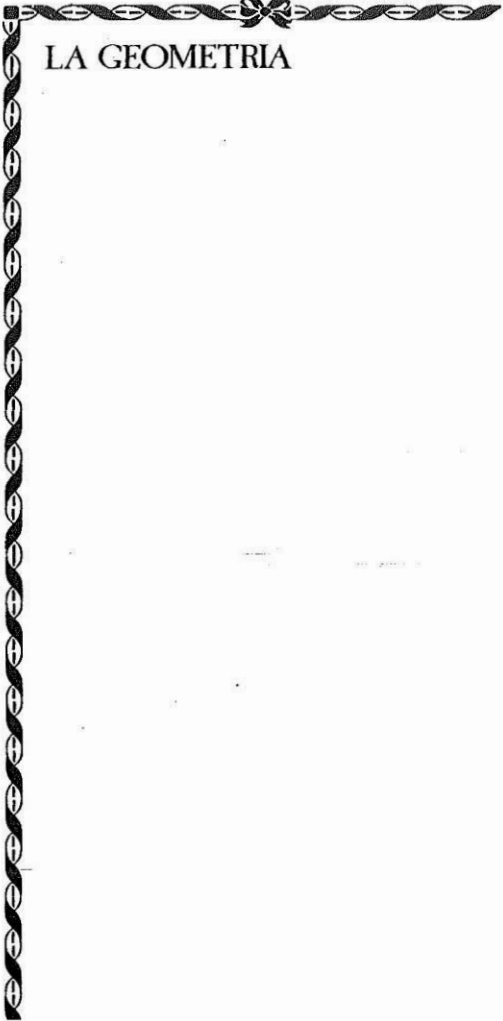




LA GEOMETRIA

Advertencia:

Hasta aquí he intentado que cualquier persona pudiera entender mis escritos; sin embargo, temo que este tratado no podrá ser leído sino por aquellos que ya tienen conocimiento de lo que se expone en los estudios de Geometría, pues, considerando que incluyen verdades muy correctamente demostradas que me han sido de gran utilidad, he considerado superfluo repetirlas¹.



LA GEOMETRIA

LIBRO PRIMERO

A-T, VI, 369 **SOBRE LOS PROBLEMAS QUE PUEDEN CONSTRUIRSE EMPLEANDO SOLAMENTE CÍRCULOS Y LÍNEAS RECTAS**

Todos los problemas de la Geometría pueden ser reducidos fácilmente a términos tales que no sea necesario posteriormente para construirlos, sino conocer la longitud de algunas líneas.

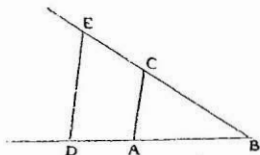
Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones geométricas

Así como la Aritmética se basa en cuatro o cinco operaciones, a saber, la adición, la sustracción, la multiplicación, la división y la extracción de raíces (que puede ser considerada como una especie de división), de igual forma no es necesario en Geometría para llegar a conocer las líneas que se buscan y para disponerlas a ser conocidas, sino añadir o sustraer otras, o bien tomando una línea que consideraré como la unidad, para relacionarla tanto más fácilmente con los números (pudiendo ser tomada generalmente a discreción), y teniendo otras dos líneas, encontrar una cuarta línea que sea a cada una de las líneas dadas como la otra es a la unidad (lo cual es lo mismo que la multiplicación); o, en segundo

lugar, encontrar una cuarta línea que es a una de estas dos como la unidad es a la otra (lo que equivale a la división); o, finalmente, hallar una, dos o varias medias proporcionales entre la unidad y alguna otra línea (lo cual es equivalente a la obtención de la raíz cuadrada o cúbica, etc...). No temeré introducir estos términos en la Geometría con el fin de hacerme más inteligible².

La multiplicación

Sea, por ejemplo, AB la unidad y que sea preciso multiplicar BD por BC ; solamente debo unir los puntos



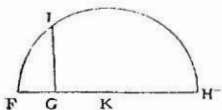
A y C , trazando DE paralela a CA , siendo BE el resultado de esta multiplicación³.

La división

O bien, si es preciso dividir BE por BD , habiendo unido los puntos E y D , trazo AC paralela a DE , siendo, pues, BC el resultado de tal división⁴.

La extracción de la raíz cuadrada

Si se desea calcular la raíz cuadrada de GH , se agrega FG que es la unidad y dividiendo FH en dos partes



iguales, tomando como centro el punto K , trazo el círculo FIH . Seguidamente trazo sobre el punto G hasta

A-T, VI, 371

el punto I la perpendicular a FH , siendo GI la raíz buscada. No me refiero a la raíz cúbica ni a otras, puesto que las trataré más pormenorizadamente en otro lugar⁵.

Sobre el uso de letras en Geometría

Pero frecuentemente no es necesario trazar de esta forma tales líneas sobre el papel, siendo suficiente designar cada una de ellas por una letra⁶. Así, para sumar la línea BD y GH , llamo a la una a y a la otra b y escribo $a+b$. Por tanto, escribiré $a-b$ para indicar la resta de b respecto de a . Y escribiré ab para indicar la multiplicación de la una por la otra. Asimismo, $\frac{a}{b}$ para dividir a por b . Y aa o a^2 para multiplicar a por sí misma. Y a^3 para multiplicar este resultado una vez más por a , y así hasta el infinito; y $\sqrt{a^2+b^2}$ para obtener la raíz cuadrada de a^2+b^2 ; finalmente $\sqrt{C \cdot a^3 - b^3 + abb}$ para obtener la raíz cúbica de $a^3 - b^3 + abb$, y de forma similar para otras⁷.

Debe observarse que con a^2 , b^3 , y expresiones similares no concibo ordinariamente sino líneas simples, aunque las nombre cuadrados o cubos porque me sirvo de las expresiones utilizadas en el álgebra⁸.

Igualmente debe tenerse en cuenta que todas las partes de cada línea deben, ordinariamente, expresarse por el mismo número de dimensiones, cuando la unidad no ha sido establecida en la formulación del problema. Así, a^3 , contiene las mismas dimensiones que abb o b^3 , siendo éstas las componentes de la línea que he denominado $\sqrt{C \cdot a^3 - b^3 + abb}$. No sucede lo mismo, sin embargo, cuando la unidad está determinada, pues ésta puede suponerse siempre cualquiera que sean las dimensiones. Así, si es preciso extraer la raíz cúbica de $aabb-b$, debemos considerar que la cantidad $aabb$ está dividida una vez por la unidad y la cantidad b está multiplicada dos veces por la misma unidad.

A-T, VI, 372

Finalmente, con el fin de no olvidar los nombres de estas líneas, debe ser confeccionada una lista tantas veces cuantas introduzcamos variaciones. Por ejemplo, escribiremos:

13

$AB=1$, es decir, AB igual a 1

$GH=a$,

$BD=b$, etc...⁹

Sobre el procedimiento para acceder a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas

Si, pues, deseamos resolver un problema, inicialmente debe suponerse efectuada la resolución, dando nombre a todas las líneas que se estimen necesarias para su construcción, tanto a las que son desconocidas¹⁰ como a las que son conocidas. A continuación, sin establecer distinción entre las líneas conocidas y las desconocidas, debemos descifrar el problema siguiendo el orden que muestre de modo más natural las relaciones entre estas líneas, hasta que se indentifique un medio de expresar una misma cantidad de dos formas: esto es lo que se entiende por una ecuación, pues los términos de una de estas expresiones son iguales a los de la otra. Deben hallarse tantas ecuaciones como líneas desconocidas se han supuesto. Pero si no se logra esto y, no obstante, no se ha omitido consideración alguna de lo especificado en el problema, esto testimonia que el problema no está completamente determinado. En tal caso podemos elegir arbitrariamente líneas de longitud conocida para cada línea a la que no corresponda una ecuación. Si después de esto aún existen varias, es preciso servirse por orden de cada una de las ecuaciones restantes, bien sea considerándolas aisladamente, bien cada una en comparación con las otras, para obtener un valor para cada una de las líneas desconocidas; debe procederse de este modo hasta que no exista sino una sola línea desconocida que sea igual a alguna línea conocida o cuyo cuadrado, cubo, cuadrado del cuadrado, supersólido, cuadrado del cubo, etc., sea igual a la suma o diferencia de dos o más cantidades, una de las cuales sea conocida y las otras estén compuestas de algunas medias proporcionales entre la unidad y ese cuadrado, cubo, cuadrado del cuadrado, etc., multiplicado por otras conocidas¹¹. Esto lo expreso del modo siguiente:

A-T, VI, 373

$$\begin{aligned} z &= b \\ \text{o } z^2 &= -az + bb, \\ \text{o } z^3 &= +az^2 + bbz - c^3, \\ \text{o } z^4 &= az^3 - c^3z + d^4, \text{ etc...} \end{aligned}$$

Es decir, z , tomada como la cantidad desconocida es igual a b ; o el cuadrado de z es igual al cuadrado de b menos a multiplicado por z ; o el cubo de z es igual a a multiplicado por el cuadrado de z más el cuadrado de b

multiplicado por z , menos el cubo de c , y así en otros casos.

A-T, VI, 374

De esta manera pueden reducirse todas las cantidades desconocidas a una sola, siempre que el problema pueda ser construido mediante círculos y líneas rectas o por medio de secciones cónicas, o también por medio de cualquier otra línea curva de grado no superior al tercero o cuarto. Pero no me detengo en la explicación detallada de esto, pues os privaría del placer de aprender por vosotros mismos y de la utilidad de cultivar vuestro espíritu al ejercitarse en estas cuestiones, que es, según mi opinión, el principal resultado que se puede obtener de esta ciencia. Pues no creo exista entre estas cuestiones alguna tan difícil que no puedan solucionar aquellos que sean un poco más versados en Geometría común y en el Álgebra si prestan atención a cuanto se diga en este tratado.

Por esta razón me limitaré a advertiros que, si resolviendo estas ecuaciones no se descuida realizar todas las divisiones posibles, infaliblemente se alcanzarán los términos más simples a los cuales puede ser reducido el problema.

Cuáles son los problemas planos

Si el problema puede ser solucionado mediante la Geometría ordinaria, esto es, mediante el uso exclusivo de líneas rectas y círculos trazados sobre una superficie plana, cuando la última ecuación haya sido resuelta no nos encontraremos sino un cuadrado desconocido igual al resultado de multiplicar su raíz por alguna cantidad conocida y sumar o restar alguna otra cantidad conocida¹².

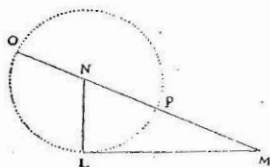
Cómo se resuelven

Entonces esta raíz o línea desconocida es fácilmente calculable¹³, pues si tengo, por ejemplo:

$$z^2 = az + bb,$$

A-T, VI, 375

construyo el triángulo rectángulo NLM , cuyo lado LM es igual a b (raíz cuadrada de la cantidad conocida bb) y el otro lado, LN , es igual a $\frac{1}{2}a$, esto es: la mitad de la



otra cantidad conocida que estaba multiplicada por z , la cual he supuesto que es la línea desconocida¹⁴. Seguidamente, prolongando MN , que es la base¹⁵ de este triángulo, hasta O , de suerte que NO sea igual a NL , la línea OM es z , la línea buscada. La cual se expresa de la siguiente forma:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

Pero si,

$$yy = -ay + bb,$$

siendo y la cantidad que deseamos calcular, entonces construyo el mismo triángulo NLM y de la hipotenusa MN resto NP que es igual a NL , obteniendo que PM es y , que era la raíz que deseaba calcular. De forma que:

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$

Y de la misma forma si tuviera

$$x^4 = -ax^2 + b^2,$$

PM sería x^2 , teniendo entonces que:

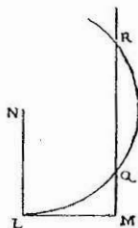
$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}};$$

y así en otros casos.

Finalmente, si tengo

$$z^2 = az - bb,$$

supongo NL igual a $\frac{1}{2}a$ y LM igual a b como en el caso anterior. Después, en lugar de unir los puntos M y N , trazo MQR paralela a LN , y tomando N como centro



trazo por L un círculo que corta a MQR en los puntos Q y R . Por tanto, la línea buscada, z , es MQ o bien MR , pues en este caso se expresa de dos formas¹⁶, a saber:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} ,$$

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} .$$

Y si el círculo que, teniendo su centro en el punto N y pasando por el punto L , no corta ni toca la línea recta MQR , entonces no existe raíz alguna de la ecuación. En consecuencia, puede asegurarse que es imposible la construcción del problema propuesto.

