunto de fórmulas maximal y L -consistente, el conjunto $\{e_L(B): B \in \Sigma\}$ es un ultrafiltro en el álgebra. Además ocurre que si Σ y Δ son conjuntos maximales y L -consistentes, y llamamos τ_L al operador del álgebra e_L ,

$$\begin{aligned} \Sigma R_L \Delta \text{ syss para toda fórmula } B, \text{ si } \Box B \in \Sigma \text{ entonces } B \in \Delta \\ \text{syss para toda fórmula } B, \text{ si } \Sigma \in e_L(\Box B) \text{ entonces } \Delta \in e_L(B) \\ \text{syss para toda fórmula } B, \text{ si } \tau_L(B) \in \{e_L(C): C \in \Sigma\} \\ \text{entonces } e_L(B) \in \{e_L(C): C \in \Delta\} \\ \text{syss } \{e_L(C): C \in \Sigma\} (R_L)_\tau \{e_L(C): C \in \Delta\} \end{aligned}$$

Debe recordarse la definición, dada en el capítulo 10, del operador

τ en el álgebra determinada por la asignación de un modelo:
 $\tau(e(B)) = e(\Box B)$.

El marco que asociamos al álgebra A es el marco

$$M(A) = \langle St(A), R_\tau \rangle.$$

La correspondencia $M(\cdot)$ no tiene propiedades tan buenas como la correspondencia $A(\cdot)$. En esta última, para cada marco M , en M y en $A(M)$ son válidas exactamente las mismas fórmulas modales. Ahora bien, para la correspondencia $M(\cdot)$ únicamente tenemos que para cada álgebra modal A , toda fórmula válida en $M(A)$ es válida también en A . Sin embargo, hay álgebras que poseen fórmulas válidas que no lo son en el marco asociado. La razón de ello se debe a que en el marco asociado a un álgebra infinita hay más posibles falsadores que en el álgebra inicial. Para verlo con claridad estudiemos un ejemplo.

Consideremos el álgebra de los subconjuntos finitos y cofinitos del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Definamos en ella un operador τ mediante:

$$\tau(X) = \{n \in \mathbb{N} : \forall m < n \ m \in X\}.$$

El álgebra resultante es una álgebra modal normal puesto que:

- i) $\tau(X \cap Y) = \{n \in \mathbb{N} : \forall m < n \ m \in X \cap Y\} = \{n \in \mathbb{N} : \forall m < n \ m \in X\} \cap \{n \in \mathbb{N} : \forall m < n \ m \in Y\} = \tau(X) \cap \tau(Y)$.
- ii) $\tau(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

Obsérvese que para cada conjunto X finito o cofinito de números naturales:

- 1) Si X es distinto de $\mathbb{N}$, $\tau(X)$ es finito.
- 2) $\tau(X) = \mathbb{N}$ si y sólo si $X = \mathbb{N}$.

En el álgebra modal definida es válida la fórmula $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$. La razón de ello es que para cada subconjunto finito o cofinito X de números naturales ocurre que

$$\tau(\tau(X) \Rightarrow X) \subseteq \tau(X),$$

puesto que $\tau(\tau(X) \Rightarrow X) = \{n \in \mathbb{N}: (\forall m < n) ((\forall r < m) (r \in X) \rightarrow m \in X)\}$ y este último conjunto está incluido en $\{n \in \mathbb{N}: \forall m < n, m \in X\} = \tau(X)$. La razón es la siguiente: si n es tal que $(\forall m < n) ((\forall r < m) (r \in X) \rightarrow m \in X)$, y $m < n$, entonces, caso de que $m \notin X$, podemos considerar el menor r tal que r es menor que n y $r \notin X$. Entonces $\forall s < r, s \in X$, pero, al ser $r < n$, tenemos que r pertenece a X , lo que es absurdo.

Por lo anterior tenemos que el álgebra que estamos considerando es una GL-álgebra. Ahora bien, el marco asociado a la misma no es un GL-marco. Para verlo, consideremos el ultrafiltro cuyos elementos son los subconjuntos cofinitos de números naturales. Este ultrafiltro es no-principal. Llamémosle U . Entonces: $UR_\tau U$. La razón es la siguiente: Si X es cofinito y $\tau(X) \in U$, X es $\mathbb{N}$, y por tanto $X \in U$. Por tanto, la relación R_τ no es inversamente bien fundada, y el marco no es un GL-marco.

LEMA 11.6: Si s es una asignación en el álgebra A y e es la asignación en el marco $M(A)$ tal que para cada letra sentencial p

$$e(p) = \{U \in \text{St}(A): s(p) \in U\},$$

entonces para toda fórmula modal B

$$e(B) = \{U \in \text{St}(A): s(B) \in U\}.$$

Prueba: Por inducción. Por la definición de e , vale para las letras sentenciales, y es obvio que vale para $\perp$. Demostremoslo para el caso del condicional. Supongamos que vale para B y C . Entonces

$$\begin{aligned} e(B \rightarrow C) &= (\text{St}(A) - e(B)) \cup e(C) \\ &= \{U \in \text{St}(A): s(B) \notin U\} \cup \{U \in \text{St}(A): s(C) \in U\} \\ &\quad (\text{hip. inductiva}) \\ &= \{U \in \text{St}(A): s(B)^* \in U\} \cup \{U \in \text{St}(A): s(C) \in U\} \\ &\quad \text{por las propiedades de los ultrafiltros} \\ &= \{U \in \text{St}(A): (s(B)^* \vee s(C)) \in U\} \text{ por las propiedades de los ultrafiltros} \\ &= \{U \in \text{St}(A): s(B \rightarrow C) \in U\} \end{aligned}$$

Para demostrarlo para el caso de las fórmulas de tipo $\Box B$, supongamos que vale para B . En tal caso

$$\begin{aligned} e(\Box B) &= \{U \in \text{St}(A): \forall V \in \text{St}(A) (U R_{\tau} V \rightarrow V \in e(B))\} \\ &= \{U \in \text{St}(A): \forall V \in \text{St}(A) (U R_{\tau} V \rightarrow s(B) \in V)\} \text{ por} \\ &\quad \text{hip. inductiva} \\ &= \{U \in \text{St}(A): \tau s(B) \in U\}, \end{aligned}$$

la justificación de la última igualdad es la siguiente: Si $\tau s(B) \in U$ y $U R_{\tau} V$, tenemos que $\forall a \in A (\tau a \in U \rightarrow a \in V)$ y por tanto tenemos que $s(B) \in V$. Por otra parte, si U es un ultrafiltro que verifica que $\forall V \in \text{St}(A) (U R_{\tau} V \rightarrow s(B) \in V)$, tenemos que $s(B)$ pertenece a todo ultrafiltro V que incluya al conjunto $\{a \in A : \tau a \in U\}$. En tal caso el conjunto $\{a \in A : \tau a \in U\} \cup \{s(B)^*\}$ no tiene la propiedad de las intersecciones finitas, pues si la tuviese, por el teorema del ultrafiltro, existiría un ultrafiltro V que lo extendería; pero entonces $s(B) \in V$, lo que es absurdo. Existen, pues, elementos $a_1, \dots, a_n$ de A tales que $\tau a_1, \dots, \tau a_n \in U$ y $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \wedge s(B)^* = 0$. Entonces $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \leq s(B)$, y por tanto $\tau a_1 \wedge \dots \wedge \tau a_n$ es menor o igual que $\tau s(B)$, con lo que concluimos que $\tau s(B) \in U$. $\blacksquare$

PROPOSICIÓN 11.7: *Si A es un álgebra modal entonces toda fórmula modal válida en $M(A)$ es válida en A .*

Prueba: Supongamos que B es una fórmula modal que no es válida en A . Entonces existe una asignación s en A tal que $s(B) \neq 1$. En tal caso existe un ultrafiltro al que no pertenece $s(B)$. Por tanto, la asignación e en el marco $M(A)$ definida como en el enunciado del lema 11.6 es tal que $e(B) \neq \text{St}(A)$. Pero en tal caso B no es válida en $M(A)$. $\blacksquare$

Hemos asociado a cada marco un álgebra modal, y a cada álgebra modal un marco. Si, dada un álgebra modal A , consideramos el álgebra $A(M(A))$, ¿obtenemos (salvo isomorfismo) el álgebra original? La respuesta es que no necesariamente. Si $A(M(A))$ y A fuesen isomorfas, en ellas serían válidas las mismas fórmulas. Pero, puesto que en $A(M(A))$ y en $M(A)$ son válidas exactamente las mismas fórmulas (Proposición 11.1), tendríamos que en A y en $M(A)$ serían válidas las mismas fórmulas, y, como hemos visto, éste no es necesariamente el caso. Hay además una razón de cardinalidad: Para toda álgebra modal A el cardinal de su dominio es

menor o igual que el cardinal de $\text{St}(A)$, y el cardinal del dominio de $A(M(A))$, que es $P(\text{St}(A))$, es mayor que el cardinal de $\text{St}(A)$. Por tanto el cardinal del dominio de A es menor que el cardinal del dominio de $A(M(A))$.

Por otra parte, si consideramos un marco M y el marco $M(A(M))$, tampoco deben ser necesariamente isomorfos. Toda fórmula válida en $M(A(M))$ es válida en $A(M)$ y por tanto en M . Ahora bien, pueden existir fórmulas válidas en M que, sin embargo, no lo son en $M(A(M))$. Veamos un ejemplo: En el marco $\langle \mathbb{N}, > \rangle$ es válida la fórmula $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$. Por tanto lo es en el álgebra $A(\langle \mathbb{N}, > \rangle) = \langle P(\mathbb{N}), \cap, \cup, -, 0, 1, I \rangle$ asociada. Aquí, para cada conjunto X de números naturales tenemos que $I(X) = \{n : \forall m < n \ m \in X\}$. En el marco asociado a esta álgebra todo ultrafiltro no principal está relacionado consigo mismo. Por tanto no es un GL-marco.

En el último caso también existe una razón de cardinalidad para que M y $M(A(M))$ no sean isomorfos: El cardinal de $P(M)$ es mayor que el de M , y el de $\text{St}(P(M))$ es mayor o igual que el de $P(M)$.

Estudiemos ahora las relaciones entre las construcciones que hemos considerado para álgebras modales (imágenes homomorfas, productos directos y subálgebras) y las que hemos considerado para marcos (submarcos generados, uniones disjuntas e imágenes p-mórficas) cuando las aplicamos a los marcos asociados a las álgebras.

PROPOSICIÓN 11.8: *Si A_1 es una subálgebra de A_2 , entonces la función f de $\text{St}(A_2)$ en $\text{St}(A_1)$ definida por: para cada $U \in \text{St}(A_2)$*

$$f(U) = U \cap A_1,$$

es un p-morfismo del marco $M(A_2)$ sobre el marco $M(A_1)$. Así, $M(A_1)$ es una imagen p-mórfica de $M(A_2)$.

Prueba: a) f es sobre $\text{St}(A_1)$: Si $U \in \text{St}(A_1)$, entonces U es un subconjunto de A_2 con la propiedad de las intersecciones finitas. Por el teorema del ultrafiltro existe un ultrafiltro en A_2 , V , que lo extiende. Entonces, $f(V) = U$.

b) f es un p-morfismo : i) Si $U, V \in \text{St}(A_2)$ y $U R_{\tau_2} V$ entonces ocurre que $\forall a \in A_2 (\tau_2 a \in U \rightarrow a \in V)$. Por tanto, si $b \in A_1$ y $\tau_1 b \in f(U)$, $\tau_1 b \in U$. Y puesto que $\tau_1 b = \tau_2 b$, $b \in V$. Por

tanto, $b \in f(V)$. Así, podemos concluir que $f(U)R_{\tau_1}f(V)$. ii) Si $f(U)R_{\tau_1}f(V)$, consideremos el conjunto siguiente

$$E = f(V) \cup \{a \in A_1 : \tau_1 a \in U\}.$$

E tiene la propiedad de las intersecciones finitas (lo que puede comprobar el lector). Por el teorema del ultrafiltro, sea V' un ultrafiltro en A_2 que extiende a E . Entonces, $f(V') = f(V)$ y $UR_{\tau_2}V'$. $\square$

PROPOSICIÓN 11.9: Si f es un homomorfismo de A_1 sobre A_2 , entonces la función $m(f): M(A_2) \rightarrow M(A_1)$ definida por: para cada $U \in \text{St}(A_2)$

$$m(f)(U) = f^{-1}[U],$$

es un p-morfismo inyectivo, y $m(f)[M(A_2)]$ es un submarco generado de $M(A_1)$. Y por tanto $M(A_2)$ es isomorfo a un submarco generado de $M(A_1)$.

Prueba: a) La función está bien definida puesto que para todo ultrafiltro en A_2 , U , $f^{-1}[U]$ es un ultrafiltro en A_1 .

b) $m(f)$ es inyectiva, puesto que f es sobre A_2 .

c) $m(f)$ es un p-morfismo: i) Supongamos que $U, V \in \text{St}(A_2)$ y $UR_{\tau_2}V$. Entonces, si $a \in A_1$ y $\tau_1 a \in m(f)(U)$, $f(\tau_1 a) \in U$, y por tanto $\tau_2 f(a) \in U$, con lo que tenemos que $f(a) \in V$. Por tanto $a \in m(f)(V)$. Así, $m(f)(U)R_{\tau_1}m(f)(V)$. ii) Si $m(f)(U)R_{\tau_1}X$, con $U \in \text{St}(A_2)$ y $X \in \text{St}(A_1)$, el conjunto

$$E = \{f(a) : a \in X\} \cup \{a \in A_2 : \tau a \in U\},$$

tiene la propiedad de las intersecciones finitas. Por tanto existe un ultrafiltro V en A_2 tal que $E \supseteq V$. Entonces, $UR_{\tau_2}V$ y $m(f)(V) = X$.

Por la proposición 8.10 $m(f)[M(A_2)]$ es un submarco generado de $M(A_1)$. $\square$

PROPOSICIÓN 11.10: Si $\langle A_i : i \in I \rangle$ es una familia de álgebras modales y consideramos el marco asociado a su producto directo

$$M(\prod_{i \in I} A_i),$$

entonces la unión disjunta de los marcos asociados a las álgebras de la familia,

$$\bigoplus_{i \in I} M(A_i),$$

es isomorfa a un submarco generado de $M(\prod_{i \in I} A_i)$.

Prueba: Consideremos la función

$$h: U \times \{i\} \rightarrow \text{St}(\prod_{i \in I} A_i)$$

definida por:

$$h(U \times \{i\}) = \{g \in \prod_{i \in I} A_i : g(i) \in U\}$$

Entonces:

a) El recorrido de h está incluido en $\text{St}(\prod_{i \in I} A_i)$: Basta comprobar que para cada $i \in I$, $h(U \times \{i\})$ es un ultrafiltro en $\prod_{i \in I} A_i$. Ello se sigue de que U es un ultrafiltro.

b) h es inyectiva: Si $U \times \{i\} \neq V \times \{j\}$, y $i = j$, entonces $U \neq V$, y por tanto $h(U \times \{i\}) \neq h(V \times \{j\})$. Si $i \neq j$, sean $a \in U$ y $g \in \prod_{i \in I} A_i$ tales que $g(i) = a$ y para todo $j \in I$ distinto de i , $g(j) = 0_j$. Entonces, $g \in h(U \times \{i\})$ pero g no pertenece a $h(V \times \{j\})$.

c) h es un p-morfismo: i) Si $U \times \{i\} R_{\oplus} V \times \{j\}$ ($R_{\oplus}$ es la relación de la unión disjunta), entonces $i = j$ y $U R_{\tau_i} V$. Por tanto, si $g \in h(U \times \{i\})$, entonces $(\tau_i g)(i) \in U$, y así, $\tau_i g(i) \in U$. Por tanto, $g(i) \in V$. Concluimos pues que $h(U \times \{i\}) R_{\tau_i} h(V \times \{j\})$. ii) Si $h(U \times \{i\}) R_{\tau_i} W$, donde W es un ultrafiltro en $\prod_{i \in I} A_i$, consideremos el conjunto $V = \{f(i) : f \in W\}$ que es un ultrafiltro en A_i (el lector puede comprobarlo). Entonces $h(V \times \{i\}) = W$, pues si $f(i) \in V$ y $f \notin W$, al ser W un ultrafiltro, $f^* \in W$, pero entonces $f(i)^* \in V$ y esto es imposible. Por otra parte, para ver que $U \times \{i\} R_{\oplus} V \times \{i\}$, demostremos que $U R_{\tau_i} V$. Supongamos pues que $\tau_i a \in U$. Sea $g \in \prod_{i \in I} A_i$ tal que $g(i) = a$. Entonces $(\tau_i g)(i) = \tau_i a$. Por tanto $\tau_i g \in h(U \times \{i\})$. Así, $g \in h(V \times \{i\})$, y por tanto $g(i) = a \in V$.

Por la proposición 8.10 concluimos lo deseado. $\square$

3. En el §1 de este capítulo hemos visto cómo asociar a cada marco una álgebra modal, y en el §2 cómo asociar un marco a cada álgebra modal. Si partimos de un marco $\langle M, R \rangle$, tenemos que el marco $M(A(\langle M, R \rangle))$ tiene por dominio el conjunto de todos los

ultrafiltros sobre M y por relación la relación R_τ tal que para cada par de ultrafiltros U y V sobre M

$$UR_\tau V \text{ si y sólo si } \forall X \subseteq M (I(X) \in U \rightarrow X \in V).$$

Al marco $M(A(\langle M, R \rangle))$ lo llamaremos la *extensión por ultrafiltros* del marco $\langle M, R \rangle$, y nos referiremos a él con $eu(\langle M, R \rangle)$. A su dominio nos referiremos con $eu(M)$, y a su relación con R_{eu} . Así:

$$eu(M) = \{U : U \text{ es un ultrafiltro sobre } M\}$$

y

$$R_{eu} = \{\langle U, V \rangle : U, V \in eu(M) \text{ y } \forall X \subseteq M (I(X) \in U \rightarrow X \in V)\}$$

Así como la operación I en $P(M)$ corresponde al símbolo $\Box$, al símbolo $\Diamond$ corresponde la operación m en $P(M)$ definida por

$$m(X) = \{u \in M : \exists v \in M (uRv \wedge v \in X)\}.$$

El lector puede comprobar que para cada $X \subseteq M$

- i) $m(X) = M - I(M - X)$
- ii) $I(X) = M - m(M - X)$
- iii) Si $X \subseteq Y$ entonces $I(X) \subseteq I(Y)$
- iv) $I(X \cap Y) = I(X) \cap I(Y)$
- v) $R_{eu} = \{\langle U, V \rangle : U, V \in eu(M) \text{ y } \forall X \subseteq M (X \in V \rightarrow m(X) \in U)\}.$

TEOREMA 11.11: *Para todo marco $\langle M, R \rangle$ y toda fórmula modal B*

$$\text{Si } eu(\langle M, R \rangle) \models B \text{ entonces } \langle M, R \rangle \models B.$$

Prueba: Si B es válida en $eu(\langle M, R \rangle)$, entonces, puesto que $eu(\langle M, R \rangle)$ es $M(A(\langle M, R \rangle))$, por la proposición 11.7, B es válida en el álgebra $A(\langle M, R \rangle)$. Por tanto, por la proposición 11.1, B es válida en $\langle M, R \rangle$. $\square$

La inversa del teorema no se cumple: una fórmula puede ser válida en un marco $\langle M, R \rangle$ pero no serlo en su extensión por ultrafiltros. Recordemos el ejemplo del comentario que sigue a la proposición 11.7. La fórmula $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$ es válida en el marco $\langle \mathbb{N}, > \rangle$, pero no lo es en $M(A(\langle \mathbb{N}, > \rangle))$, que es la extensión por ultrafiltros de $\langle \mathbb{N}, > \rangle$.

El marco $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ y su extensión por ultrafiltros podemos utilizarlos para demostrar que la clase de modelos de la sentencia $\forall x \exists y (Rxy \wedge Ryy)$ no es la clase de marcos de ninguna lógica modal. Evidentemente, tal sentencia es falsa en el marco $\langle \mathbb{N}, < \rangle$. Sin embargo, es verdadera en su extensión por ultrafiltros. Para verlo, basta demostrar que todo ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ está relacionado con todo ultrafiltro no-principal sobre $\mathbb{N}$. Por tanto, si la clase de marcos modelo de la sentencia fuese definible mediante un conjunto de fórmulas modales, puesto que la sentencia es verdadera en la extensión por ultrafiltros de $\langle \mathbb{N}, < \rangle$, en la misma debería ser válida toda fórmula del conjunto en cuestión, y, por el teorema anterior, toda fórmula perteneciente a éste debería ser válida en $\langle \mathbb{N}, < \rangle$. Entonces, en este último marco debería ser verdadera la sentencia $\forall x \exists y (Rxy \wedge Ryy)$, y esto no es así. Se deja como ejercicio el completar la prueba anterior.

A continuación vamos a demostrar un lema que se inspira, tanto en el enunciado como en la prueba, en el lema 9.19 de K. Fine (Fine [1975]), y que necesitaremos posteriormente. Su prueba es especialmente bonita, pero quizás exija al lector ciertos conocimientos de teoría de modelos que no posea. En tal caso puede omitirla perfectamente pero debe recordar el lema, cuyo enunciado no exige para su comprensión nada especial.

LEMA 11.12 (K. Fine): *Para todo marco $\langle M, R \rangle$ existe un marco $\langle M', R' \rangle$ elementalmente equivalente tal que la extensión por ultrafiltros de $\langle M, R \rangle$ es una imagen p-mórfica del mismo.*

Prueba: Consideremos un marco cualquiera $\langle M, R \rangle$, y el lenguaje de primer orden con identidad en tipo de semejanza $\{R\}$. Extendamos este tipo de semejanza introduciendo un predicado monádico P_X para cada subconjunto X de M . Consideremos la expansión de $\langle M, R \rangle$, $M_1 = \langle M, R, \langle X \rangle_{X \subseteq M} \rangle$, a tal lenguaje. Consideremos una extensión elemental $M' = \langle M', R', \langle P_X^{M'} \rangle_{X \subseteq M} \rangle$ de M_1 2-saturada (saturada respecto a los conjuntos de fórmulas

que contienen a lo sumo un parámetro en M'). Definamos una función

$$f: M' \rightarrow \text{eu}(M)$$

mediante: para cada elemento $w \in M'$

$$f(w) = \{X \subseteq M: w \in P_X^{M'}\}.$$

Debemos ver que: a) la función lo es de M' en $\text{eu}(M)$. b) es sobre $\text{eu}(M)$. Y c) es un p-morfismo.

a) Para cada $w \in M'$, $f(w)$ es un ultrafiltro sobre M . La razón es la siguiente: las sentencias $\forall z (\neg P_{Xz} \leftrightarrow P_{M-Xz})$, $\forall z (P_{Xz} \wedge P_{Yz} \leftrightarrow P_{X \cap Yz})$ y $\forall z \neg P_{\emptyset z}$ son verdaderas en M_1 para cada $X, Y \subseteq M$, y por tanto son verdaderas en M' .

b) f es sobre $\text{eu}(M)$. Dado un ultrafiltro U sobre M , consideremos el conjunto de fórmulas $\{P_{Xz} : X \in U\}$. Este conjunto es finitamente satisfactible en M_1 al ser U un ultrafiltro. Por tanto lo es en M' . Como M' es saturado, es satisfactible en M' . Sea pues $w \in M'$ tal que para cada $X \in U$, $w \in P_X^{M'}$. Tenemos que $f(w) = \{X \subseteq M : w \in P_X^{M'}\}$. Pero este último conjunto es el ultrafiltro U ya que, si $w \in P_X^{M'}$ y $X \notin U$, entonces $M - X \in U$, y por tanto $w \in P_{M-X}^{M'}$. Ahora bien, esto último es imposible puesto que en M' es verdadera la sentencia $\forall z (\neg P_{Xz} \leftrightarrow P_{M-Xz})$.

c) f es un p-morfismo: i) Si $u, v \in M'$ y $uR'v$, para ver que $f(u)R_{\text{eu}}f(v)$, bastará con ver que para todo $X \subseteq M$, si $\tau(X) \in f(u)$ entonces $X \in f(v)$, es decir que para todo $X \subseteq M$, si $u \in P_{I(X)}^{M'}$ entonces $v \in P_X^{M'}$. En M_1 vale la sentencia $\forall yz (P_{\tau(X)y} \wedge Ryz \rightarrow P_{Xz})$. Por tanto vale en M' , con lo cual tenemos lo deseado. ii) Si $f(w)R_{\text{eu}}U$, para ver que existe $v \in M'$ tal que $f(v) = U$ y $wR'v$, consideremos el conjunto de fórmulas

$$\Sigma = \{P_{Xz} : X \in U\} \cup \{R\bar{w}z\}.$$

Este conjunto de fórmulas es finitamente satisfactible en M' , puesto que si $X_1, \dots, X_n \in U$, el conjunto $X = X_1 \cap \dots \cap X_n \in U$. Por tanto $M - I(M-X)$ pertenece a $f(w)$ al tener que $f(w)R_{\text{eu}}U$. Por tanto $w \in P_{M-I(M-X)}^{M'}$. Por consiguiente, el conjunto $\{P_{X_1z}, \dots, P_{X_nz}, R\bar{w}z\}$ es satisfactible al ser verdadera en M_1 , y por tanto en M' , la sentencia $\forall y (P_{M-I(M-X)y} \rightarrow \exists z (Ryz \wedge P_{Xz}))$. Puesto que

M' es saturado para conjuntos de fórmulas con un parámetro en M' , tenemos que Σ es satisfacible en M' . Sea pues $v \in M'$ que satisface Σ . Entonces resulta que $w R'v$ y para todo $X \in U$, $v \in P_X^{M'}$. Por tanto $f(v) = U$. $\square$

4. En este apartado vamos a estudiar la caracterización de Goldblatt y Thomason de las clases de marcos cerradas bajo equivalencia elemental que son definibles por un conjunto de fórmulas modales. Para ello establezcamos primero el siguiente lema:

LEMA 11.13: *Toda clase de marcos cerrada bajo submarcos generados, uniones disjuntas e imágenes p-mórficas y tal que tanto ella como su complemento están cerrados bajo la formación de extensiones por ultrafiltros, es una clase de marcos definible por un conjunto de fórmulas modales, o lo que es equivalente, es la clase de marcos de una lógica modal.*

Prueba: Supongamos que C es una clase de marcos cerrada bajo submarcos generados, uniones disjuntas, imágenes p-mórficas y extensiones por ultrafiltros, y cuyo complemento también está cerrado bajo la formación de extensiones por ultrafiltros. Vamos a demostrar que C es precisamente la clase de los marcos en los que son válidas todas las fórmulas modales que son válidas en todo marco perteneciente a C es decir, que $C = C(L(C))$.

Supongamos que $\langle M, R \rangle$ es un marco en el que son válidos todos los teoremas de la lógica de C . Entonces el álgebra $A(\langle M, R \rangle)$ es un modelo de la teoría ecuacional de la clase de álgebras $\{A(\langle M', R' \rangle) : \langle M', R' \rangle \in C\}$. Por el teorema de Birkhoff, $A(\langle M, R \rangle)$ es una imagen homomorfa de una subálgebra de un producto directo $\prod_{i \in I} A(\langle M_i, R_i \rangle)$ de álgebras pertenecientes a la clase. Puesto que $\prod_{i \in I} A(\langle M_i, R_i \rangle)$ es isomorfa a $A(\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle)$, tenemos que:

1) $A(\langle M, R \rangle)$ es una imagen homomorfa de una subálgebra, A , de $A(\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle)$.

Entonces:

2) $M(A(\langle M, R \rangle))$ es isomorfo a un submarco generado de $M(A)$, y $M(A)$ es una imagen p-mórfica de $M(A(\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle))$. Ahora bien, $M(A(\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle)) = eu(\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle)$, y puesto que C está cerrada bajo uniones disjuntas y formación de extensiones por ultrafiltros, resulta que $eu(\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle)$ pertenece a C . Por tanto, al estar C cerrada bajo imágenes p-mórficas, tenemos que

$M(A)$ pertenece a C , y al estar C cerrada bajo submarcos generados e imágenes p-mórficas, $M(A(\langle M, R \rangle)) = eu(\langle M, R \rangle)$ también pertenece a C . Por tanto, $\langle M, R \rangle$ pertenece a C , puesto que, en caso contrario, $eu(\langle M, R \rangle)$ pertenecería al complemento, al estar éste cerrado bajo formación de extensiones por ultrafiltros. ▮

TEOREMA 11.14 (Goldblatt, Thomason): *Una clase de marcos cerrada bajo equivalencia elemental es definible por un conjunto de fórmulas modales si y sólo si está cerrada bajo submarcos generados, uniones disjuntas e imágenes p-mórficas, y su complemento está cerrado bajo la formación de extensiones por ultrafiltros.*

Prueba: i) Si una clase de marcos está cerrada bajo equivalencia elemental y es definible por un conjunto de fórmulas modales, está cerrada bajo submarcos generados, uniones disjuntas e imágenes p-mórficas. Por otra parte, si $\langle M, R \rangle$ es un marco que no pertenece a la clase, existe una fórmula modal, B , que es válida en todo marco de la clase y no lo es en $\langle M, R \rangle$. Pero entonces B no es válida en $eu(\langle M, R \rangle)$. Por tanto el complemento de nuestra clase de marcos está cerrado bajo la formación de extensiones por ultrafiltros.

ii) Supongamos que C es una clase de marcos cerrada bajo equivalencia elemental y cerrada bajo submarcos generados, uniones disjuntas e imágenes p-mórficas, y cuyo complemento está cerrado bajo la formación de extensiones por ultrafiltros. Vamos a demostrar que C está cerrada bajo extensiones por ultrafiltros. La razón es la siguiente: Si $\langle M, R \rangle$ pertenece a C , por el lema 11.12 existe un marco $\langle M', R' \rangle$ elementalmente equivalente a $\langle M, R \rangle$ tal que la extensión por ultrafiltros de $\langle M, R \rangle$, $eu(\langle M, R \rangle)$, es una imagen p-mórfica de $\langle M', R' \rangle$. Ahora bien, puesto que C es una clase cerrada bajo equivalencia elemental, $\langle M', R' \rangle$ pertenece a C . Por tanto, ya que C está cerrada bajo imágenes p-mórficas, $\langle M, R \rangle$ pertenece a C . Por el lema anterior concluimos que C es una clase de marcos definible mediante un conjunto de fórmulas modales. ▮

En el teorema anterior, ninguna de las condiciones puede debilitarse. Veámoslo con ejemplos.

1. La colección de los marcos irreflexivos está cerrada bajo submarcos generados y uniones disjuntas, pero no lo está bajo

imágenes p-mórficas. Por otro lado, si un marco no es irreflexivo, su extensión por ultrafiltros tampoco lo es. Para verlo basta considerar, dado un índice del marco relacionado consigo mismo, el ultrafiltro generado por éste.

2. La clase de marcos definida por la sentencia $\forall x \exists y Rxy$ está cerrada bajo imágenes p-mórficas y uniones disjuntas. No está cerrada bajo submarcos generados. Su complemento está cerrado bajo extensiones por ultrafiltros.

3. La clase de los marcos con un único elemento está cerrada bajo imágenes p-mórficas, bajo submarcos generados, pero no lo está bajo uniones disjuntas. Su complemento está cerrado bajo extensiones por ultrafiltros.

4. La clase de los marcos definida por la sentencia $\forall x \exists y (Rxy \wedge Ryy)$ está cerrada bajo submarcos generados, uniones disjuntas e imágenes p-mórficas. Su complemento, sin embargo, no está cerrado bajo la formación de extensiones por ultrafiltros. Por ejemplo, el marco $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ no pertenece a la clase pero su extensión por ultrafiltros sí, puesto que todo ultrafiltro está relacionado con todo ultrafiltro no-principal.

EJERCICIOS

11.1. Demostrar que el álgebra asociada a un marco es una álgebra modal normal.

11.2. Completar la prueba de la proposición 11.1.

11.3. Completar la prueba de la proposición 11.2.

11.4. Demostrar la correspondencia entre los ultrafiltros en el álgebra determinada por la asignación de un modelo canónico y los conjuntos maximales y L-consistentes de fórmulas.

11.5. Demostrar que el conjunto E de la prueba de la proposición 11.8 tiene la propiedad de las intersecciones finitas.

11.6. Demostrar que el conjunto E de la prueba de la proposición 11.9 tiene la propiedad de las intersecciones finitas.

11.7. Demostrar los enunciados i) - v) que siguen a la definición de extensión por ultrafiltros.

11.8. Completar la prueba de que la sentencia $\forall x \exists y (Rxy \wedge Ryy)$ es verdadera en la extensión por ultrafiltros de $\langle \mathbb{N}, < \rangle$.

11.9. Demostrar que toda álgebra modal A es inmersible en

$A(M(A))$. Para ello demostrar que la función f de A en $P(St(A))$ definida por

$$f(a) = \{U \in St(A) : a \in U\}$$

es un homomorfismo inyectivo.