Finalmente, estas mismas raíces pueden encontrarse por una infinidad de medios. Solamente he deseado presentar éstos por ser muy simples con el fin de mostrar que pueden construirse todos los problemas de la geometría ordinaria sin hacer otra cosa que lo expuesto en las cuatro figuras explicadas. Esto no creo que haya llegado a ser conocido por los antiguos, pues en caso contrario no se hubiesen tomado la molestia de escribir tan gruesos volúmenes, ya que el solo orden de sus proposiciones nos permite concluir que no han conocido el verdadero método para calcular todas, sino que solamente han compilado lo que ocasionalmente llegaron a conocer.

Ejemplo tomado de Pappus

dada, el punto se encontrará sobre una cierta línea. Si las rectas dadas son seis y se da la proporción del sólido comprendido bajo tres de las trazadas con el sólido bajo las otras tres, el punto se encontrará igualmente sobre cierta línea. Pero si hay más de seis rectas, no podemos conocer si se guarda la proporción de algo comprendido por cuatro líneas con algo comprendido bajo el resto, pues nada hay que esté comprendido bajo más de tres dimensiones.

Os ruego que observéis de paso que el escrúpulo que tenían los antiguos en usar notaciones propias de Aritmética en Geometría, que no podía proceder sino de que no veían con bastante claridad su relación, era la causa de la gran oscuridad y dificultad en el modo en que se expresaban, pues Pappus sigue expresándose del modo siguiente:

A-T, VI, 379 *Están de acuerdo en esto²⁰ quienes en épocas pasadas han analizado tales cuestiones en cuanto defienden que la figura comprendida por tales líneas no es comprensible en modo alguno. Sin embargo, es posible enunciar y demostrar en general por medio de relaciones compuestas las anteriores proposiciones del modo siguiente: Si desde un punto se trazan sobre rectas dadas otras rectas que formen ángulos dados y, a la vez, se posee la relación compuesta de una de las trazadas a otra de ellas, de la segunda con la segunda, de la tercera con la tercera y, si son siete, de la última con una línea dada o, si son ocho, la de la cuarta con su correspondiente, el punto se encontrará sobre una de las líneas dadas en posición. De modo semejante, cualquiera que sea el número de rectas —par o impar—, puede afirmarse lo mismo. Pero, como he dicho, para cualquiera de los lugares que siguen al que corresponde a cuatro rectas, ninguna síntesis ha sido propuesta de modo que la línea sea conocida, etc...*

Así pues, la cuestión cuya solución había sido iniciada por Euclides y continuada por Apolonio sin haber llegado a ser solventada por nadie, es la siguiente: Teniendo tres, cuatro o un mayor número de rectas dadas en posición²¹, se intenta hallar en primer lugar un punto desde el cual se pudiesen trazar tantas líneas rectas, una-sobre-cada una de las dadas, formando ángulos dados, de modo que el rectángulo formado por dos de las trazadas desde el mismo punto²², guarde una proporción dada con el cuadrado de la tercera, en

donde después de haberse detenido algún tiempo en exponer cuanto se había escrito en Geometría por quienes le habían precedido, finalmente expone una cuestión de la que afirma que ni Euclides ni Apolonio ni ningún otro habían logrado responderla. Estas son sus palabras.

Apolonio afirma en el libro III que el problema del lugar con tres o cuatro líneas no fue enteramente solucionado por Euclides, así como tampoco lo fue por él mismo ni por ningún otro; es más, tampoco se completó lo escrito por Euclides, ateniéndose a los Elementos de las cónicas que ya habían sido demostrados en tiempos de Euclides...

Cito la versión latina y no la griega con el fin de que pueda ser entendido con más facilidad.

Un poco más adelante expone este problema del modo siguiente:

El problema del lugar relacionado con tres o cuatro líneas, el cual sirve de motivo a Apolonio para atribuirse grandes elogios por sus oposiciones sobre él mismo sin conceder mérito alguno a quien le había precedido en sus análisis es el siguiente¹⁸: Si son dadas tres líneas rectas en posición, y si son trazadas otras tres líneas rectas desde un mismo punto formándose ángulos conocidos con las tres líneas dadas, y si, a su vez, es conocida la proporción del rectángulo formado por dos de las líneas trazadas con el cuadrado de la otra, entonces el punto se encuentra en un lugar sólido, dado en posición, es decir, sobre una de las tres secciones cónicas¹⁹. Y si, de nuevo, se trazan líneas sobre cuatro rectas dadas en una determinada posición, en ángulos dados, y se da la proporción del rectángulo formado por dos de las trazadas con el formado por las otras dos, entonces y de modo semejante el punto se encuentra en una sección cónica. Por otra parte, se ha demostrado que únicamente a dos líneas corresponde un lugar plano; pero, si hay más de cuatro líneas, el lugar del punto no es de los que son conocidos; es de los llamados simplemente «líneas», sin conocerse nada más sobre su naturaleza o propiedades. Una de ellas, no la primera, pero sí la más clara, ha sido examinada, siendo de utilidad. Las proposiciones relacionadas con las mismas son éstas:

A-T, VI, 378

Si desde un punto son trazadas cinco líneas rectas, dadas en posición, sobre otras rectas bajo ángulos dados, y se da la proporción entre el paralelepípedo rectángulo comprendido bajo tres de las trazadas y el paralelepípedo rectángulo comprendido bajo las otras dos y otra línea

el caso de que no haya sino tres; o bien con el rectángulo de las otras dos si no hay más que cuatro. O bien, si hay cinco, que el paralelepípedo formado por tres²³ guarde la proporción dada con el paralelepípedo construido sobre las dos restantes y otra línea dada; si hay seis, que el paralelepípedo construido sobre tres guarde una proporción dada con el paralelepípedo formado por otras tres; si hay siete, que el resultado obtenido cuando se multipliquen cuatro de ellas entre sí, guarde la proporción dada con el resultado de la multiplicación de las otras tres y también de una línea dada; si hay ocho, que el resultado obtenido de la multiplicación de cuatro guarde la proporción dada con el resultado obtenido de las otras cuatro. De este modo, tal cuestión puede hacerse extensiva a cualquier otro número de líneas²⁴. A continuación y puesto que existen una infinidad de puntos que pueden cumplir lo que se trata de hallar, es necesario conocer y trazar la línea en la que se encuentran todos; Pappus afirma que, cuando no existen sino tres o cuatro líneas rectas dadas, se encuentra en una de las tres secciones cónicas, pero no intenta determinarla ni describirla, al igual que tampoco intenta explicar aquellas en que deben encontrarse todos estos puntos cuando la cuestión es planteada para un número mayor de líneas. Solamente indica que los antiguos habían imaginado una de aquellas que habían mostrado ser muy útil, que parecía la más simple, pero, sin embargo, no era la más importante. Esto me ha dado la oportunidad para intentar si puedo llegar tan lejos como lo que ellos han alcanzado mediante el método que utilizo.

A-T, VI, 380

Respuesta al problema de Pappus

En primer lugar, he llegado a conocer que si este problema es propuesto únicamente para tres, cuatro o cinco líneas, siempre podemos conocer los puntos buscados mediante la Geometría Simple, es decir, sirviéndonos exclusivamente de la regla y el compás y no haciendo sino lo que se ha dicho; únicamente debe exceptuarse cuando hay cinco líneas dadas y todas ellas son paralelas. En este caso, al igual que cuando hay seis, siete, ocho o nueve líneas, pueden siempre ser hallados los puntos deseados mediante la Geometría de sólidos,

A-T, VI, 381

esto es, empleando alguna de las tres secciones cónicas; debemos exceptuar solamente aquel caso en el que hay nueve líneas dadas y todas ellas son paralelas. Para tal caso, como para cuando hay 10, 11, 12 ó 13 líneas, pueden hallarse los puntos buscados por medio de una línea curva que sea de un grado mayor que las secciones cónicas, exceptuando el caso en que fueren trece las líneas dadas si son todas ellas paralelas. En este caso, como cuando son dadas 14, 15, 16, 17, será preciso emplear una línea curva de un grado aún mayor que la precedente y así indefinidamente.

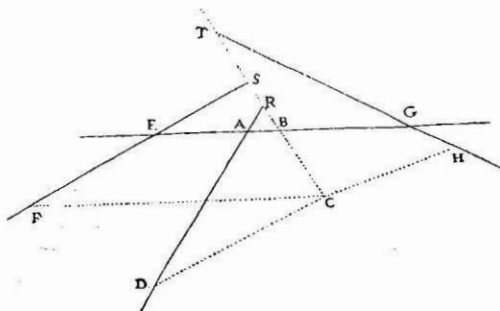
En segundo lugar, he hallado que cuando no hay sino tres o cuatro líneas dadas, los puntos buscados se encuentran todos no solamente en una de las tres secciones cónicas, sino también y en algunas ocasiones en la circunferencia de un círculo o en una línea recta. Igualmente, cuando hay 5, 6, 7 u 8, todos estos puntos se encuentran en alguna de las líneas que son de un grado más que las secciones cónicas, siendo imposible imaginar alguna que no sea útil para tal problema; pero también puede encontrarse excepcionalmente en una sección cónica, en un círculo o en una línea recta; si hay 9, 10, 11 ó 12, estos puntos se encuentran en una línea que no puede ser sino de un grado superior a las precedentes; pero todas las que son de un grado más pueden ser usadas para el problema y así al infinito.

A-T, VI, 382 Finalmente, la primera y la más simple de todas las líneas después de las secciones cónicas, es la que puede describirse por la intersección de una parábola y de una línea recta en la forma que explicaremos. De suerte que yo pienso haber respondido enteramente a lo que Pappus dice haber sido investigado en relación con esto durante la antigüedad; por ello, trataré de dar la demostración en pocas palabras, pues ya me había extenderme de tal modo.

Sean AB , AD , EF , GH , etc..., varias líneas dadas, debiendo hallarse un punto como C , desde el que trazando varias líneas rectas sobre las líneas dadas, como CB , CD , CF y CH , de modo que los ángulos CBA , CDA , CFE , CHG sean dados, y de modo tal que el resultado de la multiplicación de una parte de estas líneas sea igual al resultado obtenido por la multiplicación de las otras, o bien que guarden alguna otra proporción dada, lo cual en nada dificulta el problema.

CR y CD , que establezco³⁰ como z es a c ; de modo que si CR es $y + \frac{bx}{z}$, entonces³¹ CD será $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$.

Después de esto, puesto que las líneas AB , AD y EF son dadas en posición, la distancia que hay entre A y E también es conocida; si tal distancia la llamo k , entonces³² EB será igual a $k + x$; pero sería $k - x$, si el punto B se encontrase entre E y A , y $-k + x$, si E



estuviese entre A y B . Y puesto que los ángulos del triángulo ESB son dados, la proporción entre BE y BS también es conocida; la establezco como z es a d .

Por tanto, $BS = \frac{dk + dx}{z}$ y la línea completa³³

$CS = \frac{zy + dk + dx}{z}$; pero sería $\frac{zy - dk - dx}{z}$ si el punto

^{A-T. VI. 384} S se encontrase entre B y C ; y sería $\frac{-zy + dk + dx}{z}$ si

C se encontrase entre B y S . Además los tres ángulos del triángulo FSC son dados y, por tanto, también lo es la proporción de CS con CF , que es la misma³⁴ de

z a e ; por tanto, la línea³⁵ CF será $\frac{ezy + dek + dex}{zz}$.

Del mismo modo siendo AG , a la que llamo l , dada, BG será igual a $l - x$; porque los ángulos del triángulo BGT son también dados, tenemos dada la proporción de BG

con BT , que es como $z:f$, y, por tanto, BT será $\frac{fl-fx}{z}$

y CT será igual a $\frac{zy+fl-fx}{z}$. Ahora bien, puesto que la proporción de TC con CH es dada en virtud del triángulo TCH , estableciéndola como $z:g$, se obtendrá³⁶ que:

$$CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{zz}$$

De este modo podéis ver que cualquiera que sea el número de líneas dadas en posición, cuantas líneas sean trazadas desde el punto C formando ángulos dados, siguiendo el enunciado del problema, pueden siempre ser expresadas por tres términos: uno estará compuesto por una cantidad desconocida y , multiplicada o dividida por alguna otra cantidad conocida; el otro estará integrado por la cantidad desconocida x , también multiplicada o dividida por alguna otra conocida; el tercero, por una cantidad conocida. La única excepción será cuando las líneas dadas sean paralelas a la línea AB , en cuyo caso el término compuesto de la cantidad x será cero; o bien a la línea CB , en cuyo caso el compuesto de la cantidad y será cero, siendo esto muy claro y, por tanto, no siendo necesario que me detenga en su explicación. En relación con los signos «+» y «-» que se unen a estos términos pueden ser combinados de todos los modos imaginables.