11.10. Demostrar que toda álgebra modal finita A es isomorfa a $A(M(A))$. Tener en cuenta que en un álgebra modal finita todos los ultrafiltros son principales. Concluir que, si A es finita, en A y en $A(M(A))$ son válidas exactamente las mismas fórmulas modales.

11.11. Demostrar que todo marco finito M es isomorfo a $M(A(M))$. Concluir que, si M es finito, M y $M(A(M))$ son modalmente equivalentes.

11.12. Hay sólo dos álgebras modales sobre el álgebra de Boole de dos elementos, $\{0,1\}$. Una es aquella en que τ es la identidad. La otra, aquella en que τ es la función constante 1. Demostrar que la lógica de la primera es la lógica Trivial, y que la lógica de la segunda es la lógica Verum.

11.13. Demostrar que si C es una clase de marcos cerrada bajo equivalencia elemental y cerrada bajo extensiones por ultrafiltros, submarcos generados, uniones disjuntas, y tanto C como su complemento están cerradas bajo imágenes p-mórficas, entonces C es definible por un conjunto de fórmulas modales.

11.14. Razonar las afirmaciones de los ejemplos 1, 2, 3 y 4 del final del capítulo.

CAPÍTULO 12

SEMÁNTICA DE MARCOS GENERALES

1. Recordemos que para la semántica de marcos hay lógicas incompletas y que toda lógica es completa tanto en la semántica de modelos como en la semántica algebraica. Thomason (Thomason [1972]) introdujo una nueva semántica, la semántica de marcos generales, que guarda con la semántica de marcos la misma relación que la semántica de modelos generales (de Henkin) para la lógica de segundo orden guarda con la semántica estándar de esta lógica. En la semántica de marcos generales toda lógica modal es completa.

Sabemos que la clase de todas las fórmulas válidas en un modelo $\langle M, R, e \rangle$ no tiene por qué ser una lógica. El problema, recordemos, reside en el hecho de que este conjunto puede no estar cerrado bajo sustitución. Un marco general es una entidad intermedia entre un modelo y un marco. El conjunto de fórmulas válidas en un marco general, a diferencia del conjunto de las fórmulas válidas en un modelo, es una lógica. Pero para cada lógica modal L hay suficientes L -marcos generales como para que toda fórmula que no es un teorema de L no sea válida en algún L -marco general.

Con el fin de llegar a la definición de los marcos generales, consideremos, dado un modelo $\langle M, R, e \rangle$, el álgebra de conjuntos

$$e = \{e(B) : B \text{ es fórmula modal}\}$$

que, como sabemos, está cerrada bajo la operación que a cada subconjunto X de M le asigna el conjunto $\{u \in M : \forall v \in M (u R v \rightarrow v \in X)\}$. Consideremos el conjunto de todas las fórmulas válidas en toda asignación en $\langle M, R \rangle$ que asigna a las letras sentenciales subconjuntos de M pertenecientes al álgebra e . Este conjunto está cerrado bajo sustitución y es, por tanto, una lógica. Resulta que:

PROPOSICIÓN 12.1: *Para cada modelo $\langle M, R, e \rangle$, el conjunto de las fórmulas válidas en toda asignación en $\langle M, R \rangle$ que asigna ele-*

mentos del álgebra e a las letras sentenciales es la mayor lógica incluida en el conjunto de las fórmulas válidas en $\langle M, R, e \rangle$.

Prueba: Basta tener en cuenta que si e' es una asignación que toma valores en el álgebra e , y A es una fórmula cuyas letras sentenciales están entre $p_0, \dots, p_n$, entonces para las fórmulas $B_0, \dots, B_n$ tales que $e'(p_0) = e(B_0), \dots, e'(p_n) = e(B_n)$, se verifica que $e'(A) = e(A(p_0/B_0, \dots, p_n/B_n))$. $\square$

La proposición nos enseña cómo asociar a cada modelo un álgebra modal de conjuntos y una lógica, la determinada por las asignaciones que toman valores en el álgebra. Si en lugar de considerar marcos consideramos unas nuevas entidades formadas por un marco $\langle M, R \rangle$ y una álgebra modal de subconjuntos de M , entidades a las que llamaremos marcos generales, y restringimos las asignaciones que consideramos en la definición de validez a las que toman valores en el álgebra, tendremos, por la proposición anterior, que toda lógica será completa respecto a esta nueva noción de validez. La razón es la siguiente: si B no es un teorema de la lógica L , B no es válida en un modelo $\langle M, R, e \rangle$ de L . Por tanto B no es válida en $\langle M, R, e \rangle$ (según la nueva definición de validez). Ahora bien, puesto que L está incluida en la mayor lógica subconjunto de $\text{Th}(\langle M, R, e \rangle)$, todo teorema de L es una fórmula válida (según la nueva noción) en $\langle M, R, e \rangle$. Por tanto, tenemos un marco general en el que son válidos todos los teoremas de L pero no B .

Siendo más sistemáticos, un *marco general* es un triplo $\langle M, R, P \rangle$ donde $\langle M, R \rangle$ es un marco y P es una colección de subconjuntos de M a la que pertenecen el conjunto vacío y M , y está cerrada bajo las operaciones de unión, intersección, complemento, y además bajo la operación I , que definíamos, recordemos, para cada subconjunto X de M , por

$$I(X) = \{u \in M: \forall v \in M (uRv \rightarrow v \in X)\}.$$

Es decir, P es un álgebra modal de subconjuntos de M , subálgebra del álgebra modal $\langle P(M), \cap, \cup, -, \emptyset, M, I \rangle$.

Una *fórmula modal* B es *válida en un marco general* $\langle M, R, P \rangle$ si y sólo si para toda asignación en $\langle M, R \rangle$ e tal que $e: P \rightarrow P$, $e(B) = M$. Debe observarse que si $e: P \rightarrow P$, la extensión de e a todas las fórmulas es una función de $\text{For}(P)$ en P .

Los marcos pueden verse como un caso particular de marcos generales. A cada marco $\langle M, R \rangle$ le podemos asociar el marco general $\langle M, R, P(M) \rangle$. Es obvio que en ambos marcos, el usual y el general, son válidas exactamente las mismas fórmulas.

Dada una lógica modal normal L , decimos que un marco general $\langle M, R, P \rangle$ es un *L-marco general* si y sólo si todo teorema de L es válido en $\langle M, R, P \rangle$.

Hemos demostrado hace un momento el siguiente teorema:

TEOREMA 12.2 (de completitud para marcos generales): *Para toda lógica modal normal L y toda fórmula modal B :*

Es un teorema de L si y sólo si B es válida en todo L-marco general.

A cada lógica L podemos asociarle el *marco general canónico*, el marco que obtenemos a partir del modelo canónico $\langle M_L, R_L, e_L \rangle$ considerando el álgebra determinada por e_L , e_L . Es el marco general $\langle M_L, R_L, e_L \rangle$. El Corolario 5.6 nos dice que la teoría modal del modelo canónico de L es L . Por tanto la lógica del marco general canónico de L es también L . Ello nos proporciona otra prueba del teorema de completitud para marcos generales.

El marco general canónico de una lógica tiene, como veremos más adelante, estrecha relación con el álgebra de Lindenbaum-Tarski de la misma. Por otra parte, es evidente que existe una estrecha relación entre marcos generales y álgebras modales.

2. Para marcos generales tenemos también las nociones de submarco general generado, p -morfismo, y unión disjunta. Definémoslas.

$\langle M, R, P \rangle$ es un *submarco general generado* de $\langle M', R', P' \rangle$ si y sólo si $\langle M, R \rangle$ es un submarco generado de $\langle M', R' \rangle$ y además $P = \{X \cap M : X \in P'\}$.

Una función $h: M \rightarrow M'$ es un *p-morfismo* del marco general $\langle M, R, P \rangle$ en el marco general $\langle M', R', P' \rangle$ si y sólo si es un p -morfismo de $\langle M, R \rangle$ en $\langle M', R' \rangle$ y además $\{h^{-1}[X] : X \in P'\} \subseteq P$.

Una función $h: M \rightarrow M'$ es una *inmersión* del marco general $\langle M, R, P \rangle$ en el marco general $\langle M', R', P' \rangle$ si y sólo si es un p -morfismo inyectivo tal que para cada $X \in P$, existe $Y \in P'$ tal que $h[X] = h[M] \cap Y$.

Una función $h: M \rightarrow M'$ es un *isomorfismo* entre el marco ge-

neral $\langle M, R, P \rangle$ y el marco general $\langle M', R', P' \rangle$ si y sólo si es una inversión de $\langle M, R, P \rangle$ sobre $\langle M', R', P' \rangle$.

Es fácil comprobar que una función $h: M \rightarrow M'$ es un isomorfismo entre el marco general $\langle M, R, P \rangle$ y el marco general $\langle M', R', P' \rangle$ si y sólo si es una biyección entre M y M' tal que:

- i) Para cada $u, v \in M$, uRv si y sólo si $h(u)R'h(v)$
- ii) $P' = \{h[X]: X \in P\}$.

La *unión disjunta* de una familia $\langle \langle M_i, R_i, P_i \rangle: i \in I \rangle$ no vacía de marcos generales es el marco general $\langle M_\oplus, R_\oplus, P_\oplus \rangle$, donde

$$P_\oplus = \{X \subseteq M_\oplus: \forall i \in I X \cap M_i \in P_i\}$$

(La notación que usamos es la introducida en el capítulo 8 al definir la noción de unión disjunta de marcos.)

Para submarcos generales generados vale el enunciado correspondiente al del corolario 8.9, lo que puede demostrar el lector. Por tanto las fórmulas modales se preservan bajo submarcos generales generados.

Para p-morfismos de marcos generales sobre marcos generales vale el enunciado correspondiente al del corolario 8.3. Por tanto las fórmulas modales se preservan bajo imágenes p-mórficas de marcos generales.

Por último, para uniones disjuntas de familias de marcos generales vale el enunciado correspondiente al del teorema 8.12. Por tanto las fórmulas modales se preservan bajo uniones disjuntas.

3. Estudiemos ahora la relación que existe entre marcos generales y álgebras modales.

A cada marco general $\langle M, R, P \rangle$ le corresponde un álgebra modal, el álgebra $\langle P, \cap, \cup, -, \emptyset, M, I \rangle$. Y puesto que las asignaciones en el marco son asignaciones en el álgebra, y viceversa, ocurre que en el marco general y en el álgebra asociada son válidas exactamente las mismas fórmulas modales.

A menudo, si $M = \langle M, R \rangle$, para referirnos al marco general $\langle M, R, P \rangle$, escribiremos $\langle M, P \rangle$. Al álgebra asociada a $\langle M, P \rangle$ nos referiremos con $A(\langle M, P \rangle)$, o con $A(\langle M, R, P \rangle)$ según convenga.

Como en el caso de los marcos y sus álgebras modales asociadas, para los marcos generales y sus álgebras tenemos una corres-

pondencia entre las nociones de submarco general generado, p-morfismo, y unión disjunta, por un lado, y las de imagen homomorfa, subálgebra y producto directo, por otro. La correspondencia es la siguiente:

12.3. Si $\langle M_1, P_1 \rangle$ es un submarco general generado de $\langle M_2, P_2 \rangle$, el álgebra $A(\langle M_1, P_1 \rangle)$ es una imagen homomorfa del álgebra $A(\langle M_2, P_2 \rangle)$.

12.4. Si $\langle M_2, P_2 \rangle$ es una imagen p-morfica de $\langle M_1, P_1 \rangle$, el álgebra $A(\langle M_2, P_2 \rangle)$ es isomorfa a una subálgebra del álgebra $A(\langle M_1, P_1 \rangle)$.

12.5. Si $\langle \langle M_i, P_i \rangle : i \in I \rangle$ es una familia no vacía de marcos generales, el álgebra correspondiente a la unión disjunta de la familia de marcos es isomorfa al producto directo de las álgebras $A(\langle M_i, P_i \rangle)$, con $i \in I$.

Además, es interesante señalar que:

12.6. Si $\langle M_1, P_1 \rangle$ es isomorfo a $\langle M_2, P_2 \rangle$ y f es un isomorfismo entre estos marcos, la función $h: P_1 \rightarrow P_2$ definida para cada $X \in P_1$ por

$$h(X) = f[X],$$

es un isomorfismo entre las álgebras asociadas $A(\langle M_1, P_1 \rangle)$ y $A(\langle M_2, P_2 \rangle)$.

Por otra parte, a cada álgebra modal A podemos asociarle un marco general, el marco $\langle St(A), R, W \rangle$, donde W queremos que sea una colección de subconjuntos de $St(A)$ tal que el álgebra $\langle W, \cap, \cup, -, \emptyset, St(A), I \rangle$ sea un álgebra isomorfa a A . El candidato a W nos lo proporciona el teorema de representación de Stone para álgebras de Boole. W será la colección de los conjuntos de la forma

$$O_a = \{U \in St(A) : a \in U\}.$$

El teorema de representación de Stone nos dice que la función $f: A \rightarrow W$ tal que para cada $a \in A$, $f(a) = O_a$, es un isomorfismo entre

el álgebra de Boole de A y el álgebra de conjuntos $\langle W, \cap, \cup, -, \emptyset, \text{St}(A) \rangle$. Esta función es además un isomorfismo entre A y $\langle W, \cap, \cup, -, \emptyset, \text{St}(A), I \rangle$. La razón es la siguiente: $f(\tau a) = \{U \in \text{St}(A) : \tau a \in U\}$ y $I(f(a)) = I(\{U \in \text{St}(A) : a \in U\})$, pero los conjuntos $\{U \in \text{St}(A) : \tau a \in U\}$ y $I(\{U \in \text{St}(A) : a \in U\})$ son iguales. Veámoslo: Si $\tau a \in U$, tenemos que $\forall V \in \text{St}(A) (U R_{\tau} V \rightarrow a \in V)$, y por tanto que el ultrafiltro $U \in I(\{U \in \text{St}(A) : a \in U\})$. Por otra parte, si $U \in I(\{U \in \text{St}(A) : a \in U\})$ tenemos que $\forall V \in \text{St}(A) (U R_{\tau} V \rightarrow a \in V)$. Supongamos que $\tau a \notin U$. Entonces el conjunto $E = \{b \in A : \tau b \in U\} \cup \{a^*\}$ tiene la propiedad de las intersecciones finitas, puesto que, si $\tau b \in U$ y $b \wedge a^* = 0$, $b \leq a$, y por tanto $\tau b \leq \tau a$, de modo que $\tau a \in U$, pero habíamos supuesto lo contrario. Sea, pues, V un ultrafiltro en A que incluye a E , que existe por el teorema del ultrafiltro. Entonces $U R_{\tau} V$, y por tanto $a \in V$, lo que es absurdo. Concluimos pues que $\tau a \in U$. $\square$

Al marco general asociado a un álgebra modal A nos referiremos con $\text{MG}(A)$. Así, acabamos de demostrar la proposición:

PROPOSICIÓN 12.7: *Para cada álgebra modal A ,*

A es isomorfa al álgebra $A(\text{MG}(A))$.

Esta última proposición nos da un teorema de representación para las álgebras modales: toda álgebra modal es isomorfa a un álgebra modal de conjuntos.

Para marcos ocurría que en el marco asociado a un álgebra no siempre eran válidas todas las fórmulas válidas en el álgebra. Al considerar marcos generales tenemos que esto no sucede.

PROPOSICIÓN 12.8: *Para toda álgebra modal A , en A y en $\text{MG}(A)$ son válidas exactamente las mismas fórmulas modales.*

Prueba: Cada elemento de W está determinado por un único elemento de A , ya que para cada dos elementos distintos y no nulos de un álgebra de Boole siempre existe un ultrafiltro al que pertenece uno pero no el otro. Por tanto existe la siguiente correspondencia uno a uno entre las asignaciones en el álgebra A y las asignaciones en el marco general $\text{MG}(A)$, la que a una asignación s en A le asigna la asignación e en $\text{MG}(A)$ tal que para cada letra sentencial p y cada $a \in A$, $s(p) = a$ si y sólo si $e(p) = O_a$. Es fácil demostrar, obser-

vado lo anterior, que en A y en $MG(A)$ son válidas exactamente las mismas fórmulas modales.

Si partimos de un marco general $\langle M, P \rangle$ y consideramos el marco general $MG(A(\langle M, P \rangle))$ asociado a su álgebra, no siempre obtenemos un marco isomorfo, aunque sí un marco modalmente equivalente. Pensemos en el marco general $\langle N, >, P \rangle$ con $P = P(N)$. La cardinalidad del conjunto de ultrafiltros en el álgebra asociada $(P(N))$ es mayor que la de N . Por tanto la del marco general $MG(A(\langle N, >, P \rangle))$ es mayor que la de N .

Más adelante veremos qué condiciones debe cumplir un marco general para ser isomorfo al marco general de su álgebra modal. Ahora veamos la correspondencia que hay entre las nociones, para álgebras, de subálgebra, imagen homomorfa, y producto directo, y las nociones, para marcos generales, de p-morfismo, submarco general generado, y unión disjunta.

12.9. Si A_1 es una subálgebra de A_2 , el marco general $MG(A_1)$ es una imagen p-mórfica del marco general $MG(A_2)$.

12.10. Si A_2 es una imagen homomorfa de A_1 , el marco general $MG(A_2)$ es isomorfo a un submarco general generado de $MG(A_1)$.

12.11. La unión disjunta de los marcos generales asociados a las álgebras de una familia $\langle A_i: i \in I \rangle$ de álgebras modales es isomorfa a un submarco general generado del marco general asociado al producto directo de las álgebras de la familia $\langle A_i: i \in I \rangle$.

12.12. Si A_1 y A_2 son isomorfas, lo son los marcos generales asociados.

4. En este apartado vamos a estudiar las condiciones que debe satisfacer un marco general para ser isomorfo al marco de su álgebra asociada. Para llegar a formular dichas condiciones, estudiemos primero la relación entre el marco general canónico de una lógica y su álgebra de Lindenbaum-Tarski.

Dada una lógica modal L , consideremos su marco general canónico $\langle M_L, R_L, P_L \rangle$ y su álgebra de Lindenbaum-Tarski, A_L . Tenemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 12.13: *Para toda lógica modal L , el marco ge-*

neral $MG(A_L)$ es isomorfo al marco general canónico $\langle M_L, R_L, P_L \rangle$ de L .

Prueba: La función $f: St(A_L) \rightarrow M_L$ definida para cada $V \in St(A_L)$ por

$$f(V) = \bigcup V$$

es el isomorfismo buscado. Ello es así puesto que:

a) Para cada $V \in St(A_L)$, $f(V)$ es un conjunto maximal L -consistente. Ello se sigue de las propiedades de los ultrafiltros.

b) f es inyectiva: Si V, V' son ultrafiltros en A_L , existe fórmula modal B tal que $[B] \in V$ y $[\neg B] \in V'$.

c) f es sobre M_L : Para cada conjunto maximal y L -consistente Σ , el conjunto $\{[B]: B \in \Sigma\}$ es un ultrafiltro en A_L .

d) $VR_\tau V'$ si y sólo si $f(V)R_L f(V')$: Supongamos que $VR_\tau V'$. Si B es una fórmula modal tal que $\Box B \in f(V)$, entonces $[\Box B] \in V$. Por tanto $\tau [B] \in V$. Puesto que $VR_\tau V'$, $[B] \in V'$ y $B \in f(V')$. Por otra parte, si $f(V)R_L f(V')$ y B es una fórmula modal tal que $\tau [B] \in V$, $[\Box B] \in V$ y $\Box B \in f(V)$. Por consiguiente $B \in f(V')$. Por tanto $[B] \in V'$.

f) $P_L = \{f[X]: X \in W\}$: Los elementos de P_L son de la forma $e_L(B)$, donde, recordemos, $e_L(B) = \{\Sigma \in M_L: B \in \Sigma\}$. Demostremos que $P_L \subseteq \{f[X]: X \in W\}$. Dado $e_L(B)$, consideremos el conjunto $O_{[B]} = \{U \in St(A_L): [B] \in U\}$. Entonces para cada $U \in O_{[B]}$, $B \in f(U)$, y por tanto $f(U) \in e_L(B)$. Así $f[O_{[B]}] \subseteq e_L(B)$. Por otro lado, si $\Sigma \in e_L(B)$ tenemos que $[B]$ pertenece al ultrafiltro determinado por Σ , $U_\Sigma = \{[C]: C \in \Sigma\}$, y por tanto dicho ultrafiltro pertenece a $O_{[B]}$. Pero $f(U_\Sigma) = \Sigma$. Por tanto $f[O_{[B]}]$ es $e_L(B)$. Por otro lado, es fácil ver que el conjunto $\{f[X]: X \in W\}$ está incluido en P_L , pues $f[O_{[B]}] = \{f(U): [B] \in U\}$ y este último conjunto es $e_L(B)$. ■

COROLARIO 12.14: *Para toda lógica modal L , su marco general canónico $\langle M_L, R_L, P_L \rangle$ es isomorfo al marco general $MG(A(\langle M_L, R_L, P_L \rangle))$ correspondiente al álgebra modal asociada.*

Prueba: Por la proposición anterior tenemos que $MG(A_L)$ es isomorfo al marco general canónico de L , $\langle M_L, P_L \rangle$. Además, A_L es isomorfa a $A(MG(A_L))$. Por tanto, A_L es isomorfa a $A(\langle M_L, P_L \rangle)$. ■

Tal como dice Van Benthem, la proposición anterior nos muestra que el teorema de completitud para marcos generales, cuya

prueba directa es una prueba a la Henkin, es esencialmente el teorema de Lindenbaum-Tarski más el teorema de representación de Stone (que permite obtener marcos generales a partir de álgebras).

El marco general canónico de una lógica modal L tiene las siguientes propiedades:

i) Distingue elementos (o es 1-refinado), es decir,

$$\forall u, v \in M_L (\forall X \in P_L (u \in X \leftrightarrow v \in X) \rightarrow u = v).$$

ii) Caracteriza su relación (o es 2-refinado), es decir,

$$\forall u, v \in M_L (\forall X \in P_L (u \in I(X) \rightarrow v \in X) \rightarrow u R_L v).$$

iii) Todo subconjunto de P_L con la propiedad de las intersecciones finitas (tal que cualquier intersección finita de elementos del mismo no es vacía) tiene intersección no vacía.

i) y ii) se siguen inmediatamente de las definiciones de P_L , R_L , y de la operación I . iii) se sigue del hecho siguiente: Si $E \subseteq P_L$ tiene la propiedad de las intersecciones finitas, el conjunto $\{B: e_L(B) \in E\}$ es L -consistente. Por tanto puede extenderse a un conjunto Σ maximal L -consistente, y este conjunto pertenece a la intersección de E .

Las condiciones i), ii) y iii) son necesarias y suficientes para que un marco general sea isomorfo al marco general de su álgebra asociada.

Diremos que un *marco general* $\langle M, R, P \rangle$ es *descriptivo* si y sólo si

i) Distingue elementos (o es 1-refinado), es decir,

$$\forall u, v \in M_L (\forall X \in P (u \in X \leftrightarrow v \in X) \rightarrow u = v).$$

ii) Caracteriza su relación (o es 2-refinado), es decir,

$$\forall u, v \in M_L (\forall X \in P (u \in I(X) \rightarrow v \in X) \rightarrow u R v).$$

iii) Todo subconjunto de P con la propiedad de las intersecciones finitas tiene intersección no vacía.

PROPOSICIÓN 12.15: *Para toda álgebra modal A , el marco general $MG(A)$ es descriptivo.*

Prueba: i) Si U, V son ultrafiltros en A que verifican, para $MG(A)$, el antecedente del condicional de i), son iguales. En caso contrario, existiría $a \in A$ tal que $a \in U$ y $a^* \in V$, pero entonces $U \in O_a$ y $V \notin O_a$, y esto es imposible.

ii) Por la definición de R_τ .

iii) Si $E \subseteq W$ (W es el álgebra del marco $MG(A)$) tiene la propiedad de las intersecciones finitas, el conjunto $E' = \{a \in A: O_a \in E\}$ también tiene dicha propiedad. Sea U un ultrafiltro en el álgebra A que extiende a E' . Entonces U pertenece a la intersección de E . $\square$

COROLARIO 12.16: *Para todo marco general $\langle M, P \rangle$, el marco general $MG(A(\langle M, P \rangle))$ es descriptivo.*

TEOREMA 12.17: *Para todo marco general $\langle M, P \rangle$, el marco general $MG(A(\langle M, P \rangle))$ es isomorfo a $\langle M, P \rangle$ si y sólo si $\langle M, P \rangle$ es descriptivo.*

Prueba: Un sentido del bicondicional se sigue del último corolario. Para demostrar el otro sentido, definamos la función $f: M \rightarrow St(A(\langle M, P \rangle))$ por

$$f(u) = \{X \in P: u \in X\}.$$

La definición es buena puesto que $f(u)$ es un ultrafiltro en $A(\langle M, P \rangle)$. Además:

i) f es inyectiva, puesto que $\langle M, P \rangle$ distingue elementos.

ii) f es sobre $St(A(\langle M, P \rangle))$: Si U es un ultrafiltro en $A(\langle M, P \rangle)$, tiene la propiedad de las intersecciones finitas. Por tanto, por la condición iii) de la definición de marco general descriptivo, tiene intersección no vacía. Sea u un elemento de la intersección de U . Entonces $f(u) = U$.

iii) Para cualesquiera $u, v \in M$, uRv si y sólo si $f(u) R_\tau f(v)$. En efecto, si uRv , y $X \in P$ es tal que $I(X) \in f(u)$, $u \in I(X)$ y por tanto $v \in X$, con lo cual tenemos que $X \in f(v)$. Por otra parte, si $f(u) R_\tau f(v)$, veamos que para cada $X \in P$, si $u \in I(X)$, $v \in X$. Entonces por la condición ii) de la definición de marco general descriptivo tendremos que uRv . Si $X \in P$ y $u \in I(X)$, entonces $I(X) \in f(u)$. Por tanto, puesto que $f(u) R_\tau f(v)$, $X \in f(v)$ y $v \in X$. $\square$

Hay marcos tales que ningún marco general sobre ellos es descriptivo. Por ejemplo, el marco $\langle \mathbb{N}, > \rangle$. Para todo marco general sobre él, $\langle \mathbb{N}, >, P \rangle$, dada una asignación en él e , tenemos que para cada $n \geq 1$,

$$e(\Diamond^n \neg \perp) = \{m : m \geq n+1\}.$$

Por tanto, para cada $n \geq 1$, el conjunto $X_n = \{m : m \geq n+1\}$ pertenece a P . Ahora bien, el conjunto $\{X_n : n \geq 1\}$ tiene la propiedad de las intersecciones finitas, pero su intersección es vacía.

5. En la terminología de marcos generales, la noción de lógica canónica que hemos estudiado en capítulos anteriores es la siguiente: una lógica es canónica si el marco de su marco general canónico es un marco de la lógica. En el capítulo anterior hemos estudiado condiciones necesarias y suficientes para que una clase de marcos cerrada bajo equivalencia elemental fuese la clase de marcos de una lógica modal. Existe una caracterización de las clases de marcos que son la clase de marcos de una lógica modal debida a Goldblatt y a Thomason pero utiliza nociones muy *ad hoc* y no vamos a estudiarla aquí. Podemos, sin embargo, preguntarnos por una caracterización de las clases de marcos que son la clase de marcos de una lógica modal canónica.

Si reflexionamos un poco vemos que en los modelos hay un parámetro implícito que no está, en principio, ni en los marcos ni en los marcos generales: la cardinalidad del lenguaje. Este parámetro, sin embargo, sí que está implícito en los marcos canónicos, generales o no, de una lógica. La cardinalidad del lenguaje condiciona la cardinalidad del marco. Este hecho hace pensar que la noción de modelo (marco, marco general) canónico no es la adecuada para un tratamiento abstracto del problema que acabamos de plantear.

La generalización adecuada de la noción de marco general canónico es la de marco general descriptivo. La noción correspondiente a la de lógica canónica es la de lógica *d*-persistente. Una lógica L es *d*-persistente si y sólo si el marco de todo L -marco general descriptivo es un L -marco¹.

¹ Van Benthem llama canónicas a las lógicas que nosotros, y Goldblatt, llamamos *d*-persistentes. El concepto de lógica canónica de K. Fine ha resultado ser equivalente al de Van Benthem (G. Sambin y V. Vaccarol [1988]).

Evidentemente toda lógica d-persistente es canónica. Y, puesto que hay lógicas que no son canónicas, hay lógicas que no son d-persistentes.

Vamos a caracterizar las clases de marcos que son la clase de marcos de una lógica d-persistente. Primero necesitamos el siguiente lema:

LEMA 12.18: *La clase de marcos de una lógica d-persistente está cerrada bajo la formación de extensiones por ultrafiltros.*

Prueba: Supongamos que L es una lógica d-persistente, y que $\langle M, R \rangle$ es un L -marco. Consideremos el marco general $MG(A(\langle M, R \rangle))$. Este marco general es el marco $\langle eu(\langle M, R \rangle), W \rangle$, y, al ser el marco general asociado a un álgebra modal, es descriptivo. Por tanto, puesto que L es d-persistente, $eu(\langle M, R \rangle)$ es un L -marco. $\square$

TEOREMA 12.19 (Van Benthem): *Una clase de marcos es la clase de marcos de una lógica modal d-persistente si y sólo si está cerrada bajo submarcos generados, uniones disjuntas e imágenes p-mórficas, y tanto ella como su complemento están cerrados bajo la formación de extensiones por ultrafiltros.*

Prueba: i) Si C es la clase de marcos de una lógica d-persistente, está cerrada bajo submarcos generados, uniones disjuntas e imágenes p-mórficas. Además, por el lema anterior, está cerrada bajo extensiones por ultrafiltros. Por otra parte, el argumento usual nos muestra que su complemento está cerrado bajo extensiones por ultrafiltros.

ii) Si C es una clase de marcos cerrada bajo submarcos generados, uniones disjuntas e imágenes p-mórficas, y tanto C como su complemento están cerrados bajo extensiones por ultrafiltros, por el lema 11.13 tenemos que C es la clase de marcos de una lógica modal, digamos L . Veamos que L es d-persistente. Supongamos que $\langle M, P \rangle$ es un L -marco general descriptivo. Entonces, por el teorema 12.17, $MG(A(\langle M, P \rangle))$ es isomorfo a $\langle M, P \rangle$. Por otra parte, el álgebra asociada a $\langle M, P \rangle$, $A(\langle M, P \rangle)$, es un modelo de la teoría ecuacional de la clase de álgebras $\{A(\langle M, R, P(M) \rangle) : \langle M, R \rangle \in C\}$, puesto que la lógica de C es L . Por tanto, por el teorema de Birkhoff, $A(\langle M, P \rangle)$ es una imagen homomorfa de una subálgebra de un producto directo de álgebras pertenecientes a la clase $\prod_{i \in I} A(\langle M_i, R_i, P(M_i) \rangle)$. Utilicemos ahora las correspondencias de 12.3-5 y 12.9-11. Tenemos pues que el producto directo $\prod_{i \in I} A$

$(\langle M_i, R_i, P(M_i) \rangle)$ es isomorfo al álgebra $A(\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i, P(M_i) \rangle)$. Por tanto tenemos que $A(\langle M, P \rangle)$ es una imagen homomorfa de una subálgebra A del álgebra $A(\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i, P(M_i) \rangle)$. Por tanto $MG(A(\langle M, P \rangle))$ es isomorfo a un submarco general generado de $MG(A)$, y $MG(A)$ es una imagen p-mórfica del marco general $MG(A(\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i, P(M_i) \rangle))$. Ahora bien, este último marco general es el marco general $\langle M(A(\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle)), P(M_\oplus) \rangle$, cuyo marco es la extensión por ultrafiltros de $\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle$. Puesto que C está cerrada bajo uniones disjuntas y extensiones por ultrafiltros, dicha extensión por ultrafiltros pertenece a C . Por tanto, al estar C cerrada bajo imágenes p-mórficas, el marco de $MG(A)$ pertenece a C . Por tanto el marco de $MG(A(\langle M, P \rangle))$, al ser isomorfo a un submarco generado de $MG(A)$, pertenece también a C (C está cerrado bajo submarcos generados). Ahora bien, dicho marco es isomorfo a M . Por tanto, M pertenece a C , y es pues un L-marco. $\blacksquare$

COROLARIO 12.20: i) *Una lógica modal L se preserva bajo extensiones por ultrafiltros si y sólo si la menor lógica completa que extiende a L es d-persistente.*

ii) *Una lógica modal completa L es d-persistente si y sólo si se preserva bajo extensiones por ultrafiltros.*

Prueba: i) Si una lógica L se preserva bajo extensiones por ultrafiltros, su clase de marcos está cerrada bajo extensiones por ultrafiltros. Por tanto, puesto que además se cumplen las demás condiciones del teorema anterior, es la clase de marcos de una lógica modal d-persistente. Pero tal lógica es la menor lógica completa que extiende a la inicial.