A-T, VI, 385

Así mismo podéis ver que multiplicando varias de estas líneas entre sí, las cantidades x e y que se encuentran en el producto pueden tener solamente tantas dimensiones como líneas haya, a cuya explicación sirven las que han sido multiplicadas. De suerte que nunca tendrán más de dos dimensiones, cuando han resultado de la multiplicación de dos líneas; ni más de tres, cuando son el resultado de una multiplicación de tres líneas y así hasta el infinito.

Modo de hallar que el problema es plano cuando no se ha propuesto para más de cinco líneas

Además, para determinar el punto C solamente es requerida una condición: que el producto de la multiplicación de un cierto número de líneas sea igual al

obtenido por la de otras, o (lo que no es más difícil) que guarde una proporción dada con el resultado obtenido por la multiplicación de otras; podemos tomar a discreción una de las dos cantidades desconocidas x o y , buscando la otra por esta ecuación, en la que es evidente que, cuando el problema no es propuesto para un número superior a cinco líneas, la cantidad x que no es utilizada para la expresión de la primera de las líneas nunca puede tener más de dos dimensiones. De modo que, tomando y como una cantidad conocida, tendremos:

$$x^2 = \pm ax \pm b^2.$$

Por tanto y de la forma indicada, se podrá encontrar la cantidad x mediante la regla y el compás. Asimismo, tomando sucesivamente un infinito número de diferentes valores para la línea y , podremos hallar otros tantos para x ; de este modo, podremos también encontrar un número infinito de diversos puntos tales como el C , pudiendo describirse la línea curva exigida.

También puede procederse de igual modo cuando el problema está planteado para seis o más líneas, si, entre las que han sido dadas, hay algunas que son paralelas a BA o BC ; en este caso, una de las dos cantidades x o y no debe tener sino dos dimensiones en la ecuación³⁷; de este modo es posible encontrar el punto C mediante la utilización de la regla y el compás. Pero, por el contrario, si todas son paralelas, aunque el problema sea propuesto para cinco líneas, este punto C no podrá ser hallado de este modo, puesto que no encontrándose la cantidad x en la ecuación, no será permitido tomar una cantidad conocida para la que llamamos y , sino que el valor de ésta es el que es preciso calcular. Y, puesto que y tendrá tres dimensiones, no se la podrá calcular sino obteniendo la raíz de una ecuación cúbica, lo que usualmente no se puede lograr sin emplear por lo menos una de las secciones cónicas. Y aunque tengamos hasta nueve líneas dadas, con tal de que no todas sean paralelas, puede siempre lograrse que la ecuación no sobrepase el cuadrado del cuadrado³⁸; tales ecuaciones, pueden siempre resolverse por medio de secciones cónicas, del modo que más adelante explicaré. Y aunque sean dadas 13 líneas siempre puede expresarse la ecuación de modo que no alcance sino el cuadrado del cubo³⁹; consecuentemente, puede resolverse del modo que explicaré por medio de una línea que es solamente

con estas líneas como con las que son más simples⁴⁰. No afirmaré tampoco que tal exclusión sea debida a que no desearon aumentar el número de sus postulados y se consideraron satisfechos con admitir que pueden unirse dos puntos dados por una línea recta y describir un círculo desde el centro que pasase por un punto dado, pues no dudaron en modo alguno al realizar su estudio de las secciones cónicas en que debía suponerse la posibilidad de cortar un cono dado por un plano dado. Y, no es necesario suponer nada para trazar todas las líneas curvas que pretendo introducir, sino que dos o más líneas puedan moverse entre sí y que sus intersecciones engendren otras curvas; esto en nada me parece más difícil. Verdad es que no han introducido de modo perfecto las secciones cónicas en su geometría, pero yo no deseo introducir modificación alguna en los nombres normalmente aceptados. Pero me parece totalmente claro que si entendemos, como generalmente se hace, por «geométrico» lo que es preciso y exacto y, en segundo lugar, por «mecánica» lo que no lo es; y, asimismo, si consideramos la Geometría como una ciencia que enseña en general a conocer las medidas de todos los cuerpos, no existe razón alguna para excluir de la misma el estudio de las líneas más complejas y no el de las más simples, con tal de que puedan imaginarse descritas por un movimiento continuo o por varios movimientos sucesivos y en los que los últimos vienen determinados por los anteriores⁴¹; pues, por este medio, puede siempre tenerse conocimiento exacto de su medida. Pero lo que puede quizá haber impedido la admisión por los antiguos geómetras de aquellas curvas que eran más complejas que las secciones cónicas, es que las primeras que analizaron, por casualidad, fueron la Espiral, la Cuadratriz y semejantes⁴², que no pertenecen propiamente sino a las Mecánicas y no son del número de las que pienso que deban ser incluidas aquí; pienso así, puesto que podemos imaginarlas descritas por dos movimientos independientes, no guardando el uno con el otro relación alguna que pueda ser exactamente medida; aunque posteriormente hayan examinado la Concoide, la Cisoide, y algunas otras que nosotros aceptamos, sin embargo, es posible que al no haber analizado suficientemente sus propiedades, no se hayan cuestionado su importancia más de lo que cuestionaron la de las primeras. También podría haber sucedido que pensasen que no debían iniciar el análisis de una materia más difícil, ya que no conocían sino algunas

un grado superior a las secciones cónicas. Esto constituye la primera parte de lo que aquí deseaba demostrar; pero antes de iniciar la segunda, es necesario que facilite algunas observaciones relacionadas con la naturaleza de las líneas curvas.

LIBRO SEGUNDO

SOBRE LA NATURALEZA DE LAS LÍNEAS CURVAS

A-T, VI, 388

Sobre las líneas curvas que pueden admitirse en Geometría

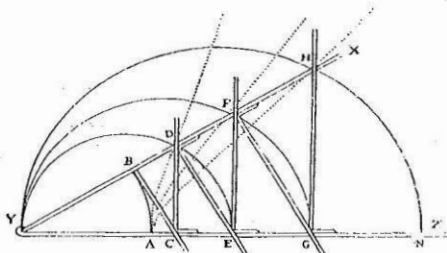
Los antiguos distinguieron con toda perfección la existencia de tres clases de problemas en Geometría: planos, sólidos y lineales; es decir, unos pueden ser contruidos con sólo trazar líneas rectas y círculos; los segundos, por el contrario, no pueden serlo sin realizar la introducción de alguna sección cónica; finalmente, los terceros requieren el empleo de una línea más compleja. Pero no logro evitar la extrañeza que me produce el que, además de esto, no llegasen a distinguir diversos grados entre estas líneas más complejas, al igual que no logro comprender por qué las han denominado Mecánicas y no Geométricas. Pues si pensamos que las han denominado de tal modo porque es necesario utilizar algún instrumento para trazarlas, entonces deberíamos rechazar por la misma razón los círculos y las líneas rectas, puesto que no se trazan sobre el papel, sino utilizando la regla y el compás que también pueden ser considerados como máquinas. Tampoco puede explicarse porqué los instrumentos utilizados para trazarlas, siendo más complejos que la regla y el compás, no pueden llegar a alcanzar la misma precisión; en tal caso, deberían considerarse fuera de la Mecánica, pues la precisión de las obras realizadas por la mano es aún más buscada en ella que en la Geometría, donde exclusivamente se desea lograr precisión en el razonamiento, pudiendo obtenerse tanta perfección en relación

A-T, VI, 389

cosas sobre las secciones cónicas e ignoraban aún mucho de cuanto puede construirse mediante la regla y el compás. Pero, puesto que tengo la esperanza de que aquellos que tengan destreza para servirse del cálculo geométrico aquí propuesto, no encontrarán tema alguno como para hacerlos vacilar en relación con los problemas planos o sólidos, creo pues oportuno invitarles a realizar otras investigaciones en las que nunca les faltará oportunidad para ejercitarse.

Considérense las líneas AB , AD , AF y semejantes, que supongo han sido descritas con la ayuda del instrumento XYZ , compuesto de varias reglas. Estas están unidas de tal forma que cuando la conocida como YZ está sobre la línea AN , puede abrirse y cerrarse el ángulo

A-T, VI, 391



XYZ ; cuando está totalmente cerrada, los puntos B , C , D , F , G , H , se encuentran todos en A ; pero a medida que se abre, la regla BC , unida a XY de modo que forma ángulos rectos en el punto B , empuja hacia Z la regla CD ; CD resbala sobre YZ formando siempre ángulos rectos con ella y empuja a DE , que se desliza igualmente sobre YX , permaneciendo paralela a BC . DE empuja a EF ; EF a FG y FG a GH ; asimismo, podemos concebir una infinidad de otras, que se impulsan consecutivamente de igual modo: unas forman los mismos ángulos con YX , y los otros con YZ . Así cuando se abre el ángulo XYZ , el punto B describe la línea AB , que es un círculo; los otros puntos, D , F y H , en donde se encuentran las intersecciones de las otras reglas, describen otras curvas, como AD , AF y AH , siendo cada una de ellas progresivamente más compleja que el círculo⁴³. Pero no veo qué puede impedir que se

A-T, VI, 392

conciba tan clara y distintamente la descripción de la primera como la del círculo o, al menos, como la de las secciones cónicas; nada veo que nos impida concebir la segunda, la tercera y cuantas se puedan describir, tan adecuadamente como la primera. En consecuencia, no veo por qué todas ellas no son igualmente aceptadas con el fin de contribuir a las especulaciones de la Geometría⁴⁴.

Sobre la clasificación de todas las curvas en géneros y sobre la relación de sus puntos con los de las rectas

Podría exponer en este lugar otros medios para trazar y concebir líneas curvas que fuesen cada vez más complejas hasta el infinito. Pero, para comprender a la vez todas aquellas que se dan en la naturaleza y para clasificarlas por orden según ciertos tipos, no conozco nada más apropiado que afirmar que todos los puntos de las que pueden llamarse geométricas, es decir, de aquellas que caen bajo alguna medida precisa y exacta, tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de una línea recta y esta relación puede ser expresada por alguna ecuación válida para todos los puntos⁴⁵. Así mismo la línea curva será del primero y más simple tipo, en el que no están comprendidas sino el círculo, la parábola, la hipérbola y la elipse, cuando esta ecuación no alcanza sino al rectángulo⁴⁶ de dos cantidades indeterminadas o bien al cuadrado de una misma cantidad. Pero la curva pertenece al segundo tipo cuando una o ambas cantidades desconocidas de la ecuación (deben ser dos para explicar la relación entre dos puntos), alcanza el tercer o cuarto grado⁴⁷; cuando la ecuación alcanza el quinto o sexto grado⁴⁸, la curva es del tercer tipo y así para otras hasta el infinito.

Así, supongamos que desco saber a qué clase pertenece la línea *EC*, que imagino descrita por la intersección de la regla *GL* y del plano rectilíneo *CNKL* cuyo lado *KN* es prolongado indefinidamente hacia *C*, y que moviéndose sobre el plano en línea recta (de tal forma que su diámetro *KL* se encuentre siempre aplicado sobre algún lugar de la línea *BA*, prolongada por ambos extremos) da lugar al movimiento circular de esta regla *GL*, alrededor del punto *G*, puesto que tal regla está unida de tal modo a *CNKL* que pasa siempre por el punto *L*. En tal caso, escojo una línea recta como *AB* para relacionar con tales puntos

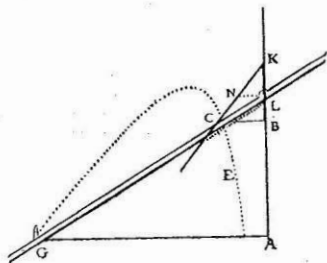
car la primera por la última. Por tanto, la ecuación buscada es:

$$y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac.$$

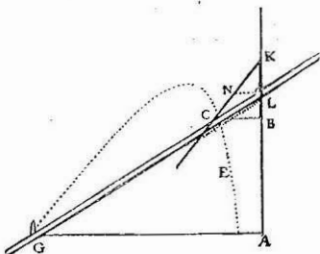
En virtud de la misma conocemos que la línea EC es de las del primer tipo; en efecto, no es sino una hipérbola.