El otro sentido del bicondicional se sigue de la d-persistencia: si M es un L-marco, es un marco de su menor extensión completa. Por tanto el marco general $MG(A(\langle M, P(M) \rangle))$ es un marco general de dicha extensión, y al ser esta d-persistente, el marco de este marco general, que es $eu(M)$, es un marco de la misma y por tanto de L .

ii) Se sigue de i). $\blacksquare$

Tenemos otro corolario al teorema anterior, corolario que es una generalización del teorema de K. Fine, que afirma que toda lógica completa, y cuya clase de marcos está cerrada bajo equivalencia elemental es canónica, es el siguiente:

COROLARIO 12.21: *Toda lógica modal completa cuya clase de marcos está cerrada bajo equivalencia elemental es d-persistente.*

Prueba: Si L cumple las condiciones del antecedente del enunciado entonces su clase de marcos está cerrada bajo extensiones por ultrafiltros: Por el lema 11.12, para cada marco $\langle M, R \rangle$ existe un marco elementalmente equivalente $\langle M', R' \rangle$ tal que la extensión por ultrafiltros de $\langle M, R \rangle$ es una imagen p-mórfica de $\langle M', R' \rangle$. Por tanto, puesto que la clase de marcos de una lógica está cerrada bajo imágenes p-mórficas, L está cerrada bajo extensiones por ultrafiltros. Por el corolario anterior concluimos que L es d-persistente. $\square$

EJERCICIOS

12.1. Completar la prueba de la proposición 12.1.

12.2. Demostrar que h es un isomorfismo entre $\langle M_1, P_1 \rangle$ y $\langle M_2, P_2 \rangle$ si y sólo si h es una inmersión de $\langle M_1, P_1 \rangle$ sobre $\langle M_2, P_2 \rangle$ y h^{-1} es una inmersión de $\langle M_2, P_2 \rangle$ sobre $\langle M_1, P_1 \rangle$.

12.3. Demostrar el teorema para submarcos generales generados correspondiente al teorema 8.9.

12.4. Demostrar el teorema para p-morfismos de marcos generales en marcos generales correspondiente al corolario 8.3.

12.5. Demostrar el teorema para uniones disjuntas de marcos generales correspondiente al teorema 8.12.

12.6. Demostrar 12.3, 12.4, 12.5 y 12.6.

12.7. Demostrar 12.9, 12.10, 12.11 y 12.12.

12.8. Completar la prueba de la proposición 12.13.

12.9. Completar la prueba de la proposición 12.15.

12.10. Completar la prueba de 12.17.

12.11. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes para todo marco general $\langle M, R, P \rangle$:

- i) Todo ultrafiltro en P tiene intersección no vacía.
- ii) Todo ultrafiltro en P es de la forma $\{X \in P: u \in X\}$ para algún $u \in M$.
- iii) Todo subconjunto de P con la propiedad de las intersecciones finitas tiene intersección no vacía.
- iv) Para todo $Q \subseteq P$ tal que $UQ = M$, existe $Q' \subseteq Q$, Q' finito, y tal que $UQ' = M$.

12.12. Demostrar que, si $\langle M, R, P \rangle$ es un marco general para el que todo ultrafiltro en P tiene intersección no vacía, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

- i) Para todo ultrafiltro U en P , $\bigcap \{m(X) : X \in U\} \subseteq m(\bigcap U)$.
- ii) Para cada $u, v \in M$, si $\{m(X) : X \in P \text{ y } v \in X\}$ está incluido en $\{X \in P : u \in X\}$, entonces existe $w \in M$ tal que uRw y $\{X \in P : w \in X\} = \{X \in P : v \in X\}$,

donde para cada $X \subseteq M$, $m(X) = \{u \in M : \exists v \in M (uRv \wedge v \in X)\}$.

12.13. Demostrar que para cada marco $\langle M, R, P \rangle$ que distingue elementos, las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) El marco caracteriza su relación.
- ii) Para cada $u, v \in M$, si $\{m(X) : X \in P \text{ y } v \in X\} \subseteq \{X \in P : u \in X\}$, existe $w \in M$ tal que uRw y $\{X \in P : w \in X\} = \{X \in P : v \in X\}$.

12.14. Considérense un marco $\langle M, R \rangle$ y el marco general $MG(A(\langle M, R \rangle))$. ¿Cuál es el álgebra W de este marco general?

12.15. Demostrar el teorema 11.13 de Goldblatt y Thomason a partir del teorema 12.19 de Van Benthem.



APÉNDICE I

LÓGICA DE PRIMER ORDEN

El vocabulario de un lenguaje de primer orden está formado por los siguientes símbolos:

1. Paréntesis: $)$, $($.
2. Conectores: $\rightarrow$ (condicional) y $\neg$ (negación).
3. Variables: los elementos de un conjunto infinito numerable

$$V = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}.$$

4. Símbolo de igualdad: $\approx$.

5. Cuantificadores: $\forall$ (universal) y $\exists$ (existencial).

6. Relatores: Para cada número natural $n \geq 1$, un conjunto —posiblemente vacío— de símbolos llamados relatores n -ádicos.

7. Símbolos funcionales: Para cada número natural $n \geq 1$, un conjunto —posiblemente vacío— de símbolos llamados símbolos funcionales n -ádicos.

8. Constantes: Un conjunto —posiblemente vacío— de símbolos llamados constantes.

Los conjuntos de símbolos de 1-8 deben ser todos disjuntos dos a dos.

Un *tipo de semejanza* es simplemente un conjunto de relatores, símbolos funcionales y constantes. El tipo de semejanza de un lenguaje de primer orden es el conjunto formado por todos los relatores, símbolos funcionales y constantes del lenguaje. Es precisamente el tipo de semejanza lo que distingue a unos lenguajes de otros. Para referirnos a tipos de semejanza utilizaremos la letra griega ρ con posibles subíndices.

Un tipo de semejanza sin símbolos funcionales y sin constantes es un *tipo de semejanza relacional*, y un tipo de semejanza sin relatores es un *tipo de semejanza algebraico*.

Dado un lenguaje de primer orden de tipo de semejanza ρ , el conjunto de los *términos* del mismo es el menor conjunto X de sucesiones finitas de símbolos del lenguaje tal que:

- i) Toda variable pertenece a X .
- ii) Toda constante perteneciente a p pertenece a X .
- iii) Si f es un símbolo funcional n -ádico ($n \geq 1$) y $t_1, \dots, t_n \in X$, $ft_1 \dots t_n$ pertenece a X .

Y el conjunto de las *fórmulas* es el menor conjunto X de sucesiones finitas de símbolos del lenguaje tal que:

- i) Si R es un relator n -ádico perteneciente a p y $t_1, \dots, t_n$ son términos, $Rt_1 \dots t_n \in X$.
- ii) Si t_1 y t_2 son términos $t_1 \approx t_2 \in X$.
- iii) Si $\alpha \in X$, entonces $\neg \alpha \in X$.
- iv) Si $\alpha, \beta \in X$, entonces $(\alpha \rightarrow \beta) \in X$.
- v) Si $\alpha \in X$ y x es una variable, entonces $\forall x \alpha, \exists x \alpha \in X$.

Las fórmulas de la forma $Rt_1 \dots t_n$, donde R es un relator n -ádico y $t_1, \dots, t_n$ son términos, y las de la forma $t_1 \approx t_2$, con t_1 y t_2 términos, son las *fórmulas atómicas*. Las fórmulas de la última forma son las *ecuaciones*.

PRINCIPIOS DE INDUCCIÓN

i) Todo conjunto de sucesiones finitas de símbolos de un lenguaje de primer orden que cumple las condiciones i)-iii) de la definición de término contiene todos los términos del lenguaje.

ii) Para cada lenguaje de primer orden, si Φ es una propiedad tal que: a) todas las variables y todas las constantes del lenguaje tienen Φ , y b) para todo $n \geq 1$ y todo símbolo funcional n -ádico f del lenguaje ocurre que para cualesquiera términos $t_1, \dots, t_n$ con la propiedad Φ , $ft_1 \dots t_n$ también tiene la propiedad Φ , entonces todo término del lenguaje tiene la propiedad Φ .

iii) Todo conjunto de sucesiones finitas de símbolos de un lenguaje de primer orden que cumple las condiciones i)-v) de la definición de fórmula contiene todas las fórmulas del lenguaje.

iv) Para cada lenguaje de primer orden, si Φ es una propiedad tal que: a) toda fórmula atómica tiene la propiedad Φ , b) para cada fórmula α con la propiedad Φ , $\neg \alpha$ tiene la propiedad Φ , c) para cualesquiera fórmulas α, β con la propiedad Φ , $(\alpha \rightarrow \beta)$ tiene la propiedad Φ , y d) para cada fórmula α con la propiedad Φ , y cada variable x , $\forall x \alpha$ y $\exists x \alpha$ tienen la propiedad Φ , entonces toda fórmula tiene la propiedad Φ .

PRINCIPIOS DE DEFINICIÓN POR RECURSIÓN

Fijemos un lenguaje de primer orden. Entonces:

A) Si D es un conjunto no vacío, y para cada símbolo funcional n -ádico f , F_f es una función de D^n en D , entonces, para toda función h del conjunto de las variables y las constantes en D , existe una única función h^* del conjunto de los términos en D que verifica:

- 1) $h^*(t) = h(t)$, si t es una variable o una constante
- 2) $h^*(ft_1 \dots t_n) = F_f(h^*(t_1), \dots, h^*(t_n))$

B) Si D es un conjunto no vacío, F es una operación diádica en D , N una función de D en D , y para cada n , G_{2n} y G_{2n+1} son funciones de D en D , entonces para toda función h del conjunto de fórmulas atómicas de un lenguaje de primer orden en D , existe una única función h^* del conjunto de todas las fórmulas en D que verifica:

- i) $h^*(\alpha) = h(\alpha)$ para cada fórmula atómica α
- ii) $h^*(\neg\alpha) = N(h(\alpha))$
- iii) $h^*((\alpha \rightarrow \beta)) = F(h^*(\alpha), h^*(\beta))$
- iv) $h^*(\forall v_n \alpha) = G_{2n}(h^*(\alpha))$
- v) $h^*(\exists v_n \alpha) = G_{2n+1}(h^*(\alpha))$.

A cada fórmula α podemos asociarle el conjunto de sus *subfórmulas*, definido por recursión como sigue:

- i) Si α es atómica, α es su única subfórmula.
- ii) Las subfórmulas de $\neg\beta$ son las subfórmulas de β y $\neg\beta$.
- iii) Las subfórmulas de $(\beta \rightarrow \delta)$ son las subfórmulas de β , las subfórmulas de δ , y $(\beta \rightarrow \delta)$.
- iv) Las subfórmulas de $\forall x \beta$ son las subfórmulas de β y $\forall x \beta$.
- v) Las subfórmulas de $\exists x \beta$ son las subfórmulas de β y $\exists x \beta$.

Una misma variable puede ocurrir en distintas posiciones en una misma fórmula. Una *ocurrencia* de una variable x en una fórmula α es *ligada* si y sólo si es una ocurrencia de x en una subfórmula de α de la forma $\forall x \beta$ o de la forma $\exists x \beta$. Una ocurrencia de la variable x en la fórmula α es una *ocurrencia libre* si y sólo si no es una ocurrencia ligada.

Una *sentencia* es una fórmula en la que ninguna variable ocurre libre.

Si α es una fórmula, x es una variable y t es un término, $\alpha(x/t)$ es la fórmula que se obtiene al sustituir en α todas las ocurrencias libres de x por t .

Dado un tipo de semejanza ρ , una ρ -estructura es un tuplo ordenado

$$A = \langle A, \langle R^A \rangle_{R \in \rho}, \langle f^A \rangle_{f \in \rho}, \langle c^A \rangle_{c \in \rho} \rangle$$

donde A es un conjunto no vacío, y para cada relator n -ádico ($n \geq 1$) $R \in \rho$, R^A es una relación n -ádica en A , es decir, $R^A \supset A^n$, y para cada constante $c \in \rho$, c^A es un elemento de A , y para cada símbolo funcional n -ádico $f \in \rho$, f^A es una función de A^n en A . El dominio de la ρ -estructura A es el conjunto A .

Dada una ρ -estructura A , una *asignación* en A es una función s que a cada variable le asigna un elemento de A . Dadas una asignación s en A , una variable x , y un elemento a de A , $s(x/a)$ es la asignación en A que en todo es idéntica a la asignación s excepto en que a la variable x le asigna a .

DEFINICIONES DE DENOTACIÓN Y DE SATISFACCIÓN

Fijemos un tipo de semejanza ρ . Definamos primero la noción de denotación de un término t en una ρ -estructura A bajo una asignación s en la misma, $t^{A,s}$. La definición es por recursión como sigue:

$$\begin{aligned} x^{A,s} &= s(x) \\ c^{A,s} &= c^A \\ (ft_1 \dots t_n)^{A,s} &= f^A(t_1^{A,s}, \dots, t_n^{A,s}). \end{aligned}$$

Definamos ahora lo que significa que una fórmula α del lenguaje de primer orden de tipo ρ sea satisfecha en una ρ -estructura A por una asignación en la misma s . Definimos la relación $A \models \alpha [s]$ por recursión como sigue:

$$\begin{aligned} A \models t_1 \approx t_2 [s] & \quad \text{si y sólo si} \quad t_1^{A,s} = t_2^{A,s} \\ A \models R t_1 \dots t_n [s] & \quad \text{si y sólo si} \quad \langle t_1^{A,s}, \dots, t_n^{A,s} \rangle \in R^A \end{aligned}$$

$A \models \neg \alpha [s]$	si y sólo si	no $A \models \alpha [s]$
$A \models (\alpha \rightarrow \beta) [s]$	si y sólo si	no $A \models \alpha [s]$ o $A \models \beta [s]$
$A \models \forall x \alpha [s]$	si y sólo si	para cada $a \in A$, $A \models \alpha [s(x/a)]$
$A \models \exists x \alpha [s]$	si y sólo si	existe $a \in A$, $A \models \alpha [s(x/a)]$

LEMA DE COINCIDENCIA: *Para toda p -estructura A , toda fórmula α cuyas variables libres están entre las $x_1, \dots, x_n$, y cualesquiera asignaciones en A , s_1 y s_2 , que coinciden en el valor que asignan a las variables $x_1, \dots, x_n$, ocurre que:*

$$A \models \alpha [s_1] \quad \text{si y sólo si} \quad A \models \alpha [s_2].$$

Puesto que por el lema de coincidencia lo único que importa de una asignación para que sea satisfecha una fórmula son los valores que asigna a las variables libres de la fórmula, si $x_1, \dots, x_n$ son las variables libres de α escribiremos $A \models \alpha [a_1, \dots, a_n]$ para indicar que para toda asignación s en A tal que $s(x_1) = a_1, \dots, s(x_n) = a_n$, $A \models \alpha [s]$.

Diremos que una *sentencia* σ es *verdadera* en la p -estructura A si para alguna (toda) asignación s en A , $A \models \sigma [s]$. En tal caso también diremos que A es un *modelo* de σ .

Una *sentencia* σ es *lógicamente válida* si y sólo si es verdadera en toda p -estructura.

Una *sentencia* σ es *consecuencia* de un conjunto de sentencias Σ si y sólo si σ es verdadera en toda p -estructura en la que son verdaderas todas las sentencias pertenecientes a Σ . Para indicar que σ es consecuencia de Σ escribiremos: $\Sigma \models \sigma$.

Una p -estructura A es un *modelo* de un conjunto de sentencias Σ si y sólo si A es un modelo de toda sentencia elemento de Σ .

A veces, hablando laxamente, llamaremos *modelos* a las p -estructuras.

Dos p -estructuras A_1 y A_2 son *elementalmente equivalentes* si y sólo si en ellas son verdaderas exactamente las mismas sentencias. En tal caso escribiremos $A_1 \equiv A_2$.

Dadas dos p -estructuras A_1 y A_2 , un *isomorfismo* entre A_1 y A_2 es una biyección $h: A_1 \rightarrow A_2$ tal que:

i) para cada relator $R_i \in p$; si R es n -ádico entonces para cada $a_1, \dots, a_n$ elementos de A_1

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R^{A_1} \quad \text{si y sólo si} \quad \langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \in R^{A_2}$$

ii) para cada símbolo funcional $f \in \rho$, si f es n -ádico entonces para cada $a_1, \dots, a_n \in A_1$

$$h(f^{A_1}(a_1, \dots, a_n)) = f^{A_2}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

iii) para cada constante $c \in \rho$,

$$h(c^{A_1}) = c^{A_2}$$

Dos ρ -estructuras son *isomorfas* si existe un isomorfismo entre ambas.