Si en el instrumento utilizado para describir la curva sustituimos la línea recta CNK , de modo que limitemos el plano $CNKL$ mediante la hipérbola o cualquier otra línea curva de la primera clase, entonces la intersección de este línea y de la regla GL en vez de describir la hipérbola EC , describirá otra línea curva que pertenecerá al segundo tipo. Así, si CNK es un círculo, siendo L su centro, se describirá la primera conoide de los antiguos; pero si es una parábola, siendo su diámetro —eje— KB , entonces se describirá la línea curva que, como ya he dicho, era la primera y más simple de las curvas buscadas para el problema de Pappus, cuando

A-T, VI, 395



no son sino cinco las líneas rectas dadas en posición. Pero si en lugar de una de estas líneas curvas del primer género, es una de las del segundo género la que delimita el plano $CNKL$, entonces se describirá una del tercer tipo; mientras que si utilizamos una del tercer tipo, entonces se describirá una del cuarto tipo y así hasta el infinito. Estas afirmaciones es fácil probarlas mediante el cálculo. Y de cualquier otra forma que se imagine la descripción de una curva, siendo del número de las que son llamadas geométricas, siempre se podrá hallar una



todos los de la línea curva EC ; asimismo, en esta línea, AB , tomo un punto tal como A para iniciar por él el cálculo. Digo que escojo tanto uno como la otra, porque pueden tomarse los que se deseen ya que aunque existan muchas alternativas que abrevien y simplifiquen la ecuación, sin embargo, de cualquier modo que se seleccionen, la curva pertenecerá siempre a la misma clase tal como es fácilmente demostrable. Después de esto, tomando un punto a discreción en la curva tal como C , sobre el que supongo que aplico el instrumento que sirve para describirla, trazo desde el punto C la línea CB paralela a GA ; puesto que CB y BA son dos cantidades indeterminadas y desconocidas, las denomino y e x , respectivamente. Pero con el fin de encontrar la relación de una con la otra^{48bis}, considero también las cantidades conocidas que determinan la descripción o trazado de esta curva: así GA (llamada a), KL (llamada b) y NL , paralela a GA (llamada c). Seguidamente afirmo: que como NL es a LK (o bien c es a b), así CB o y es a BK que es, por tanto, igual a $\frac{b}{c}y$. Por tanto, BL

A-T, VI, 394

es igual a $\frac{b}{c}y - b$, y AL es igual a $x + \frac{b}{c}y - b$. Además, como CB es a LB , así GA es a LA , o bien como y es a $\frac{b}{c}y - b$, así a es a $x + \frac{b}{c}y - b$. Multiplicando la segunda por la tercera tenemos $\frac{-ab}{c}y - ab$, que es igual a $xy + \frac{b}{c}y^2 - by$, que es el resultado obtenido al multipli-

ecuación para determinar de este modo todos sus puntos.

Así mismo, considero las líneas curvas, cuya ecuación alcanza el cuarto grado, en el mismo género que aquellas que solamente alcanzan el tercer grado; aquellas cuyas ecuaciones alcanzan hasta el cuadrado del cubo las considero en el mismo que aquellas que no alcanzan sino al supersólido; de modo semejante para otras. La razón para establecer tal clasificación se fundamenta en que existe una regla general para reducir al cubo cuantas dificultades aparezcan en el cuadrado del cuadrado y para reducir al supersólido cualquiera del cuadrado del cubo, de modo tal que en cualquier caso la última no es necesario que deba ser considerada más compleja que la precedente⁴⁹.

A-T, VI, 396

Pero es preciso señalar que entre las líneas de cada uno de estos géneros, aunque la mayor parte de ellas tengan la misma complejidad, de modo tal que puedan servir para determinar los mismos puntos y construir los mismos problemas, sin embargo, hay siempre algunas más simples, cuya utilidad es más limitada. Así entre las del primer tipo, además de la Elipse, la Hipérbola, y la Parábola, cuya complejidad es la misma, también está incluido el círculo que obviamente es una curva más simple. Entre las de la segunda clase se encuentra la Concoide vulgar que toma su origen del círculo y algunas otras que, aunque no tengan una utilidad tan amplia como la mayor parte de las de su clase, sin embargo, no pueden ser consideradas como pertenecientes al primer tipo^{49 bis}.

Prosigue la explicación del problema de Pappus expuesta en el libro anterior

Ahora, después de haber clasificado todas las líneas curvas según ciertos tipos o clases, me es fácil continuar con la demostración de la respuesta que anteriormente he facilitado en relación con el problema de Pappus. En primer lugar, he mostrado que cuando no hay sino tres o cuatro líneas rectas dadas, la ecuación que permite determinar los puntos buscados es de segundo grado⁵⁰. Se infiere de ello que la curva en que tales puntos se encuentran necesariamente ha de ser alguna de las del primer tipo, puesto que esta misma ecuación expresa la relación existente entre todos los puntos de las líneas

A-T. VI, 397

del primer género con los de una línea recta. Cuando no han sido dadas más de ocho líneas rectas, esta ecuación será, a lo sumo, una bicuadrática y, en consecuencia, la curva resultante pertenecerá a la segunda clase o a la primera. Cuando no hay más de doce líneas dadas, la ecuación no excede del cuadrado del cubo y, en consecuencia, la curva buscada no pertenecerá sino a la tercera clase o a una inferior, y así sucesivamente para otros casos. Pero, puesto que la posición de las líneas dadas puede variar de todas las formas imaginables y, en consecuencia, se introducen modificaciones en los valores de las cantidades conocidas así como en los signos «+» y «-» de la ecuación, de todas las formas imaginables, es evidente que no hay alguna línea curva del primer tipo o clase que no sea útil para este problema cuando se plantea respecto de cuatro líneas rectas; ni alguna del segundo tipo que no ofrezca solución cuando el problema ha sido planteado para ocho líneas; ni una de la tercera clase, cuando se ha propuesto para doce, y así para otros casos. De modo que no hay una línea curva, cuya ecuación pueda ser obtenida y que pueda ser aceptada en Geometría, que no sea útil para algún número de líneas.

Solución de esta cuestión cuando se propone para tres o cuatro líneas

Es necesario proceder a indicar con mayor precisión el método para descubrir la línea curva buscada en cada caso, cuando no son dadas sino tres o cuatro líneas rectas; tal análisis mostrará que la clase primera no contiene otras líneas que las tres secciones cónicas y el círculo.

A-T. VI, 398

Considérense nuevamente las cuatro líneas AB , AD , EF y GH , anteriormente mencionadas, y que sea preciso hallar otra línea en la que se encuentren una infinidad de puntos tales como C , de tal manera que, trazando desde él mismo las cuatro líneas CB , CD , CF , CH , con ángulos dados sobre las líneas dadas, CB multiplicada por CF sea igual a CD multiplicada por CH . Esto sería equivalente a afirmar que si

$$CB = y,$$

$$CD = \frac{czy + bcx}{z^2},$$

De este modo tenemos:

$$y^2 = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2},$$

cuya raíz es:

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - \frac{2mnx}{z} + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}}$$

De nuevo, por razones de brevedad, en lugar de

$$-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgz^2},$$

anotaremos o ; y en lugar de

$$\frac{n^2}{z^2} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgz^2},$$

escribiremos $-\frac{p}{m}$. Hacemos esto, pues podemos designarlas como nos plazca, considerando que todas son cantidades dadas. Tendremos entonces que:

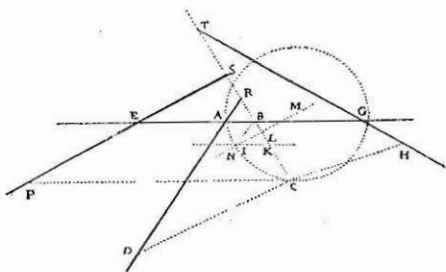
$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}.$$

Tal debe ser la longitud de la línea BC , quedando AB , esto es x indeterminada⁵¹. También es evidente que, no siendo propuesto el problema sino para tres o cuatro líneas, es obvio que siempre tendremos tales términos, aunque alguno de ellos puedan ser nulos y los signos $+$ y $-$ puedan variar.

A-T. VI. 400

Después de esto, trazo KI igual y paralela a BA , de modo que de BC obtengamos el segmento BK igual a m (puesto que la expresión para BC es $+m$; si hubiese sido $-m$, esta línea IK debería haberla trazado del otro lado de AB y, finalmente, no la hubiera trazado si el valor de m hubiera sido *cero*). Seguidamente trazo IL de modo que $IK:KL = z:n$; esto es, de modo que si IK es igual a x , KL es igual a $\frac{n}{z}x$. De esta misma forma conozco la proporción existente entre KL e IL que puedo establecer como $n:a$, de modo que si KL es igual a $\frac{n}{z}x$, entonces IL es igual a $\frac{a}{z}x$. De este modo establezco el punto K entre L y C , pues la ecuación

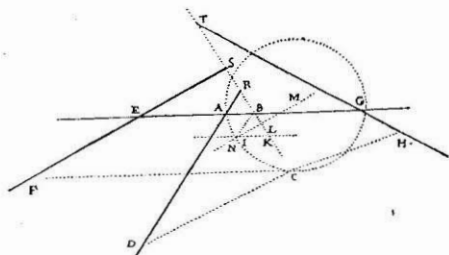
indica $-\frac{n}{z}x$; hubiera establecido L entre K y C , en el caso de que $+\frac{n}{z}x$; en el caso de que $\frac{n}{z}x$ fuera igual a *cero*, no hubiera sido trazada esta línea, IL .



Hecho esto, obtenemos la expresión:

$$LC = \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}.$$

Si el valor de estos términos fuese *cero*, el punto C debería localizarse en la línea recta IL ; si fuesen sus valores tales que fuese posible extraer su raíz, esto es, si m^2 y $\frac{p}{m}x^2$ tuviesen el mismo signo, bien positivo o bien negativo, y ox^2 fuese igual a $4pm$, o también si m^2 y ox , o bien ox y $\frac{p}{m}x^2$ tuviesen como valor *cero*, este punto C debería localizarse en otra línea recta cuya posición podría ser tan fácilmente calculable como la de IL . Pero cuando no se da ninguna de estas posibilidades, el punto C se encuentra siempre en una de las tres secciones cónicas o en un círculo, uno de cuyos diámetros se encuentra en la línea IL , y la línea LC es una de las que se aplican por orden a este diámetro; también, por el contrario, puede ser LC paralela al diámetro al que aquélla, que está en la línea IL , se aplica por orden. A saber si el término $\frac{p}{m}x^2$ tiene valor *cero*, entonces tal sección cónica será una parábola; si tiene



LM , así como tomar MO igual a $\sqrt{m^2 - \frac{o^2 m}{4p}}$; pero si ox es igual a *cero*, MO debe ser tomada igual a m . Seguidamente considerando O como el vértex de esta hipérbola, siendo OP el diámetro y CP la línea aplicada; en tal caso, el lado recto es:

A-T, VI, 404

$$\sqrt{\frac{4a^4 m^4}{p^2 z^4} - \frac{a^4 o^2 m^3}{p^3 z^4}}$$

y su diámetro será:

$$\sqrt{4m^2 - \frac{o^2 m}{p}}$$

No obstante, debemos considerar una excepción: cuando ox es igual a *cero*; en tal caso el lado recto es $\frac{2a^2 m^2}{pz^2}$ y el valor del diámetro $2m$. A partir de estos datos la curva puede ser determinada de acuerdo con el problema tercero del primer libro de Apolonio.

Demostración de lo que ha sido explicado

Las demostraciones de las afirmaciones anteriores son evidentes, pues componiendo un espacio con las cantidades que he asignado para el lado recto, el transverso y para el segmento del diámetro, NL u- OP , siguiendo los teoremas 11, 12 y 13 del primer libro de Apolonio, podremos hallar los mismos términos que componen el cuadrado de la línea CP o CL , aplicada

contrario, en el caso de una hipérbola, si se tuviese $-ox$, el centro M debería estar hacia L ; si tuviésemos $+ox$, debería ser tomado hacia la otra parte. Según todo esto, tenemos que el lado recto de la figura debe ser

$$\sqrt{\frac{o^2 z^2}{a^2} + \frac{4mpz^2}{a^2}},$$

A-T, VI, 403

si m^2 es positivo y la línea es un círculo o una elipse; o si m^2 es negativo y el lugar es una hipérbola. Deberá ser:

$$\sqrt{\frac{o^2 z^2}{a^2} - \frac{4mpz^2}{a^2}};$$

si la línea buscada es un círculo o una elipse y m^2 es negativo, o si es una hipérbola y o^2 es mayor que $4mp$, siendo positivo el valor de m^2 . Pero si el valor de m^2 es

cero, entonces el lado recto es $\frac{oz}{a}$; y si oz es igual a *cero*, entonces será:

$$\sqrt{\frac{4mpz^2}{a^2}}.$$

Así mismo, en relación con el correspondiente diámetro debe ser hallada una línea que sea al lado recto como a^2m es a pz^2 ; esto es, si el lado recto es

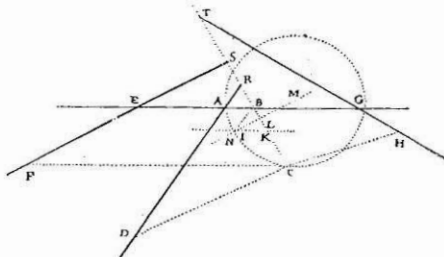
$$\sqrt{\frac{o^2 z^2}{a^2} + \frac{4mpz^2}{a^2}},$$

entonces el diámetro será:

$$\sqrt{\frac{a^2 o^2 m^2}{p^2 z^2} + \frac{4a^2 m^3}{p z^2}}.$$

En cada uno de estos casos el diámetro de la sección se encuentra en la línea IM , siendo LC de las aplicadas por orden. De tal modo esto es evidente que siendo MN igual a la mitad del diámetro y tomando N y L en el mismo lado de M , el punto N será el vertex de este diámetro. Siguiendo lo expuesto es fácil hallar la sección (determinar la curva) de acuerdo con los problemas segundo y tercero del primer libro de Apolonio.

Pero, cuando esta sección es una hipérbola y tenemos que m^2 es positivo y que o^2 es igual a *cero* o menor que $4pm$, entonces debemos trazar la línea MOP por M de modo que sea paralela a LC y de modo que CP lo sea a



por orden a este diámetro. Así, en este ejemplo, tomando IM , que es $\frac{aom}{2pz}$, de NM cuyo valor es:

$$\frac{a}{2pz} \sqrt{o^2 + 4mp},$$

se obtiene IN ; sumando a ésta IL , que es $\frac{a}{z}x$, tenemos NL que es igual a:

$$\frac{a}{z}x - \frac{aom}{2pz} + \frac{am}{2pz} \sqrt{o^2 + 4mp}.$$

Y siendo esto multiplicado por

$$\frac{z}{a} \sqrt{o^2 + 4mp},$$

que es el lado recto de la figura, obtenemos:

$$x \sqrt{o^2 + 4mp} - \frac{om}{2p} \sqrt{o^2 + 4mp} + \frac{mo^2}{2p} + 2m^2$$

para el rectángulo, del cual debemos restar un espacio A-T. VI, 405
que debe ser al cuadrado de NL como el lado recto es al diámetro. Este cuadrado de NL es:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{z^2} x^2 - \frac{a^2 om}{pz^2} x + \frac{a^2 m}{pz^2} x \sqrt{o^2 + 4mp} + \\ & + \frac{a^2 o^2 m^2}{2p^2 z^2} + \frac{a^2 m^3}{pz^2} - \frac{a^2 om^2}{2p^2 z^2} \sqrt{o^2 + 4mp}. \end{aligned}$$

A su vez, debe ser dividido por $a^2 m$ y debe ser multiplicado el cociente por pz^2 , puesto que éstos

deseo de solventar los problemas relacionados con la composición de tales lugares.

Así mismo, se ve que lo que he considerado como el primer género de líneas curvas no puede incluir otras que el círculo, la parábola, la hipérbola y la elipse, que es cuanto había intentado probar.

Sobre la primera y más simple de todas las líneas curvas utilizable en el problema de los antiguos cuando está propuesto para cinco líneas

A-T, VI, 408

Si el problema de los antiguos fuese propuesto para cinco líneas, siendo todas paralelas, es evidente que el punto buscado se encontrará siempre en una línea recta. Pero si es propuesto para cinco líneas de modo que cuatro de ellas sean paralelas y la quinta sea perpendicular a las otras cuatro; y si todas las líneas trazadas desde el punto buscado deben alcanzar las mencionadas líneas paralelas de modo que formen ángulos rectos; y si, finalmente, sucede que el paralelepípedo formado por tres líneas así trazadas sobre tres paralelas, debe ser igual al paralelepípedo formado por dos líneas que son trazadas, una sobre la cuarta de las que son paralelas y la otra sobre la que las corta formando ángulo recto, y por una tercera línea dada (siendo éste el caso más simple que podemos imaginar después de el precedente), entonces el punto que buscamos debe encontrarse en una línea curva descrita por el movimiento de una parábola del modo explicado anteriormente.

A-T, VI, 409

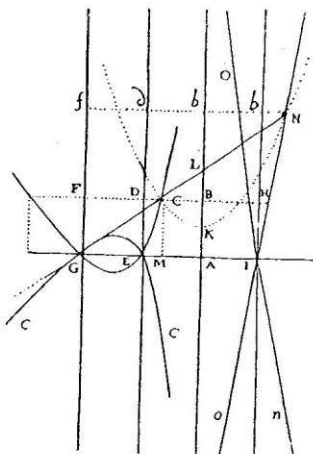
Sean, por ejemplo, las líneas AB , IH , ED , GF y GA , y que sea preciso hallar el punto C de modo que si CB , CF , CD , CH y CM son perpendicularmente trazadas sobre cada una de las líneas dadas, el paralelepípedo formado por las tres líneas CF , CD y CH sea igual al formado por CB , y CM y por una tercera línea, AI . Establezco que $CB = y$, $CM = x$, AI o AE o $GE = a$; por consiguiente, si C se encuentra entre AB y DE , tenemos que $CF = 2a - y$, $CD = a - y$, $CH = y + a$. Multiplicando estas tres, una por otra, se obtiene $y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3$ igual al producto de las otras tres, esto es axy . Seguidamente considero la curva CEG , que imagino descrita por la intersección de la parábola CKN (moviéndose de modo tal que su eje KL se encuentra sobre la línea recta AB) y de la regla GL (que gira sobre el punto G de modo que siempre pasa por el punto L). Tomamos $KL = a$, y el lado principal, es decir, aquel que corres-

la mitad del ángulo KIB o del IKL , es de 30° , el ángulo ILK es un ángulo recto. Así mismo, puesto que IK o $AB = x$, KL es un $\frac{1}{2}x$; IL es igual a $x\sqrt{\frac{3}{4}}$, y la cantidad representada por z es igual a 1, tenemos que $a = \sqrt{\frac{3}{4}}$, $m = 1$, $o = 4$, $p = \frac{3}{4}$; por consiguiente, $IM = \sqrt{\frac{16}{3}}$, $NM = \sqrt{\frac{19}{3}}$; en consecuencia puesto que a^2m (que es $\frac{3}{4}$) es igual a pz^2 , y el ángulo ILC es un ángulo recto, se sigue de todo ello que la curva NC es un círculo. Un tratamiento similar de los otros casos puede realizarse con facilidad.

Cuáles son los lugares planos, sólidos y sobre el modo de hallarlos

Puesto que todas las ecuaciones que no son superiores a las de segundo grado caen bajo las explicaciones dadas, no solamente hemos solventado de modo definitivo el problema que los antiguos plantearon para tres y cuatro líneas, sino también cuanto se relaciona con lo que ha sido llamado composición de los lugares sólidos y, en consecuencia, con la de los lugares planos puesto que éstos están comprendidos en los sólidos; digo tal, pues estos lugares no son otra cosa que esto: la solución de uno de estos problemas no consiste más que en hallar algún punto para cuya completa determinación es necesaria una condición, siendo tales todas las otras condiciones (como en este ejemplo) que cualquier punto de una línea recta puede ser tomado por el que es pedido. Si esta línea es recta o circular decimos que se trata de un lugar plano; pero si es una parábola, una hipérbola o una elipse, entonces se dice que se trata de un lugar sólido. En cualquiera de los casos puede llegarse a una ecuación con dos cantidades desconocidas, que es semejante a alguna de las que acabo de resolver. Si la curva en la que se encuentra el punto buscado es de un grado superior al de las secciones cónicas, puede ser llamada, siguiendo el mismo procedimiento, un lugar supersólido, y así sucesivamente para otros casos. Si para la determinación del punto son necesarias dos condiciones, el lugar sobre el que se encuentra es una superficie que puede ser completamente plana, esférica o más compleja. Los antiguos llegaron a alcanzar como nivel superior de análisis la composición de los lugares sólidos y cuanto Apolonio expuso acerca de las secciones cónicas podría responder al

A-T, VI, 407



ponde al eje de esta parábola, igual a a ; asimismo, $GA=2a$, CB o $MA=y$, CM o $AB=x$. Puesto que los triángulos GMC y CBL son semejantes, tenemos que $GM(2a-y)$ es a $MC(x)$ como $CB(y)$ es a BL , que es igual a

$$\frac{xy}{2a-y}.$$

Y puesto que LK es a , BK es

$$a - \frac{xy}{2a-y},$$

o también

$$\frac{2a^2 - ay - xy}{2a-y}.$$

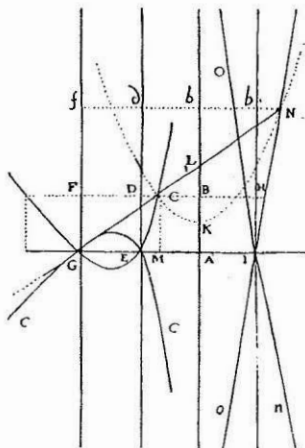
Finalmente, puesto que BK es un segmento del eje de la parábola, BK es a BC (su ordenada) como BC es a a (lado recto) y, en consecuencia, en virtud del cálculo ya podemos establecer que:

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy,$$

A-T. VI, 410

y, por tanto, que el punto C es el que era exigido. Puede ser tomado en cualquier lugar de la línea CEG o también en $cEGc$ que es descrita del mismo modo con excepción de que su vértex se encuentra en dirección opuesta; finalmente, C puede hallarse en NIo , nIO , descritas por la intersección que la línea GL produce en el otro lado de la parábola KN .

Aunque las líneas paralelas AB , IH , ED y GF no fuesen equidistantes y ni GA ni las líneas trazadas sobre ellas desde el punto C las cortasen formando ángulos



rectos, este punto C no dejaría de encontrarse en una línea curva que fuese de la misma naturaleza; es más, podría encontrarse aunque ninguna de las líneas dadas fuese paralela. Pero, supóngase que tenemos cuatro líneas paralelas y una quinta que las corta, y que el paralelepípedo formado por tres líneas trazadas por el punto buscado (una de ellas sobre la quinta línea y

Sobre las que pueden trazarse utilizando una cuerda y que son admisibles

De igual modo, no debe rechazarse el procedimiento o forma según la cual nos servimos de un hilo para determinar la igualdad o diferencia existente entre dos o más líneas rectas que pueden trazarse desde cada uno de los puntos de la curva buscada a otros, o bien sobre ciertas líneas con ciertos ángulos. Yo mismo he utilizado este procedimiento en *La Dióptrica* cuando explicaba la elipse o la hipérbola. Pues aunque no podamos aceptar en Geometría líneas que sean como cuerdas, es decir, que tanto puedan ser rectas como curvas, ya que las proporciones existentes entre las líneas rectas y curvas no son conocidas y no creo que puedan llegar a serlo y, en consecuencia, nada exacto y seguro podría concluirse; sin embargo, puesto que en tales construcciones nos servimos de cuerdas solamente para determinar las líneas rectas, cuya longitud nos es perfectamente conocida, no estimo que deba ser éste un motivo para rechazarlas⁵⁵.

Que para hallar las propiedades de las líneas curvas, basta con conocer la relación que guardan sus puntos con los de las rectas, y la forma de trazar otras líneas formando ángulos rectos

A-T. VI. 413 Cuando conocemos la relación que guardan todos los puntos de una línea curva con todos los de una recta, según el modo que he explicado, también es fácil conocer la relación que guardan con todos los otros puntos y líneas dadas; en consecuencia, será fácil conocer los diámetros, ejes, centros y otras líneas o puntos con los que pueda tener cada línea curva alguna relación más específica o más simple; de esta forma, podremos imaginar diversos modos para describirlas y hacer una selección. Así mismo podremos hallar cuanto se encuentre relacionado con la magnitud de sus áreas, no siendo necesario pasar a ofrecer una explicación más detallada. Finalmente, y en relación con todas las otras propiedades atribuibles a las líneas curvas, no dependen sino de los ángulos que estas curvas formen con otras líneas. Pero, cuando puedan trazarse líneas rectas que las corten formando ángulos rectos, en los puntos en que háy intersección formada por aquéllas

otras dos sobre dos de las líneas paralelas) fuese igual al paralelepípedo formado por dos líneas trazadas sobre las otras dos paralelas y una tercera línea dada; el punto buscado se encuentra en tal caso en una curva de otra naturaleza, es decir, en una curva tal que todas las líneas rectas aplicadas por orden a su diámetro siendo iguales a las de una sección cónica, los segmentos de este diámetro que se encuentren entre el vertex y estas líneas guardan la misma proporción con una línea dada que la que ésta guarda con los segmentos del diámetro de la sección cónica a los cuales tales líneas están aplicadas por orden. No afirmo que esta línea sea menos simple que la precedente, la cual he pensado que debía considerarla en primer lugar puesto que tanto su descripción como su cálculo son en cierto modo más fáciles.

A-T, VI, 411

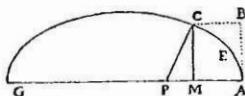
No me detendré realizando un análisis y distinción por especies de las líneas relacionadas con otros casos, pues no he deseado acometer una exposición completa y, habiendo explicado el procedimiento para hallar una infinidad de puntos por donde pasan, estimo haber facilitado el medio que nos permitirá describirlas.