TEOREMA: *Dos ρ -estructuras isomorfas son elementalmente equivalentes.*

Diremos que un conjunto de sentencias es *finitamente satisfacible* si todo subconjunto finito del mismo tiene un modelo.

TEOREMA DE COMPACIDAD: *Todo conjunto de sentencias finitamente satisfacible tiene un modelo.*

Una ρ -estructura A_1 es una *subestructura* de una ρ -estructura A_2 si y sólo si i) $A_1 \subseteq A_2$, ii) para cada constante $c \in \rho$ $c^{A_1} = c^{A_2}$, iii) para cada símbolo funcional $f \in \rho$, si f es n -ádico, f^{A_1} es la función f^{A_2} restringida a $(A_1)^n$, iv) para cada relator n -ádico $R \in \rho$, $R^{A_1} = R^{A_2} \cap (A_2)^n$.

Una ρ -estructura A_1 es una *subestructura elemental* de una ρ -estructura A_2 si y sólo si es una subestructura y además ocurre que para cada fórmula α cuyas variables libres están entre las $x_1, \dots, x_n$, y para cada $a_1, \dots, a_n \in A_1$,

$$A_1 \models \alpha [a_1, \dots, a_n] \text{ si y sólo si } A_2 \models \alpha [a_1, \dots, a_n].$$

TEOREMA DE LÖWENHEIM SKOLEM DESCENDENTE: *Para todo tipo de semejanza numerable ρ , toda ρ -estructura A con dominio infinito, y todo subconjunto numerable C de A , existe una subestructura elemental de A , B , con dominio infinito numerable que incluye a C .*

COROLARIO (Teorema de Löwenheim-Skolem): *Para todo tipo*

de semejanza numerable, todo conjunto de sentencias que tiene un modelo tiene un modelo numerable.

LÓGICA DE SEGUNDO ORDEN

El vocabulario de un lenguaje de segundo orden está formado por los siguientes símbolos:

1. Paréntesis: $(,)$.
2. Conectores: $\rightarrow$ (condicional) y $\neg$ (negación).
3. Variables de individuo: los elementos de un conjunto infinito numerable $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$.
4. Variables de relación: Para cada $n \geq 1$, un conjunto infinito numerable $V_n = \{v_0, \dots, v_m, \dots\}$ de variables de relación (n -ádica). Las variables de relación 1-ádica se llaman también variables de conjunto.
5. Símbolo de igualdad: $\approx$.
6. Cuantificadores: $\forall$ (universal) y $\exists$ (existencial).
7. Relatores: Para cada número natural $n \geq 1$, un conjunto –posiblemente vacío– de símbolos llamados relatores n -ádicos.
8. Símbolos funcionales: Para cada número natural $n \geq 1$, un conjunto –posiblemente vacío– de símbolos llamados símbolos funcionales n -ádicos.
9. Constantes: Un conjunto –posiblemente vacío– de símbolos llamados constantes.

Los conjuntos de símbolos de 1-9 deben ser todos disjuntos dos a dos.

El *tipo de semejanza* de un lenguaje de segundo orden es el conjunto formado por todos los relatores, símbolos funcionales y constantes del lenguaje. Así, la noción de tipo de semejanza es la misma que para primer orden. Usaremos la misma notación y las mismas nociones que en tal caso.

Dado un lenguaje de segundo orden de tipo de semejanza p , el conjunto de los *términos* del mismo es el menor conjunto Z de sucesiones finitas de símbolos de lenguaje tal que:

- i) Toda variable de individuo pertenece a Z .
- ii) Toda constante perteneciente a p pertenece a Z .
- iii) Si f es un símbolo funcional n -ádico ($n \geq 1$) y $t_1, \dots, t_n \in Z$, $ft_1 \dots t_n$ pertenece a Z .

Y el conjunto de las *fórmulas* es el menor conjunto Z de sucesiones finitas de símbolos del lenguaje tal que:

- i) Si R es un relator n -ádico perteneciente a ρ y $t_1, \dots, t_n$ son términos, $Rt_1 \dots t_n \in Z$.
- ii) Si X es una variable de relación n -ádica y $t_1, \dots, t_n$ son términos, $Xt_1, \dots, t_n \in Z$.
- iii) Si t_1 y t_2 son términos $t_1 \approx t_2 \in Z$.
- iv) Si $\alpha \in Z$, entonces $\neg \alpha \in Z$.
- v) Si $\alpha, \beta \in Z$, entonces $(\alpha \rightarrow \beta) \in Z$.
- vi) Si $\alpha \in Z$ y x es una variable individual, entonces $\forall x \alpha, \exists x \alpha \in Z$.
- vii) Si $\alpha \in Z$ y X es una variable de relación, entonces $\forall X \alpha, \exists X \alpha \in Z$.

Las fórmulas de la forma $Rt_1 \dots t_n$, donde R es un relator n -ádico y $t_1, \dots, t_n$ son términos, y las de la forma $t_1 \approx t_2$, con t_1 y t_2 términos, y las de la forma $Xt_1, \dots, t_n$, donde X es una variable de relación n -ádica y $t_1, \dots, t_n$ son los términos, son las *fórmulas atómicas*.

Como en el caso de la lógica de primer orden tenemos los principios de inducción y de definición por recursión cuya formulación es análoga a la de aquellos.

Las nociones de subfórmula, ocurrencia libre de una variable (de individuo, de relación o de función), ocurrencia ligada de una variable, y sentencia se definen de modo análogo al caso de la lógica de primer orden.

La noción de ρ -estructura no varía. Las definiciones de denotación y satisfacción deben ampliarse para dar cuenta de las fórmulas con nuevos signos. Para ello debemos ampliar la noción de asignación en una ρ -estructura.

Dada una ρ -estructura A , una *asignación* en A es una función s que a cada variable de individuo le asigna un elemento de A , y a cada variable n -ádica de relación le asigna una relación n -ádica en A . Dadas una asignación s en A , una variable de individuo x , y un elemento a de A , $s(x/a)$ es la asignación en A que en todo es idéntica a la asignación s excepto en que a la variable x le asigna a . Dadas una asignación s en A , una variable de relación n -ádica X , y una relación n -ádica R en A , $s(X/R)$ es la asignación en A que en todo es idéntica a la asignación s excepto en que a la variable X le asigna R .

Fijemos un tipo de semejanza ρ . Definamos primero la noción de *denotación de un término t* en una ρ -estructura A bajo una

asignación s en la misma, $t^{A,s}$. La definición es por recursión como sigue:

$$\begin{aligned}x^{A,s} &= s(x) \\c^{A,s} &= c^A \\(ft_1 \dots t_n)^{A,s} &= f^A(t_1^{A,s}, \dots, t_n^{A,s}).\end{aligned}$$

Definamos ahora lo que significa que una *fórmula* α del lenguaje de primer orden de tipo p sea *satisfecha* en una p -estructura A por una asignación en la misma s . Definimos la relación $A \models \alpha[s]$ por recursión como sigue:

$$\begin{aligned}A \models t_1 \approx t_2 [s] & \quad \text{si y sólo si } t_1^{A,s} = t_2^{A,s} \\A \models Rt_1 \dots t_n [s] & \quad \text{si y sólo si } \langle t_1^{A,s}, \dots, t_n^{A,s} \rangle \in R^A \\A \models X^n t_1, \dots, t_n [s] & \quad \text{si y sólo si } \langle t_1^{A,s}, \dots, t_n^{A,s} \rangle \in s(X^n) \\A \models \neg \alpha [s] & \quad \text{si y sólo si no } A \models \alpha [s] \\A \models (\alpha \rightarrow \beta) [s] & \quad \text{si y sólo si no } A \models \alpha [s] \text{ o } A \models \beta [s] \\A \models \forall x \alpha [s] & \quad \text{si y sólo si para cada } a \in A, A \models \alpha [s(x/a)] \\A \models \exists x \alpha [s] & \quad \text{si y sólo si existe } a \in A, \text{ tal que } A \models \alpha [s(x/a)]. \\A \models \forall X^n \alpha [s] & \quad \text{si y sólo si para cada } R \subseteq A^n, A \models \alpha [s(X^n/R)] \\A \models \exists X^n \alpha [s] & \quad \text{si y sólo si existe } R \subseteq A^n \text{ tal que } A \models \alpha [s(X^n/R)]\end{aligned}$$

En el caso de la lógica de segundo orden tenemos también el análogo al lema de coincidencia para la lógica de primer orden.

Los conceptos de sentencia verdadera en una estructura, modelo de una sentencia, sentencia lógicamente válida, y consecuencia son los análogos a los correspondientes para primer orden.

Para la lógica de segundo orden no valen ni el teorema de compacidad ni los teoremas de Löwenheim-Skolem.

APÉNDICE II

ÁLGEBRAS DE BOOLE

Un *álgebra de Boole* es un tuplo

$$\mathbf{B} = \langle B, \wedge, \vee, *, 0, 1 \rangle$$

donde B es un conjunto no vacío, $\wedge$ y $\vee$ son operaciones diádicas en B , llamadas, respectivamente, *ínfimo* y *supremo*, $*$ es una operación monádica en B llamada *complemento*, y 0 y 1 son elementos de B llamados, respectivamente, el *cero* del álgebra y el *uno* del álgebra, que verifica para cada $a, b, c \in B$ las siguientes condiciones:

- i) $a \wedge b = b \wedge a$
- ii) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
- iii) $a \wedge 1 = a$
- iv) $a \wedge a^* = 0$
- v) $a \wedge a = a$
- vi) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- vii) $a \vee b = b \vee a$
- viii) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
- ix) $a \vee 0 = a$
- x) $a \vee a^* = 1$
- xi) $a \vee a = a$
- xii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

En toda álgebra de Boole $\mathbf{B}$ tenemos que para cada $a, b, c \in B$

- i) $a \vee 1 = 1$
- ii) $a \wedge 0 = 0$
- iii) $a \vee (a \wedge b) = a$
- iv) $a \wedge (a \vee b) = a$
- v) $a \vee b = b$ si y sólo si $a \wedge b = a$.
- vi) $a \vee b = a \vee (a^* \wedge b)$
- vii) $a \wedge b = a \wedge (a^* \vee b)$

- viii) $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^*)$
- ix) $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$ si y sólo si $a = b^*$
- x) $1^* = 0$
- xi) $0^* = 1$
- xii) $(a^*)^* = a$
- xiii) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$
- xiv) $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$

Dada un álgebra de Boole B , podemos definir una relación $\leq$ en B mediante: Para cada $a, b \in B$

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a \wedge b = a.$$

Entre las propiedades de esta relación caben destacar las siguientes:

- i) $a \leq b$ si y sólo si $a \vee b = b$.
- ii) para todo $a \in B$, $a \leq 1$
- iii) para todo $a \in B$, $0 \leq a$
- iv) $a \leq a$
- v) Si $a \leq b$ y $b \leq c$, $a \leq c$
- vi) Si $a \leq b$ y $b \leq a$, $a = b$
- vii) $a \leq b$ si y sólo si $b^* \leq a^*$.

Un *filtro* en un álgebra de Boole B es un subconjunto no vacío F de B tal que:

i) está cerrado bajo la operación ínfimo, es decir, si $a, b \in F$ entonces $(a \wedge b) \in F$.

ii) Si $a \in F$ y $a \leq b$, entonces $b \in F$.

Un *filtro* F es *propio* si el cero no pertenece a F .

Obsérvese que $\{1\}$ es un filtro propio, y que está incluido en todo filtro. Es el menor filtro propio.

Un *ultrafiltro* en un álgebra de Boole B es un filtro propio en B maximal, es decir, que no está incluido estrictamente en ningún filtro propio.

PROPOSICIÓN 1: *Dada un álgebra de Boole B , un subconjunto de B , U , es un ultrafiltro en B si y sólo si U es un filtro y para cada $a \in B$, uno y sólo uno de los siguientes casos se da: $a \in U$ o $a^* \in U$.*

Dada un álgebra de Boole $\mathbf{B}$, un subconjunto X de B tiene la *propiedad de las intersecciones finitas* (p.i.f.) si y sólo si para cada n y cada $a_1, \dots, a_n \in X$, $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \neq 0$.

PROPOSICIÓN 2: *En toda álgebra de Boole $\mathbf{B}$, todo subconjunto X de B con la p.i.f. puede extenderse a un filtro propio en $\mathbf{B}$.*

Prueba: $\{b \in B: \text{hay } n \text{ y } a_1, \dots, a_n \in X \text{ tales que } (a_1 \wedge \dots \wedge a_n) \leq b\}$ es un filtro. $\parallel$

TEOREMA DEL ULTRAFILTRO: *Todo filtro propio en un álgebra de Boole $\mathbf{B}$ puede extenderse a un ultrafiltro en $\mathbf{B}$.*

Prueba: Utilizando el lema de Zorn. $\parallel$

COROLARIO 3: *Todo subconjunto con la p.i.f. de un álgebra de Boole $\mathbf{B}$ puede extenderse a un ultrafiltro en $\mathbf{B}$.*

Dado un conjunto X , consideremos su conjunto potencia $P(X)$. Este conjunto con las operaciones de intersección, unión y complementario, y los conjuntos $\emptyset$ y X , constituye un álgebra de Boole, el álgebra de los subconjuntos de X . Cualquier subconjunto de $P(X)$ cerrado bajo las operaciones de intersección, unión y complementario, y al que pertenecen $\emptyset$ y X , constituye también, junto con las operaciones y conjuntos indicados, un álgebra de Boole, un álgebra de subconjuntos de X .

Un *álgebra* (de Boole) *de conjuntos* es un álgebra de subconjuntos de algún conjunto X .

Dos álgebras de Boole $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ son *isomorfas* si y sólo si existe una biyección f de B_1 en B_2 tal que para cada $a, b \in B$:

$$\text{i)} \quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$$

$$\text{ii)} \quad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$$

$$\text{iii)} \quad f(a^*) = f(a)^*$$

$$\text{iv)} \quad f(0_1) = 0_2$$

$$\text{v)} \quad f(1_1) = 1_2$$

Dada un álgebra de Boole $\mathbf{B}$, consideremos el conjunto de todos los ultrafiltros en $\mathbf{B}$,

$$\text{St}(\mathbf{B}) = \{U: U \text{ es ultrafiltro en } \mathbf{B}\}.$$

Para cada $a \in B$, sea $O_a = \{U \in \text{St}(B) : a \in U\}$. Es fácil comprobar que el conjunto $\{O_a : a \in B\}$ es un álgebra de subconjuntos de $\text{St}(B)$. Además, la función $f: B \rightarrow \{O_a : a \in B\}$ definida, para cada $a \in B$, por:

$$f(a) = O_a$$

es un isomorfismo entre el álgebra de Boole B y el álgebra de subconjuntos de $\text{St}(B)$, $\langle \{O_a : a \in B\}, \cap, \cup, -, \emptyset, \text{St}(B) \rangle$. Este hecho nos permite afirmar que:

TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE STONE: *Toda álgebra de Boole B es isomorfa a un álgebra de subconjuntos de algún conjunto.*

Un ultrafiltro U en un álgebra de Boole B es un *ultrafiltro principal* si y sólo si es de la forma $U = \{b \in B : a \leq b\}$ para algún $a \in B$. Un ultrafiltro que no es de esta forma es un *ultrafiltro no-principal*.

En el álgebra de los subconjuntos de un conjunto X , los ultrafiltros principales son los de la forma $\{Y \supseteq X : x \in Y\}$ para algún $x \in X$. Y los ultrafiltros no-principales son aquellos que contienen a todos los subconjuntos finitos de X y a todos los subconjuntos de X con complemento finito (los subconjuntos cofinitos de X).

Los ultrafiltros en el álgebra de los subconjuntos de un conjunto X se llaman *ultrafiltros sobre X* . Es fácil ver que un ultrafiltro sobre X es principal si y sólo si contiene un subconjunto finito de X , y es no-principal si y sólo si todos sus elementos son infinitos.

Resumamos las propiedades más útiles de los ultrafiltros sobre un conjunto X . Para todo ultrafiltro U sobre X ocurre que:

- i) Para cada $Y \subseteq X$, $Y \in U$ o $X - Y \in U$.
- ii) $\emptyset \notin U$, $1 \in U$.
- iii) Para cada $Y, Z \subseteq X$, $Y \cap Z \in U$ si y sólo si $Y \in U$ y $Z \in U$.
- iv) Para cada $Y, Z \subseteq X$, $Y \cup Z \in U$ si y sólo si $Y \in U$ o $Z \in U$.
- v) Para cada $Y, Z \subseteq X$, si $Y \subseteq Z$ y $Y \in U$ entonces $Z \in U$.

vi) Si $Y \subseteq X$ entonces para todo $Z \in U$, $Z \cap Y \neq \emptyset$ si y sólo si $Y \in U$.

Evidentemente todo ultrafiltro en un álgebra de Boole **B** verifica las condiciones correspondientes a las i)-vi).

BIBLIOGRAFÍA

- BELL, J. L., y SLOMSON, A. [1969], *Models and Ultraproducts*, North-Holland, Amsterdam.
- BLOCK, W. J. [1980], «The lattice of modal algebras: An algebraic investigation», *J. Symbolic Logic* 45, 221-236.
- BOLOS, G. [1979], *The Unprovability of Consistency: An essay in Modal Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.
- BULL, R. A., [1982], Review, *J. Symbolic Logic* 47, 440-445.
- [1983], Review, *J. Symbolic Logic* 48, 448-495.
- BULL, R. A., y SEGERBERG, K. [1984], «Basic Modal Logic», en D. Gabay y F. Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. II, 1-88.
- BURRIS, S., y SANKAPPANAVAR [1981], *A course in universal algebra*, Springer-Verlag, Berlín.
- CARNAP, R. [1947], *Meaning and Necessity: A Study in Semantics and Modal Logic*; The University of Chicago Press, Chicago.
- CRESWELL, M. J. [1987], «Magari's theorem via the recession frame», *Journal of Philosophical Logic* 16, 13-15.
- CHANG, C. C., y KEISLER, H. J. [1973], *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam.
- CHELLAS, B. F. [1980], *Modal Logic: An introduction*, Cambridge University Press, Cambridge.
- ENDERTON, H. B. [1972], *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, Nueva York.
- FINE, K. [1975], «Some connections between elementary and modal logic», en S. Kanger (eds.), *Proceedings of the Third Scandinavian Symposium*, North-Holland, Amsterdam.
- GOLDBLATT, R. I. [1975], «First order definability in modal logic», *J. Symbolic Logic* 40, 35-40.
- [1976], «Metamathematics of modal logic», *Reports on Mathematical Logic* 6, 41-78; 7, 21-52.
- GOLDBLATT, R. I., y THOMASON, S. K. [1975], «Axiomatic classes in propositional modal logic», en J. N. Crossley (ed.), *Algebra and Logic*, Lecture Notes in Mathematics 450, Springer-Verlag, Berlín, 163-173.
- HALMOS, [1960], *Naive Set Theory*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York. Hay traducción castellana en C.E.C.S.A., México, 1965.
- HUGUES, G. E., y CRESWELL, M. J. [1968]: *An Introduction to Modal Logic*, Methuen, Londres. Segunda edición de 1972. Hay traducción castellana en Ed. Tecnos, 1973.
- [1984], *A Companion to Modal Logic*, Methuen, Londres.
- JANÉ, I. [1989], *Algebras de Boole y lógica*, Publicacions de la Universitat de Barcelona, Barcelona.

- JONSSON, B., y TARSKI, A. [1951], «Boolean algebras with operators I», *American Journal of Mathematics* 73, 891-939.
- KRIPKE, S. [1959], «A completeness theorem in modal logic», *J. Symbolic Logic* 24, 1-14.
- [1963], «Semantical considerations on modal logic», *Acta Philosophica Fennica* 6, 83-94.
- [1963a], «Semantical analysis of modal logic I: normal propositional calculi», *Zeit. Math. Logik. Grund.* 9, 67-96.
- LEWIS, C. I. [1912], «Implication and the algebra of logic», *Mind* 21, 522-531.
- LEMMON, E. J. [1966], «Algebraic semantics for modal logics», *J. Symbolic Logic* 31, 191-218.
- LEMMON, E. J., y SCOTT, D. [1977], *An Introduction to Modal Logic*, Blackwell, Oxford.
- MAKINSON, D. [1966], «On some completeness theorems in modal logic», *Zeit. Math. Logik. Grund.* 12, 379-384.
- [1971], «Some embedding theorems for modal logic», *Notre Dame Journal of Formal Logic* 12, 252-254.
- McKINSEY, J. C. C., y TARSKI, A. [1944], «The algebra of topology», *Annals of Mathematics* 45, 141-191.
- [1948], «Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting», *J. Symbolic Logic* 13, 1-15.
- MONTAGUE, R. [1974], *Formal Philosophy*, Yale University Press, New Haven.
- RASIOWA, H. [1974], *An algebraic study of non-classical logics*, North-Holland, Amsterdam.
- RASIOWA, H., y SIKORSKI, R. [1963], *The Mathematics of Metamathematics*, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe.
- SAMBIN, G., y VACCARO, V. [1988], «Topology and duality in modal logic», *Annals of Pure and Applied Logic* 37, 249-296.
- SCOTT, D. [1971], «On engendering an illusion of understanding», *J. Philosophy* 68, 787-807.
- SEGERBERG, K. [1971], *An Essay in Classical Modal Logic*, Philosophical studies published by the Philosophical Society and the Department of Philosophy, University of Uppsala, vol. 13, Uppsala.
- SAHLQVIST, H. [1975], «Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic», en S. Kanger (ed.), *Proceedings of the Third Scandinavian Symposium*, North-Holland, Amsterdam.
- SOLOVAY, R. [1976], «Provability interpretations of modal logics», *Israel Journal of Mathematics* 25, 287-304.
- THOMASON, S. K. [1972], «Semantic analysis of tense logic», *J. Symbolic Logic* 37, 150-158.
- [1974], «An incompleteness theorem in modal logic», *Theoria* 40, 30-34.
- [1975], «Categories of frames for modal logic», *J. Symbolic Logic* 40, 439-442.
- URQUHART, A. [1981], «Decidability and the finite model property», *Journal of Philosophical Logic* 10, 367-370.
- VAN BENTHEM, J. F. A. K. [1976], «Modal formulas are either elementary or not $\Sigma\Delta$ -elementary», *J. Symbolic Logic* 41, 436-438.

- [1978], «Two simple incomplete modal logics», *Theoria* 44, 25-37.
- [1979], «Canonical modal logics and ultrafilter extensions», *J. Symbolic Logic* 44, 1-8.
- [1983], *Modal Logic and classical Logic*, Bibliopolis, Nápoles.
- [1984], «Correspondance theory», en D. Gabay y F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. II, 167-247.

TABLA DE LÓGICAS

KT	Ej. 8.13
KT4 : S4	Ej. 8.15
KD : Deóntica T	Cap. 4
KTb : Sistema Brower	Cap. 5
KT4B : KT4E : S5	
KD4E : Deóntica S5	
K4	Ej. 8.12
KT4M : S4.1	Ej. 4.9
KT4D1 : S4.3	Ej. 5.3
KT4G : S4.2	Ej. 5.4
KT4Dumm : D : Lógica diodoreana de Prior	
KT4Grz : Sistema Grzegorzczk	Ej. 4.4
KL : K4L : GL : L : KW : Lógica de la demostrabilidad	Prop. 4.10, Teor. 7.6, Cor. 7.8, Cor. 7.11, Ej. 8.16, Ej. 7.8
KTr : Sistema Trivial	Ej. 5.8, Ej. 4.2
KV : Sistema Verum	Ej. 5.7, Ej. 4.3
K4M	Ej. 4.1
KT4M + $(\Diamond p \wedge \Box(p \rightarrow \Box p)) \rightarrow p$: VB	Prop. 7.17, Prop. 7.19
KH	Prop. 7.12, Prop. 7.15
$K + \Box(\Box \Box p \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box p \rightarrow q)$	Ej. 7.4
K4D1 ₀ L : K4.3W	Ej. 7.9, Prop. 4.9, Ej. 7.10
KT + $\Box(\Box \Box p \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box p \rightarrow q)$: MK ³	Ej. 7.4, Ej. 7.5, Ej. 7.6, Ej. 7.7
KF : $K + \Diamond \Box p \rightarrow (\Diamond \Box(p \wedge q) \vee \Diamond \Box(p \wedge \neg q))$	Cap. 9 §3.
$K + \{\Diamond^n \Box \perp \rightarrow \Box^{n+1} \perp : n \geq 1\}$	Cap. 9 después de Cor. 9.16.

LÓGICAS TRATADAS ESPECIALMENTE:

GL : KL, KW, K4L, $K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$

Completa, no canónica, tiene prop. marcos finitos, finit. axiomatizable, no de primer orden, decidible.

KH : $K + \Box(\Box p \leftrightarrow p) \rightarrow \Box p$

Incompleta, no canónica, no tiene p. ma. f., finit. axiomatizable, no de primer orden.

Urquhart : Para cada $X \subseteq \mathbb{N}$ recursivamente enumerable pero no recursivo y a que pertenece el 1, la lógica asociada a X es

$$K + \Box(\Diamond p \rightarrow \Box p) + \Diamond(\Box \perp \wedge p) \rightarrow \Box(\Box \perp \rightarrow p) +$$

$$\Diamond(\Diamond T \wedge p) \rightarrow \Box(\Diamond T \rightarrow p) + (\Diamond \Box \perp \wedge \Diamond \Diamond T) \rightarrow \Box^n \Diamond T \ (n \in X)$$

Completa, canónica, tiene p. ma. f., no finit. axiomatizable, de primer orden indecidible.

VB : de Van Benthem : $KTM + (\Diamond p \wedge \Box(p \rightarrow \Box p)) \rightarrow p$

Incompleta, no canónica, no tiene p. ma. f., finit. axiomatizable, de primer orden.

KF : de Kit Fine : $K + \Diamond \Box p \rightarrow (\Diamond \Box(p \wedge q) \vee \Diamond \Box(p \wedge \neg q))$

Completa, canónica, finit. axiomatizable, no de primer orden.

MK³ : $KT + \Box(\Box \Box p \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box p \rightarrow q)$

Completa, canónica, no tiene p. ma. f., finit. axiomatizable, de primer orden

TABLA DE FÓRMULAS

D	$\Box p \rightarrow \Diamond p$	Prop. 4.3
T	$\Box p \rightarrow p$	Cap.3, § 6
4	$\Box p \rightarrow \Box \Box p$	Prop. 4.1
5,E	$\Diamond p \rightarrow \Box \Box p$	Prop. 4.4'
B	$p \rightarrow \Box \Diamond p$	Prop. 4.2
Tr	$p \leftrightarrow \Box p$	Ej. 4.2, Ej. 5.8
Vr	$\Box p$	Ej. 4.3, Ej. 5.7
M	$\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$	
G	$\Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$	Prop. 4.8
Grz	$\Box(\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p) \rightarrow p$	Ej. 4.4
L,W,GL	$\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$	Prop. 4.10, Teor. 7.6, Cor. 7.8, Cor. 7.11, Ej. 8.16, Ej. 7.8
H	$\Box(\Box p \leftrightarrow p) \rightarrow \Box p$	Prop. 7.12, Prop. 7.15
Dumm	$\Box(\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p) \rightarrow (\Diamond \Box p \rightarrow p)$	
D1,Lem	$\Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$	Ej. 4.15
D1 ₀ ,Lem ₀	$\Box((\Box p \wedge p) \rightarrow q) \vee \Box((\Box q \wedge q) \rightarrow p)$	Prop. 4.9
	$\Box(\Box p \rightarrow \Box q) \vee \Box(\Box q \rightarrow \Box p)$	Ej. 4.5
	$p \rightarrow \Box p$	Ej. 4.2
	$\Box(\Box p \rightarrow p)$	Ej. 4.13, Ej. 5.10
	$\Diamond p \rightarrow \Box p$	Prop. 4.5
	$\Diamond p \leftrightarrow \Box p$	Prop. 4.6
	$\Box \Box p \rightarrow p$	Prop. 4.7
	$\Box \Diamond \Box p \rightarrow \Diamond \Box \Box p$	Ej. 4.7
	$\Box(\Diamond p \rightarrow \Box p)$	Ej. 4.8
	$\Diamond(\Diamond T \wedge p) \rightarrow \Box(\Diamond T \rightarrow p)$	Ej. 4.9
	$\Diamond(\Box \perp \wedge p) \rightarrow \Box(\Box \perp \rightarrow p)$	Ej. 4.10
	$(\Diamond \Box \perp \wedge \Diamond \Diamond T) \rightarrow \Box^n \Diamond T$	Ej. 4.11
	$\Diamond T \rightarrow (\Box p \rightarrow p)$	Ej. 4.14, Ej. 5.11
	$(\Diamond p \wedge \Box(p \rightarrow \Box p)) \rightarrow p$	Prop. 7.16
	$\Box(\Box \Box p \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box p \rightarrow q)$	Ej. 7.4, Ej. 7.5, Ej. 7.6, Ej. 7.7
	$\Diamond^n \Box \perp \rightarrow \Box^{n+1} \perp \quad (n \geq 1)$	Después de Cor. 9.16
KF	$\Diamond \Box p \rightarrow (\Diamond \Box(p \wedge q) \vee \Diamond \Box(p \wedge \neg q))$	Apt. 3 del Cap. 9.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

Los símbolos de la lista que viene a continuación son los símbolos específicos de la lógica modal y de este libro. El número de página que acompaña a cada uno de ellos indica el primer lugar en que aparece y en el que se especifica su significado.

P : 15.	$\Box^n$: 50.	$T_m(\langle M, R, e \rangle)$: 142.
$\rightarrow$: 15.	$\Diamond^n$: 50.	$T_m(M)$: 142.
$\perp$: 15.	$\Box\Sigma$: 50.	$\Diamond\Box\wedge\Sigma$: 144.
$(:$: 15.	$g(.)$: 51.	$\langle A, \wedge, \vee, *, 0, 1, \tau \rangle$: 151.
$)$: 15.	$\models_{d(L)}$: 50.	$\Rightarrow$: 122.
$\Box$: 15.	$\models_{id(L)}$: 50.	$*_L, \vee_L, \wedge_L, 0_L, 1_L, \tau_L$: 153.
For (P): 16.	$(.)^*$: 61.	For(P)/ $\sim_L$: 153.
$\neg$: 17.	$\langle M, R, \langle e(p_\alpha): \alpha < \kappa \rangle \rangle$: 62.	$L(A)$: 155.
$\wedge$: 17.	$\langle A, R^A, \langle P_\alpha^A: \alpha < \kappa \rangle \rangle$: 63.	A_L : 155.
$\vee$: 17.	MO_L : 63.	$(A)^\#$: 158.
$\leftrightarrow$: 17.	ES_L : 63.	$(t)^+$: 160.
T : 17.	M_L : 70.	Δ^+ : 161.
$\Diamond$: 17.	R_L : 70.	$H(X)$: 165.
$lg(.)$: 18.	e_L : 70.	$S(X)$: 165.
Sub($\cdot$): 18.	$\langle M_L, R_L, e_L \rangle$: 70.	$P(X)$: 165.
$A(p_i/B_i, \dots, p_n/B_n)$: 19.	M_L : 72.	$HSP(X)$: 165.
$A(p/B)$: 19.	$\sim_\Sigma$: 81.	$A(M)$: 168.
Taut (P): 23.	$[x]_\Sigma$: 81.	St(A): 171.
$L(\Sigma)$: 24.	$[x]$: 81.	$M(A)$: 172.
$\vdash_L$: 27.	e_Σ : 82.	eu(M): 178.
$\models_L$: 29.	M/Σ : 82.	R_{eu} : 178.
Ded $_L(\Sigma)$: 30.	R_Σ : 82.	$m(X)$: 178.
$\langle M, R \rangle$: 36.	R_Σ' : 82.	eu($\langle M, R \rangle$): 178.
$\langle M, R, e \rangle$: 37.	$R^\#$: 83.	e : 153, 185.
$\models_x$: 37.	$\oplus_{i \in I} \langle M_i, R_i \rangle$: 118.	$I(X)$: 186.
$\models$: 37.	$\Pi_{i \in I} M_i$: 120.	$\langle M, R, P \rangle$: 187.
$L(C)$: 42.	$\Pi_U \langle M_i, R_i \rangle$: 120.	$P_\oplus$: 188.
$C(L)$: 42.	EC: 129.	$A(\langle M, P \rangle)$: 188.
R^n : 44.	EC_Δ : 129.	MG(A): 190.
$\models_f$: 46.	EC_Σ : 129.	$\langle M_L, R_L, P_L \rangle$: 191.
$\models_d$: 46.	$EC_{\Sigma\Delta}$: 129.	