Sobre las líneas que se trazan hallando varios de sus puntos y que pueden ser admitidas en Geometría

De igual modo estimo oportuno señalar que existe una gran diferencia entre la forma expuesta para llegar a conocer varios puntos que permitan trazar una curva y la que se utiliza para trazar la espiral y sus semejantes. En este último caso no se calculan indiferentemente todos los puntos de la línea buscada, sino sólo aquellos que pueden ser determinados por algún procedimiento más simple que aquel que es requerido para formarla; propiamente hablando, no hallamos uno de sus puntos, esto es, alguno de aquellos que son puntos propios de esta línea de modo tal que no pudiesen ser hallados sino por su mediación. Por el contrario, no hay un punto en estas líneas que sirven para el problema propuesto, que no pueda ser determinado mediante el procedimiento indicado. Debe considerarse que si bien tal forma de determinar una línea curva, hallando indiferentemente diversos puntos de la misma, no es aplicable sino a las que puedan ser también descritas por un movimiento regular y continuo, no por ello se la debe excluir de la Geometría.

A-T, VI, 412

Mediante esta ecuación puedo eliminar una de las dos cantidades indeterminadas, x o y , de la otra ecuación, de aquella que expresa la relación de los puntos de la línea curva CE con los de la recta GA . Si x debe ser eliminada puede realizarse fácilmente con sólo sustituir x por $\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$, y x^2 por el cuadrado de esta misma expresión, x^3 por el cubo de la misma expresión, etc...; pero si deseásemos eliminar y , entonces y debería sustituirse por $v + \sqrt{s^2 - x^2}$, así como y^2 , y^3 por el cuadrado o cubo de esta misma expresión, y así sucesivamente. El resultado que llegaremos a obtener sería el de una ecuación con una sola cantidad desconocida, bien x o bien y .



Por ejemplo, si CE es una elipse, MA el segmento de su eje, correspondiéndole CM , r su lado recto y q su eje transversal, entonces mediante el teorema 13 del libro I de Apolonio tenemos que:

A-T, VI, 415

$$x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2.$$

Eliminando x^2 obtendríamos que:

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2,$$

o bien que:

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r} = 0,$$

Pues en este caso es preferible considerar conjuntamente la expresión que establecer una igualdad entre sus partes.

De igual modo, si CE es una curva generada por el movimiento de una parábola, tal como anteriormente expuse⁶⁰, y si a GA la llamamos b , a KL c , y el lado recto del eje KL de la parábola le llamamos d , entonces la ecuación que expresaría la relación entre x e y sería:

$$y^3 - by^2 - cdy + bcd + dxy = 0.$$

CF sobrepasa a FA sea a la que GA sobrepasa a GC como d es a e ; de modo que si la cantidad indeterminada la llamamos z , entonces tendremos que FC es igual a $c+z$, y GC lo será a $b - \frac{e}{d}z$. Seguidamente estableciendo

$MA=y$, $GM=b-y$, $FM=c+y$; puesto que CMG es un triángulo rectángulo, restando el cuadrado de GM del cuadrado de GC , obtenemos el cuadrado de CM que es:

$$\frac{e^2}{d^2} z^2 - \frac{2be}{d} z + 2by - y^2.$$

Seguidamente, restando el cuadrado de FM del cuadrado de FC , obtenemos de nuevo el cuadrado de CM , pero expresado de modo distinto, es decir:

$$z^2 + 2cz - 2cy - y^2.$$

Siendo iguales estas dos expresiones, nos permitirán conocer el valor de y o MA , que es

$$\frac{d^2 z^2 + 2cd^2 z - e^2 z^2 + 2bdez}{2bd^2 + 2cd^2};$$

sustituyendo este valor por y en la expresión equivalente al cuadrado de CM , tenemos que:

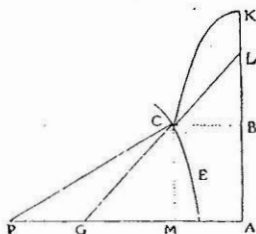
A-Y, VI, 417

$$CM^2 = \frac{bd^2 z^2 + ce^2 z^2 + 2bcd^2 z - 2bcdez}{bd^2 + cd^2} - y^2.$$

A continuación, si suponemos que la línea PC alcanza la curva formando ángulos rectos en C , y estableciendo $PC=s$ y $PA=v$ como anteriormente, entonces $PM=v-y$; puesto que PCM es un triángulo rectángulo, tenemos $s^2 - v^2 + 2vy - y^2$ para el cuadrado de CM . Sustituyendo y por su valor, tenemos la ecuación buscada:

$$z^2 + \frac{2bcd^2 z - 2bcdez - 2cd^2 vz - 2bdevz - bd^2 s^2 + bd^2 v^2 - cd^2 s^2 + cd^2 v^2}{bd^2 + ce^2 + e^2 v - d^2 v} = 0$$

Hallada tal ecuación no debe utilizarse para determinar x , y o z , que son dadas, puesto que el punto C ha sido dado, sino que debe utilizarse para hallar v o s , que determinan el punto exigido, P . A tal efecto, es preciso considerar que si este punto P cumple las condiciones exigidas, el círculo con centro en P y que pasa por C , tocará pero no cortará la curva CE ; pero si el punto P se encuentra a mayor o menor distancia de A de lo que



Si eliminamos x , tenemos:

$$y^3 - by^2 - cdy + bcd + dy\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}.$$

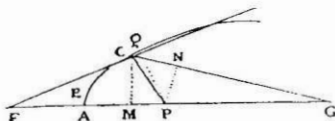
Ordenando tales términos, tenemos:

$$\begin{aligned} y^6 - 2by^5 + (b^2 - 2cd + d^2)y^4 + (4bcd - 2d^2v)y^3 + \\ + (c^2d^2 - d^2s^2 + d^2v^2 - 2b^2cd)y^2 - 2bc^2d^2y + \\ + b^2c^2d^2 = 0. \end{aligned}$$

Tal procedimiento es válido para otros casos.

Pero aún cuando los puntos de la línea curva no se relacionen en la forma indicada con los de una recta, sino con cualquiera otra imaginable, podríamos establecer una ecuación similar. Así, si CE es una línea relacionada con los puntos F , G y A de modo tal que las

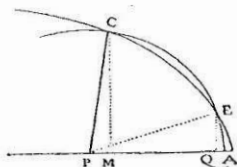
A-T, VI, 416



líneas rectas trazadas desde cada uno de sus puntos, tal como C , hasta el punto F , excedan el segmento FA por una cantidad que guarda una cierta proporción dada con otra cantidad por la que GA sobrepasa a las líneas trazadas desde los mismos puntos a G . En tal caso, estableciendo $GA = b$, $AF = c$ y, tomando a discreción el punto C en la curva, supongo que la cantidad en que

debe estar, este círculo cortará la curva no sólo en C , sino también y necesariamente en algún otro punto⁶¹. Asimismo, es preciso considerar que si este círculo corta la línea curva CE , la ecuación por la que se halla el valor de x e y o cualquiera otra, suponiendo que conozcamos PA y PC , debe tener necesariamente dos raíces diferentes. Supóngase, por ejemplo, que el círculo

A-T, VI, 418



corta la curva en los puntos C y E ; trácese EQ paralela a CM ; por otra parte vemos que x e y convienen por igual a EQ y a QA del mismo modo que a CM y MA , ya que PE es igual a PC , pues son dos radios. Si buscamos EQ y QA , suponiendo dadas PE y PA , tendremos la misma ecuación que si hubiésemos buscado CM y MA , suponiendo que PC y PA sean dados. Se deduce de ello que el valor de x , de y o de cualquier otra cantidad supuesta debe ser doble, es decir, la ecuación tendrá dos raíces distintas entre sí; si deseamos conocer el valor de x , una de estas raíces será CM y la otra EQ ; si se desea conocer y , una raíz será MA y la otra QA . Es verdad que si E no se encuentra en el mismo lado de la curva que C , entonces solamente una de ellas será la raíz verdadera y la otra deberá ser opuesta o menor que cero; asimismo, cuanto más próximos se encuentren estos dos puntos, C y E , menor será la diferencia entre estas dos raíces; cuando ambos puntos coincidan serán iguales. Este sería el caso en que el círculo trazado por C toca la curva CE sin llegar a cortarla⁶².

Además debe considerarse que cuando una ecuación tiene dos raíces iguales, necesariamente tiene la misma forma que si se multiplica, por sí misma, la cantidad que se supone desconocida menos la cantidad conocida igual a ella; si la expresión o suma resultante no es de grado semejante a la ecuación original, multiplicando ésta por otra expresión con tantas dimensiones como las que le faltan, se logrará que sea del mismo grado. De

A-T, VI, 419

este modo cada uno de los términos de las dos expresiones se corresponderán término a término.

Así, por ejemplo, establezco que la primera ecuación hallada en este análisis, a saber:

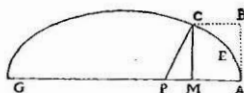
$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r},$$

debe tener la misma forma que la expresión obtenida estableciendo $e = y$, y multiplicando $y - e$ por sí misma. De este modo obtenemos $y^2 - 2ey + e^2$. Podemos comparar las dos expresiones término a término y afirmar que el primer término, y^2 , es el mismo en cada una; el segundo término de la primera

$$\frac{qry - 2qvy}{q - r},$$

es igual a $-2ey$, el segundo de la otra; a partir de esto, buscando la cantidad v , que es PA , tenemos:

$$v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r;$$



o bien, puesto que hemos supuesto que $e = y$, tenemos:

$$v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r.$$

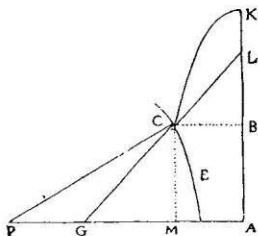
Del mismo modo, podemos hallar s a partir del tercer término,

$$e^2 = \frac{qv^2 - qs^2}{q - r};$$

pero puesto que v determina completamente P , el único punto que tratamos de hallar, no es necesario proseguir.

A.T., VI, 420 Del mismo modo, la segunda ecuación hallada, a saber,

$$y^6 - 2by^5 + (b^2 - 2cd + d^2)y^4 + (4bcd - 2d^2v)y^3 + (c^2d^2 - 2b^2cd + d^2v^2 - d^2s^2)y^2 - 2bc^2d^2y + b^2c^2d^2,$$



Así mismo, la tercera ecuación, es decir,

$$z^2 + \frac{2bcd^2z - 2bcdez - 2cd^2vz - 2bdevz - bd^2s^2 + bd^2v^2 - cd^2s^2 + cd^2v^2}{bd^2 + ce^2 + e^2v - d^2v}$$

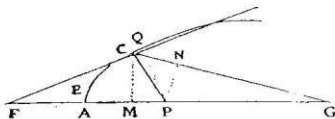
A-T, VI, 422 es de la misma forma que $z^2 + 2fz + f^2$, suponiendo que $f = z$, de modo que $-2f$ o $-2z$ deba ser igual a

$$\frac{2bcd^2 - 2bcde - 2cd^2v - 2bdev}{bd^2 + ce^2 + e^2v - d^2v};$$

a partir de esto podemos conocer que:

$$v = \frac{bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z}.$$

Si establecemos la línea AP igual a v , cuyas cantidades son todas conocidas, y unimos el punto P con el punto C , esta línea cortará a la curva CE formando



ángulos rectos, siendo esto lo que era preciso. No veo que exista razón alguna para que esta solución no sea aplicada a cualquier curva a la que sea aplicable algún cálculo geométrico.

debe tener la misma forma que la expresión obtenida cuando se multiplica $y^2 - 2ey + e^2$ por $y^4 + fy^3 + g^2y^2 + h^3y + k^4$, que es:

$$y^6 + (f - 2e)y^5 + (g^2 - 2ef + e^2)y^4 + (h^3 - 2eg^2 + e^2f)y^3 + (k^4 - 2eh^3 + e^2g^2)y^2 + (e^2h^3 - 2ek^4)y + e^2k^4$$

A partir de estas dos ecuaciones pueden obtenerse otras seis que permiten determinar f, g, h, k, v, s . A partir de esto es fácil entender que cualquiera que sea la clase a la que la línea pertenezca, este procedimiento permite establecer siempre tantas ecuaciones como cantidades desconocidas supuestas. Pero para desarrollar por orden estas ecuaciones y, finalmente, hallar v , que realmente es lo que es necesario calcular, ya que las otras pueden ser halladas mediante v , primeramente por el segundo término debe determinarse f , que es la primera de las cantidades desconocidas en la última expresión; así hallamos que $f = 2e - 2b$. Seguidamente debemos hallar k , la última de las cantidades desconocidas de la misma expresión; así tenemos

$$k^4 = \frac{b^2 c^2 d^2}{e^2};$$

a partir del tercer término es preciso hallar g , la segunda cantidad, obteniendo $g^2 = 3e^2 - 4be - 2cd + b^2 + d^2$; a partir del penúltimo término es preciso hallar h , la penúltima cantidad, que es: A-T, VI, 421

$$h^3 = \frac{2b^2 c^2 d^2}{e^3} - \frac{2bc^2 d^2}{e^2}.$$

Mediante el mismo procedimiento podemos continuar siguiendo este mismo orden hasta que hayamos calculado la última cantidad.