ÍNDICE DE TERMINOLOGÍA CONJUNTISTA

A continuación presentamos una serie de expresiones simbólicas del lenguaje de la teoría de conjuntos empleadas en el libro junto con, para cada una de ellas, la especificación de su significado.

$X \cap Y$: la intersección del conjunto X con el Y .

$X \cup Y$: la unión del conjunto X con el Y .

$X - Y$: la diferencia entre el conjunto X y el Y .

$P(X)$: el conjunto potencia del conjunto X .

$f: A \rightarrow B$: f es una función de A en B .

$x \in A$: x pertenece a A .

$A \subseteq B$: A es un subconjunto de B , A está incluido en B .

$A \times B$: el producto cartesiano de A con B .

$\forall x$: para todo x .

$\exists x$: existe un x , hay un x .

$\mathbb{N}$: el conjunto de los números naturales.

$\emptyset$: el conjunto vacío.

$\cup A$: la unión del conjunto A .

$\cap A$: la intersección del conjunto A .

$\bigcap_{i \in I} A_i$: la intersección de la familia de conjuntos $\{A_i; i \in I\}$.

$\bigcup_{i \in I} A_i$: la unión de la familia de conjuntos $\{A_i; i \in I\}$.

$\prod_{i \in I} A_i$: el producto cartesiano de la familia de conjunto $\{A_i; i \in I\}$.

$h[X]$: el conjunto de imágenes de los elementos de X por la función h .

$h(x)$: la imagen de x por la función h .

ÍNDICE DE AUTORES Y MATERIAS

Este índice se ha elaborado siguiendo el siguiente criterio. Al lado de cada entrada de una materia aparece el número de página en que el concepto es introducido y definido, y si una misma entrada tiene más de una acepción, aparecen los números de página correspondientes. Al lado de cada nombre (de autor, de lógica o de teorema) aparecen los números de página en que figuran.

- Álgebra e : 153.
 Álgebra e_L : 171.
 Álgebra de Boole: 210.
 Álgebra de conjuntos: 212.
 Álgebra de Lindenbaum-Tarski: 153.
 Álgebra modal (normal): 151.
 Ancestro (de una relación): 44.
 Árbol: 125.
 —reflexivo: 125.
 —transitivo: 125.
 —reflexivo y transitivo: 126.
 Asignación en un álgebra: 153.
 Asignación en una p -estructura A : 204.
 Asignación en un marco M : 36.
 Axioma de McKinsey: 149.
 Axioma distributivo: 23.

 Benthem, J. van: 11, 13, 104, 135, 136, 138, 196.
 Birkoff, G.: 165, 166.
 Blok, W. J.: 157.
 Boolos, G.: 12.

 Carnap, R.: 9.
 Clase ecuacional: 160.
 —elemental: 129.
 — Δ -elemental: 129.
 — EC : 192.
 — EC_Δ : 129.
 — EC_Σ : 129.
 — Σ -elemental: 129.
 — $EC_{\Sigma\Delta}$: 129.
 — $\Sigma\Delta$ -elemental: 129.
 Clausura booleana: 91.
 Clausura modal: 92.

 Completitud de K para marcos: 71.
 Conexión zig-zag: 124.
 Conjunto de fórmulas satisfactible: 206.
 —finitamente satisfactible: 141.
 Conjunto de fórmulas modales: 206.
 — L -consistente: 127.
 — L -consistente y maximal: 68.
 — L -inconsistente: 127.
 —infinitamente satisfactible: 141.
 —satisfactible: 141.
 —satisfecho en un índice: 141.
 Consecuencia:
 —débil: 46.
 —débil módulo L : 50.
 —local débil: 50.
 —local débil módulo L : 50.
 —fuerte: 46.
 —tautológica: 29.
 Constantes: 201, 207.
 Constante sentencial $\perp$: 15.
 Creswell, M. J.: 99, 11.
 Cuantificador: 201, 207.

 Deducible de Σ : 27.
 Denotación de un término: 204, 209.
 Desenmarañamiento: 127.

 Ecuación: 202.
 —válida en un álgebra modal: 158.
 Elementalmente equivalentes:
 — p -estructuras: 205.
 —marcos: 129.
 Estructura ω -saturada: 140.

Extensión por ultrafiltros: 178.

Extensiones seguras: 46.

Feferman, S.: 116.

Filtrado: 83.

—a través de: 83.

Filtro: 211.

—propio: 211.

Fine, K.: 10, 129, 140, 143, 144, 179, 197.

Finitamente axiomatizable: 25.

Finitamente satisfactible: 141.

Fórmula (modal): 16.

—longitud de: 18.

—deducible de Σ : 27.

—grado de: 51.

—verdadera en un índice: 37.

—válida en un modelo: 37.

—válida en un marco: 37.

—válida en una clase de modelos: 37.

—válida en una clase de marcos: 37.

—válida en un marco general: 186.

—válida en un álgebra: 154.

—verdadera en una asignación en un álgebra: 154.

—satisfactible en un modelo: 141.

Fórmula (de primer orden): 202.

—de segundo orden: 208.

—atómica: 202, 208.

GL: 27, 93 y ss.

Gödel, K.: 12.

Goldblatt, R. I.: 10, 123, 124, 135, 136, 137, 182.

Hintikka, J.: 9.

Homomorfismo: 114.

—entre álgebras: 164.

Hugues, G. E.: 110.

Imagen p-mórfica: 114.

Índice final: 39.

Inducción (principio de): 17.

Inmersión entre marcos generales: 187.

Ínfimo: 35.

Instancia del axioma distributivo: 23.

Instancia de sustitución de una tautología: 22.

Isomorfismo: 114.

—entre marcos generales: 187.

—entre p-estructuras: 205.

Jonsson, B.: 9.

Kanger, S.: 9.

Keisler, J. M.: 133.

KF: 144.

KH: 99 y ss.

KH-marco: 99.

Kripke, S.: 9, 11, 12.

L-álgebra: 157.

Lemmon, E.J.: 10, 27, 67.

Lewis: C.I.: 9.

L-marco: 42.

L-marco general: 187.

L-modelo: 42.

Lema de Goldblatt: 123.

Lenguaje modal: 15.

—vocabulario de: 15.

Letras sentenciales: 15.

Lógica: 22.

—algebraicamente completa: 157.

—completa: 42.

—completa respecto a sus modelos: 43.

—caracterizada por una clase de marcos: 43.

—canónica: 72.

—con la propiedad de los modelos finitos: 79.

—con la propiedad de los marcos finitos: 79.

—clásica: 22.

—regular: 22.

—normal: 22.

—finitamente axiomatizable: 25.

—recursivamente axiomatizable: 25.

—que extiende a: 25.

—de una clase de marcos C : 42.

— C -correcta: 42.

— C -completa: 42.

—incompleta: 42.

—d-persistente: 195.

- Lógica E: 23.
 Lógica K: 23.
 Lógicamente finito: 91.
 Lógicas de Urquhart: 108 y ss.
 Łoś: 120, 121.
- Mackinson, D.: 67, 115.
 Marco: 36.
 —canónico: 70.
 —generado por in índice: 126.
 —general: 186.
 —general descriptivo: 193.
 —fuertemente generado: 98.
 Marcos modalmente equivalentes: 129.
 McKinsey, J. C. C.: 9, 143.
 Menor lógica clásica: 23.
 Menor lógica normal: 23.
 Modalidad: 92.
 Modelo: 37.
 —canónico: 70.
 —de un conjunto de ecuaciones: 159.
 —de un conjunto de sentencias: 204.
 —irreflexivo: 47, 48.
 —modalmente 1-saturado: 141.
 —modalmente 2-saturado: 141.
 —modalmente saturado: 141.
 Modelos modalmente equivalentes: 81.
Modus ponens: 22.
- Operador modal: 15.
 Orden parcial: 35.
- p-morfismo: 112.
 —teorema del: 112.
 —inyectivo: 114.
 —sobre: 112.
 —entre marcos generales: 187.
 Principio de inducción: 17.
 Principio de definición por recursión: 17.
 Producto directo de álgebras: 163.
 Propiedad de la disyunción: 98.
 Propiedad de la intersección finita (p.i.f.): 212.
 Propiedad de los modelos finitos (p.m.f.): 79.
- Propiedad de los marcos finitos (p.ma.f.): 79.
 Punto final: 39.
- Quine, W.O.: 12.
- Rama finita: 125.
 —infinita: 125.
 Rasiowa, H.: 9.
 R-cadena: 104.
 R-predecesor: 125.
 R-sucesor: 104.
Recession frame: 107, 110.
 Recursión (principio de): 17.
 Regla de necesidad: 23.
 Relación:
 —apropiada: 82.
 —euclídea: 53, 54.
 —función: 53, 55.
 —función de M en M: 53, 55.
 —débilmente conectada: 53, 56.
 —débilmente dirigida: 53, 56.
 —débilmente densa: 53, 55.
 —inversamente bien fundada: 53, 57.
 —reflexiva: 47.
 —serial: 53, 54.
 —simétrica: 54.
 —transitiva: 54.
 Relator: 201, 207.
 Retículo: 35.
 ρ -estructura: 204.
- Scott, D.: 10, 27, 67.
 Segerberg, K.: 10, 112, 116.
 Sentencia: 203.
 —verdadera de una ρ -estructura: 205.
 —lógicamente válida: 205.
 Sahlqvist, H.: 10, 127.
 Satisfacción: 204, 209.
 Shelah, S.: 133.
 Símbolo de igualdad: 201.
 Símbolo funcional: 201.
 Sikorski, R.: 9.
 Smorinsky, C.: 12.
 Solovay, R.: 11.
 Subálgebra: 162.
 Subestructura: 206.
 —elemental: 206.

- Subfórmulas: 18.
 Sublenguaje sentencial: 15.
 Submarco: 116.
 Submarco generado: 116.
 —generado por x : 44.
 —general generado: 187.
 Submodelo generado: 116.
 —generado por x : 44.
 Supremo: 35.
 Sustitución de letras sentenciales por fórmulas: 19.
 Sustitución: 22.

 Tarski, S.: 9.
 Tautología: 22, 29,
 —instancia de sustitución de: 22.
 Teorema de, una lógica: 27.
 Teorema de:
 —Van Benthem: 136, 196.
 —Birkhoff: 165.
 —Craig: 26.
 —K. Fine: 143.
 —Goldblatt: 136, 137, 138.
 —Goldblatt-Thomason: 182.
 —Keisler: 133.
 —Keisler-Shelah: 133.
 —Łoś: 120, 121.
 —Löwenheim-Skolem: 206.
 —Löwenheim-Skolem descendente: 206.
 Teorema:
 —de compacidad: 206.
 —de completitud algebraica para K : 157.
 —de completitud algebraica para las lógicas normales: 157.
 —de completitud de K para marcos: 71.
 —de completitud para marcos generales: 187.
 —de completitud para modelos: 71.
 —de representación de Stone: 213.
 —del ultrafiltro: 212.
 Teoría modal (de un modelo): 142.
 Teoría de la completitud: 9.
 Teoría de la correspondencia: 10.
 Teoría de la dualidad: 11.
 Término: 201, 207.
 Thomason, S. K.: 10, 182, 185.
 Tipo de semejanza: 201.
 Traducción del lenguaje modal al lenguaje de primer orden: 61.
 Traducción de fórmulas modales a términos: 158.
 Traducción de términos a fórmulas modales: 160.

 Unión disjunta:
 —de una familia de marcos: 118.
 —de una familia de marcos generales: 188.
 Ultrafiltro: 211.
 —principal: 213.
 —no-principal: 213.
 —sobre un conjunto: 213.
 Ultrapotencia de marcos: 121.
 Ultraproducto de marcos: 120.
 Urquhart, A.: 108.

 Van Benthem, J.: véase Benthem, J. van.
 Variable: 201.
 —de individuo: 207.
 —de relación: 207.
 —ocurrencia libre de: 203, 208.
 —ocurrencia ligada de: 203, 208.
 Variedad: 166.
 VB: 104.
 VB-marco: 104.

SERIE DE FILOSOFÍA Y ENSAYO

Dirigida por Manuel Garrido

- Alston, W. P.; Edwards, P.; Malcom, N.; Nelson, J. O., y Prior, A.: *Los orígenes de la filosofía analítica*. Moore, Russell, Wittgenstein.
- Austin, J. L.: *Sentido y percepción*.
- Boden, M. A.: *Inteligencia artificial y hombre natural*.
- Bottomore, T.; Harris, L.; Kiernan, V. G.; Miliband, R.; con la colaboración de Kolakowski, L.: *Diccionario del pensamiento marxista*.
- Brown, H. I.: *La nueva filosofía de la ciencia* (2.ª ed.)
- Bunge, M.: *El problema mente-cerebro* (2.ª ed.).
- Couturat, L.: *El álgebra de la lógica*.
- Chisholm, R. M.: *Teoría del conocimiento*.
- Dampier, W. C.: *Historia de la ciencia y sus relaciones con la filosofía y la religión*.
- Díaz, E.: *Revisión de Unamuno*. Análisis crítico de su pensamiento político.
- Doop, J.: *Nociones de lógica formal*.
- Eccles, J. C.: *La psique humana*.
- Edelman, B.: *La práctica ideológica del Derecho*.
- Fann, K. T.: *El concepto de filosofía en Wittgenstein*.
- Ferrater Mora, J., y otros: *Filosofía y ciencia en el pensamiento español contemporáneo (1960-1970)*.
- Feyerabend, P.: *Tratado contra el método*.
- García Suárez, A.: *La lógica de la experiencia*.
- Garrido, M.: *Lógica simbólica*.
- Gómez García, P.: *La antropología estructural de Claude Lévi-Strauss*.
- Gurméndez, C.: *Ser para no ser*. Ensayo de una dialéctica subjetiva.
- Habermas, J.: *La lógica de las ciencias sociales*.
- Habermas, J.: *Teoría y praxis*.
- Hierro, J. S.-P.: *Problemas del análisis del lenguaje moral*.
- Hintikka, J.: *Lógica, juegos de lenguaje e información*.
- Hintikka, J.: *Saber y crecer*. Una introducción a la lógica de las dos nociones.
- Kuhn, T. S.: *Segundos pensamientos sobre paradigmas*.
- Lakatos, I., y otros: *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales* (2.ª ed.).
- Lindsay, P. H., y Norman, D. A.: *Introducción a la psicología cognitiva* (2.ª ed.).
- Lorenzen, P.: *Metamatemática*.
- Lorenzo, J. de: *El método axiomático y sus creencias*.
- Lorenzo, J. de: *Introducción al estilo matemático*.
- Lorenzo, J. de: *La filosofía de la matemática de Jules Henri Poincaré*.
- Martín Santos, L., y otros: *Ensayos de filosofía de la ciencia*.
- Mates, B.: *Lógica matemática elemental*.
- McCarthy, Th.: *La teoría crítica de Jürgen Habermas*.
- París, C.: *Hombre y naturaleza*.
- Popper, K. R.: *Búsqueda sin término*. Una autobiografía intelectual.
- Popper, K. R.: *Realismo y el objetivo de la ciencia*. Post Scriptum a la Lógica de la investigación científica, vol. I.
- Popper, K. R.: *El universo abierto*. Post Scriptum a la Lógica de la investigación científica, vol. II.
- Popper, K. R.: *Teoría científica y el cisma en física*. Post Scriptum a la Lógica de la investigación científica, vol. III.
- Prior, A. N.: *Historia de la lógica*.
- Putnam, H.: *Razón, verdad e historia*.
- Quine, W. V.: *La relatividad ontológica y otros ensayos*.
- Quintanilla, M. A.: *Idealismo y filosofía de la ciencia*.
- Rama, C. M.: *Teoría de la historia*. Introducción a los estudios históricos (3.ª ed.).
- Rescher, N.: *La primacía en la práctica*.
- Rivadulla, A.: *Filosofía actual de la ciencia*.
- Robinet, A.: *Mitología, filosofía y cibernética*.
- Rodríguez Paniagua, J. M.: *¿Derecho natural o axiología jurídica?*
- Rodríguez Paniagua, J. M.: *Marx y el problema de la ideología*.
- Sahakian, W. S.: *Historia y sistemas de la psicología*.
- Smart, J. J. C., y Williams, B.: *Utilitarismo: pro y contra*.
- Sotelo, I.: *Sartre y la razón dialéctica*.
- Strawson, P. F.: *Ensayos lógico-lingüísticos*.
- Vargas Machuca, R.: *El poder moral de la razón*. La filosofía de Gramsci.
- Veldman, D. J.: *Programación de computadoras en ciencias de la conducta*.
- Villacañas, J. L.: *Racionalidad crítica*. Introducción a la filosofía de Kant.
- Wellman, C.: *Morales y éticas*.