Así, a partir del término correspondiente, que en este caso es el cuarto, podemos hallar v , y tenemos que:

$$v = \frac{2e^3}{d^2} - \frac{3be^2}{d^2} + \frac{b^2 e}{d^2} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bc^2}{e^2} - \frac{b^2 c^2}{e^3};$$

pero si introducimos y en lugar de e , puesto que $y = e$, tenemos que:

$$v = \frac{2y^3}{d^2} - \frac{3by^2}{d^2} + \frac{b^2 y}{d^2} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bc^2}{y^2} - \frac{b^2 c^2}{y^3}$$

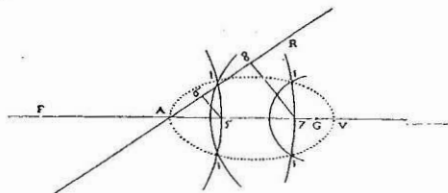
para la línea AP .

A-T, VI, 424

DB, que convergen en *A* y están comprendidas entre la curva *CD* y la línea recta *BH*, son iguales; pensemos que sea requerido hallar la línea *CG* que la corta en el punto *C*, formando ángulos rectos; se podría, calculando el punto por donde esta línea *CD* debe pasar en *BH*, según el método explicado, aventurarse en un cálculo tanto o más extenso que ninguno de los precedentes. Sin embargo, la construcción que debe ser deducida es muy simple. Sólo es preciso tomar *CF* en la recta *CA*, siendo igual a *CH*, que cae perpendicular sobre *HB*; seguidamente, desde el punto *F* debe trazarse *FG* paralela a *BA* e igual a *EA*. Por este medio se halla el punto *G*, por el que debe pasar *CG*, la línea pedida.

Explicación de cuatro nuevos géneros de óvalos de utilidad en la Optica

Finalmente, con el fin de que conozcáis que la consideración de las líneas curvas propuestas no carece de uso y que tienen diversas propiedades cuya importancia no es menor que las de las secciones cónicas, deséo aún realizar la explicación de algunos óvalos que, como se comprobará, son de gran utilidad tanto en la teoría de la Catóptrica como de la Dióptrica. Pueden describirse del siguiente modo.

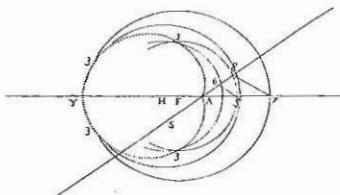


A-T, VI, 425

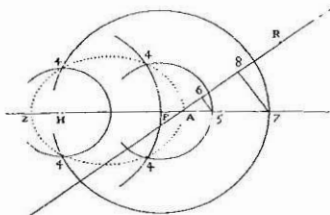
Primeramente, habiendo trazado las líneas rectas *FA* y *AR* que se cortan en el punto *A*, siendo indiferente los ángulos formados, tomo a discreción en una el punto *F*, más o menos alejado del punto *A*, según desee construir óvalos de mayores o menores dimensiones. Tomando el punto *F* como centro describo un círculo que pasa un poco más allá del punto *A*, como por el punto que llamamos 5. En segundo lugar, desde este punto 5 trazo la línea recta *56* que corta a la anterior en el punto 6, de

Para la construcción del tercero y cuarto en vez de tomar la línea AG es preciso tomar AH del otro lado del punto A , a saber, del mismo en el que está el punto F . Debemos observar, además, en relación con AH que debe ser mayor que AF , cuya dimensión puede ser equivalente a cero, de modo que los puntos F y A coincidan en la construcción de estos óvalos. Seguidamente, siendo iguales las líneas AR y AS a AH , para describir el tercer oval, $A3Y$, con centro en H trazo un círculo cuyo radio sea igual a $S6$ que corte en el punto 3 al trazado con centro en F que pasa por el punto 5; el

A-T, VI, 427



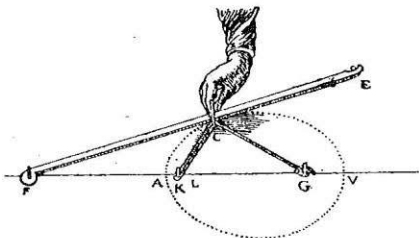
segundo, cuyo radio será igual a S8 que corta al que pasa por el punto 7 en el punto 3, y así sucesivamente para otros puntos. Finalmente, y en relación con el último óvalo, trazo dos círculos con centro en H , cuyos radios han de ser iguales a las líneas $R6$, $R8$ y semejantes que cortan los otros círculos en los puntos que llamamos 4.



Aún podríamos referirnos a una infinidad de procedimientos existentes para describir estos mismos óvalos como, por ejemplo, puede trazarse AV cuando se supone que las líneas FA y AG son iguales si se divide la

FG en el punto L , de modo que FL sea a LG como $A5$ es a $A6$ ($FL:LG = A5:A6$), es decir, según la razón que corresponde al índice de refracción. A continuación dividiendo AL en dos partes iguales, siendo K el punto equidistante, se procede a hacer girar una regla, presionando con el dedo C la cuerda EC , que estando unida al extremo de esta regla E , se repliega desde C hacia K y, seguidamente, desde K hacia C y desde C hacia G , punto en el que se une al otro extremo. De modo que la longitud de esta cuerda es igual a $GA + AL + FE - AF$. Será, pues, el movimiento del punto C el que describirá este óvalo de modo semejante al expuesto en la Dióptrica para la elipse y la hipérbola. Pero no deseo detenerme más en este tema.

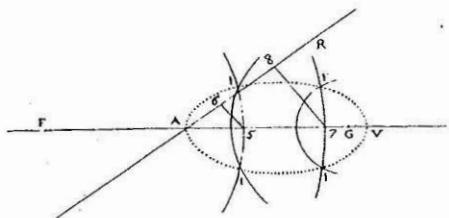
Aunque todos estos óvalos parezcan ser de la misma naturaleza, sin embargo, pertenecen a cuatro clases diferentes conteniendo cada una de ellas una infinidad de subclases, cada una de las cuales a su vez comprende tantas especies diferentes como la clase de las elipses o



las hipérbolas; las subclases dependen del valor de la razón de $A5$ respecto de $A6$, ya que según sea semejante o diferente, será diferente el género subalterno de estos óvalos. Así mismo, según que la proporción que exista entre las líneas AF y AG o AH , haya variado, los óvalos de cada subclase cambian de especie; según que la longitud de AG o AH sea mayor o menor, también variarán sus diversos tamaños. Si las líneas $A5$ y $A6$ son iguales, en vez de los óvalos del primer género o del tercero no se describirán sino líneas rectas; pero entre los de la segunda clase tenemos todas las posibles hipérbolas; y entre los de la cuarta, todas las posibles elipses.

Propiedades de estos óvalos en relación con las reflexiones y refracciones

Además, en cada uno de estos óvalos es preciso considerar dos partes que tienen diferentes propiedades. En el óvalo primero la parte que se encuentra hacia *A* da lugar a que los rayos procedentes del punto *F* a través del aire converjan hacia *G* después de haber alcanzado la superficie convexa *1A1* de una lente cuyo índice de refracción, de acuerdo con lo expuesto en la Dióptrica, sea tal que todas las refracciones puedan ser medidas considerando la proporción que existe entre las líneas *A5* y *A6* o semejantes, mediante las que ha sido descrito este óvalo.



A-T, VI, 430

Pero la parte que se encuentra hacia *V* da lugar a que todos los rayos procedentes de *G* converjan hacia *F* en caso de alcanzar una superficie cóncava de un espejo de la forma *1V1*, cuyo material fuese tal que disminuyese la fuerza de los rayos según la proporción que existe entre las líneas *A5* respecto de *A6*. Pues, a partir de lo que ha sido demostrado en la Dióptrica es evidente que en tales circunstancias tanto los ángulos de reflexión como de refracción no serán iguales, pudiendo ser medidos de igual forma.

Considérese el segundo oval. También en este caso la parte *2A2* sirve para las reflexiones de las que se supone que los ángulos son desiguales. Afirmando tal, pues, siendo la superficie del espejo del mismo material que lo era la del óvalo precedente, los rayos procedentes del punto *G* se reflejarían de tal modo que parecería que proceden del punto *F*. Obsérvese asimismo que habiendo trazado la línea *AG* de dimensiones mucho mayores que la línea *AF*, este espejo sería convexo en el centro, hacia *A*, pero cóncavo en sus extremidades, pues tal es la figura de

A-T, VI, 432

tómese el punto C a discreción en la parte primera del primer óvalo y trácese la línea recta CP de modo que corte a la curva en el punto C formando ángulos rectos. Esto puede construirse siguiendo el procedimiento expuesto anteriormente del modo siguiente:

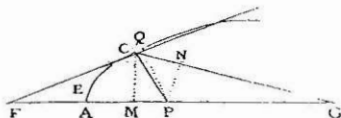
Sea $AG=b$, $AF=c$, $FC=c+z$ y supongo que la proporción existente entre d y e , que tomo como aquella que mide el poder refractor de la lente en consideración, designa la que existe también entre las líneas $A5$ y $A6$ o semejantes que han servido para trazar este óvalo. En tal caso tenemos que:

$$GC=b-\frac{e}{d}z.$$

De donde hallamos que la línea:

$$AP=\frac{bcd^2-bcde+bd^2z+ce^2z}{bde+cd^2+d^2z-e^2z}.$$

Seguidamente y desde P se traza la línea PQ perpendicular a FC , y PN perpendicular a GC . Consideramos que si PQ es a PN como d es a e , es decir, como son entre sí las líneas que miden las refracciones del vidrio convexo AC , entonces el rayo que procediendo del punto F llega a C debe curvarse de tal modo en este punto al penetrar en el vidrio que llegue a alcanzar el punto G , tal como es evidente si consideramos lo expuesto en *La Dióptrica*. Pero expongamos ahora mediante el cálculo si es verdadero que PQ sea a PN como d es a e ($PQ:PN=d:e$). Los triángulos rectángu-



los PQF y CMF son semejantes; de ello deducimos que CF es a CM como FP es a PQ . En consecuencia, si multiplicamos FP por CM y dividimos por CF , esto es igual a PQ . Así mismo, puesto que los triángulos rectángulos PNG y CMG son semejantes, se sigue que GP multiplicado por CM y dividido por CG es igual a PN . Pero puesto que las multiplicaciones y divisiones

de dos cantidades por una misma no modifica la proporción existente entre ellas, si A-T, VI, 433

$$\frac{FP \cdot CM}{CF} : \frac{GP \cdot CM}{CG} = d : e,$$

entonces, dividiendo cada término de la primera por CM y multiplicando cada uno por CF y CG , tenemos que $FP \cdot CG : GP \cdot CF = d : e$. En virtud de la construcción:

$$FP = c + \frac{bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z},$$

o que

$$FP = \frac{bcd^2 + c^2d^2 + bd^2z + cd^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2x}$$

y que $CG = b - \frac{e}{d}z$.

Entonces tenemos que:

$$FP \cdot CG = \frac{b^2cd^2 + bc^2d^2 + b^2d^2z + bcd^2z - bcdez - c^2dez - bdez^2 - cdez^2}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z}$$

Tenemos también que:

$$GP = b - \frac{-bcd^2bcde - bd^2z - ce^2z^{62 \text{ bis}}}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z};$$

o bien

$$GP = \frac{b^2de + bcde - be^2z - ce^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z};$$

y $CF = c + z$. De modo que

$$GP \cdot CF = \frac{b^2cde + bc^2de + b^2dez + bcdez - bce^2z - c^2e^2z - be^2z^2 - ce^2z^2}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z}$$

Puesto que el primero de estos productos ($FP \cdot CG$) dividido por d es igual al segundo $GP \cdot CF$ dividido por e , se sigue que:

$$PQ : PN = FP : CG : GP \cdot CF = d : e,$$

que era lo que se debía demostrar.

A-T, VI. 434

Tal demostración es extensiva a cuanto se ha dicho de las otras refracciones o reflexiones que se daban en los óvalos propuestos sin otra modificación que las convenientes alteraciones de los signos «+» y «-». Por ello cada uno puede examinarlos por sí mismo sin que sea necesario que me detenga en ello.

Pero sí que es necesario en este lugar que considere una cuestión silenciada en *La Dióptrica* cuando después de haber notado que pueden darse vidrios de diversas figuras que, tanto unos como otros, diesen lugar a que los rayos procedentes de un mismo punto del objeto se reúnan en otros puntos después de haberlos atravesado; que, entre éstos, los que son convexos por uno de los lados y cóncavos por el otro tienen un mayor poder para quemar que aquéllos cuya convexidad es la misma por ambas caras o lados; por el contrario, estos últimos son los más adecuados para la construcción de las lentes. Por ello he creído suficiente explicar aquellos que he estimado eran los más adecuados en razón de la práctica, puesto que supongo la dificultad que los artesanos deberán encontrar en la talla de los mismos. Considerando todo esto y con el fin de que no omitamos punto alguno que pueda estimarse necesario en relación con la teoría de esta ciencia, debo aún explicar la figura de vidrios que teniendo una de sus superficies tan convexa o cóncava como se desee, no por ello dejan de dar lugar a que todos los rayos que se dirigen hacia ellos procedentes de un mismo punto o bien paralelos se reúnan posteriormente en un mismo punto; así mismo, expondré la explicación relacionada con aquellos que dan lugar a un fenómeno semejante siendo convexos por ambos lados o bien guardando proporción la convexidad de uno de sus lados con la del otro.

Cómo se puede construir una lente, tan cóncava o convexa en una de sus caras como se desee y que sea capaz de reunir en un punto dado los rayos procedentes de un punto dado

A-T, VI. 435

En primer lugar sean G , Y , C y F puntos dados tales que los rayos procedentes de G o paralelos a GA converjan en F después de haber atravesado una lente cóncava que sea tal que Y sea el centro de su superficie interior y su extremidad se encuentre en el punto C de modo que tanto la cuerda CMC como la altura YM del arco CYC sean dadas. Previamente debemos determinar

la diferencia existente entre las bases, CH , y el lado pedido, MH , que será fácilmente calculable a partir de estos datos del modo siguiente: sea $k = CH - MH$ y $n = CM$; en consecuencia,

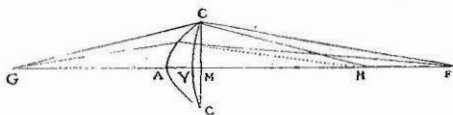
$$\frac{n^2}{2k} - \frac{1}{2}k = MH,$$

determinándose de este modo el punto H . Así calculado, si HY es mayor que HF , la curva CY debe ser la primera parte de un óvalo de la tercera clase, anteriormente llamada 3A3. Pero supongamos que HY es menor que FY , entonces pueden darse dos posibilidades; en la primera, HY excede a HF de modo tal que la razón de la misma respecto de la línea FY es mayor que la razón de e , la menor de las dos líneas que miden las refracciones, respecto de la línea d , la mayor de ellas; esto es, si $HF = c$, $HY = c + h$, entonces dh es mayor que $2ce + eh$. En este caso CY debe ser la segunda parte de 3Y3 del mismo óvalo perteneciente a la tercera clase y al que anteriormente nos hemos referido. En la segunda posibilidad dh es igual o menor que $2ce + eh$; CY será la segunda parte, 2X2, del óvalo de la segunda clase. Finalmente, si los puntos H y F coinciden, lo cual se da cuando FY y FC son iguales, entonces la línea YC es un círculo.

Finalmente, es preciso determinar CAC , la otra superficie. Si suponemos que los rayos que inciden son paralelos, será una elipse que tiene H como uno de sus focos, siendo fácilmente determinable su forma. Pero si suponemos que estos rayos proceden del punto G , la lente debe tener la forma correspondiente a la primera parte de un óvalo de la primera clase, debiendo ser los focos los puntos G y H , y pasando por el punto C ; a partir de aquí se concluye que el punto A es su vertex, puesto que GC debe ser mayor que GA en una cantidad tal que sea a la que HA sobrepasa a HC como d lo es a e . Es tal, pues, si k representa la diferencia entre CH y HM , y x representa AM , entonces $x - k$ representará la diferencia entre AH y CH ; si g representa la diferencia entre GC y GM , que son dadas, $g + x$ representará la diferencia entre CG y GA ; puesto que $g + x : x - k = d : e$, tenemos que $ge + ex = dx - dk$, o que

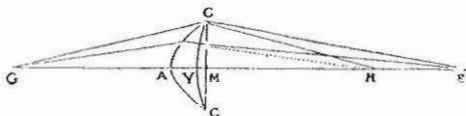
$$AM = x = \frac{ge + dk}{d - e},$$

siendo posible determinar el punto A .



cuál de los dos óvalos explicados debe tener la figura de la superficie YC para que todos los rayos que al atravesarlo tienden hacia un punto como H , que aún no es conocido, sin embargo, finalicen reuniéndose en otro, hacia F , después de haberlo atravesado. Debe ser así, pues no se produce cambio alguno de dirección de los rayos por medio de la reflexión o refracción que no sea efectuado por uno de estos óvalos; fácilmente, pues, se ve que éste puede ser producido por la parte del tercer óvalo, que conocemos como $3A3$ o por la del mismo óvalo conocido como $3Y3$ o, finalmente, por la parte del segundo óvalo llamado $2X2$. Puesto que todos ellos son sometibles a un mismo cálculo, debemos tanto para uno como para otro tomar Y como su vertex, C como un punto de su curva y F como uno de sus focos; por tanto, sólo deberemos hallar H que debe ser otro de los focos. Puede ser hallado al considerar que la diferencia que existe entre las líneas FY y FC debe ser a la que existe entre las líneas HY y HC como d es a e , es decir, como la mayor de las líneas que mide las refracciones del vidrio propuesto es a la menor, tal como claramente puede verse a partir de la descripción de estos óvalos. Pero puesto que las líneas FY y FC son dadas, también lo es su diferencia y, en consecuencia, la que existe entre HY y HC , puesto que es conocida la proporción que existe entre estas dos diferencias. Así mismo, puesto que YM es dada, también lo es la diferencia que existe entre

A-T, VI. 436

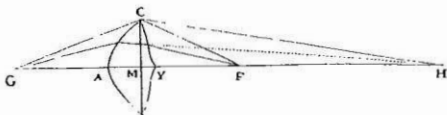


MH y HC ; finalmente, puesto que CM es dada, solamente deberemos calcular MH , el lado del triángulo CMH , cuyo otro lado CM es conocido al igual que lo es

Cómo se puede elaborar una lente que produzca el mismo efecto que la precedente guardando la convexidad de una de sus caras una proporción dada con la de la otra

En relación con el otro caso, supongamos que solamente son dados los puntos G , C y F , junto con la razón de AM respecto de YM , siendo preciso hallar la figura de la lente ACY , que dará lugar a que todos los rayos procedentes del punto G se reúnan en el punto F . A-T, VI, 438

En este caso podemos utilizar dos óvalos, AC y CY , cuyos focos sean G y H , o F y H , respectivamente. Para determinarlos supongamos en primer lugar que H , foco común a ambos sea conocido; determino AM por los tres puntos G , C y H del modo anteriormente explicado:



Si k representa la diferencia entre CH y HM , y g la diferencia entre GC y GM , siendo a su vez AC la primera parte del óvalo de la primera clase, entonces tendremos que:

$$AM = \frac{ge + dk}{d - e}.$$

Seguidamente debe hallarse MY por medio de los tres puntos F , C y H . Si CY es la primera parte de un óvalo de tercera clase y tomamos y por MY , así como f por la diferencia entre CF y FM , tendremos que la diferencia entre CF y FY es igual a $f + y$; así mismo, si la diferencia entre CH y HM es igual a k , tenemos que la diferencia entre CH y HY es igual a $k + y$. De donde se deduce que $k + y : f + y = e : d$, y, por tanto, que el óvalo es de la tercera clase y que

$$y = MY = \frac{fe - dk}{d - e}.$$

Por esto,

$$AM + MY = AY = \frac{ge + fe}{d - e}.$$

de donde se sigue que en cualquier lado que sea situado

A-T, VI, 439

el punto H , la razón de la línea AY al exceso de $GC + CF$ sobre GF es siempre igual a la razón de e respecto de $d - e$, la diferencia que existe entre estas dos líneas, lo cual es un interesante teorema. Hallada la línea AY será preciso dividirla según la proporción que sus partes deben guardar, AM y MY ; puesto que el punto M es conocido, los puntos A e Y así como, a continuación, el punto H serán hallados en virtud del problema precedente. Pero previamente es preciso considerar si la línea

AM , hallada de este modo, es mayor que $\frac{ge}{d - e}$, o bien si

es igual o menor. Pues si es mayor, se deduce de ello que la curva AC debe ser la primera parte de un óvalo de la primera clase, y CY la primera de un óvalo de la tercera, tal como se han considerado; pero si es menor, CY debe ser la primera parte de uno de la primera clase y AC la primera de uno de la tercera. Finalmente, si AM es igual a $\frac{ge}{d - e}$, las curvas AC y CY deben ser hipérbolas.

Estos problemas podrían hacerse extensivos a una infinidad de casos que no deseo explicar, puesto que carecen de uso en Dióptrica.

Aún se podría avanzar y mostrar cómo en el caso de que una superficie de una lente fuera dada y no fuera totalmente plana o compuesta de secciones cónicas o círculos, cómo debería trazarse la otra superficie con el fin de que todos los rayos procedentes de un punto dado incidiesen en otro que también fuera dado. Lo más difícil acabo de explicarlo; abierto el camino todo resultará más fácil. Prefiero, sin embargo, que tal tarea sea cumplida por otros con el fin de que si aún encuentran dificultades, esto les suscite estima por cuanto se ha demostrado.

A-T, VI, 440

Sobre la aplicación de lo expuesto sobre las líneas curvas trazadas sobre una superficie plana, a las que se describen en un espacio con tres dimensiones

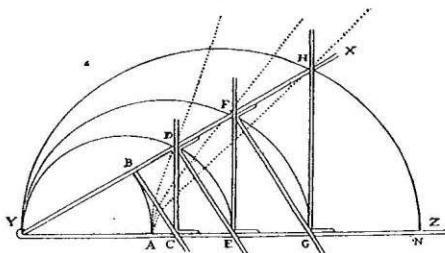
En toda esta exposición no me he referido sino a las líneas curvas que pueden ser descritas sobre una superficie plana, pero fácilmente podría ser relacionada con cuantas pudiéramos imaginar y que han sido formadas por el movimiento regular de los puntos de algún cuerpo en un espacio con tres dimensiones. Podría realizarse trazando dos perpendiculares desde cada uno

por las más simples no sólo deben entenderse aquellas que más fácilmente pueden ser descritas, ni aquellas que permiten una construcción o demostración con más facilidad del problema, sino que debemos entender aquellas que son de la clase más simple que puede utilizarse para determinar la cantidad exigida.

Ejemplo relacionado con la determinación de diversas medias proporcionales

Así, por ejemplo, no creo que exista modo más fácil para hallar cuantas medias proporcionales se deseen y cuya demostración sea más evidente, que el empleo de las líneas curvas que se describen mediante la utilización del instrumento *XYZ*, anteriormente descrito. Pues si se desea hallar dos medias proporcionales entre *YA* e *YE* no es preciso sino describir un círculo cuyo diámetro sea *YE*; puesto que este círculo corta la curva *AD* en el punto *D*, *YD* será una de las medias proporcionales

A-T, VI, 443



buscadas. La demostración aparece como evidente tan pronto como este instrumento es aplicado sobre la línea *YD*, pues como $YA = YB$ es a *YC*, así *YC* es a *YD*, e *YD* es a *YE*.

De igual modo para hallar cuatro medias proporcionales entre *YA* e *YG*, o para hallar seis entre *YA* e *YN*, no será preciso sino trazar el círculo *YFG* que, cortando en el punto *F* a *AF*, determina la línea recta *YF* que es una de las cuatro; igualmente si se traza *YHN* de modo que el punto *H* corta a *AH*, se determina *YH*, una de las seis y así para otros casos.

de los puntos de la línea curva que se desea considerar sobre dos planos que se corten formando ángulos rectos. Afirmando tal, pues, los extremos de estas perpendiculares describen otras dos líneas curvas, una sobre cada uno de estos planos a partir de los cuales y según la forma explicada podríamos determinar todos los puntos y relacionarlos con los de la línea recta que es común a estos dos planos; por este medio los de la curva que tienen tres dimensiones son enteramente determinados. Igualmente, si se desea trazar una línea recta que corte esta curva en el punto dado formando ángulos rectos, solamente es preciso trazar otras dos líneas rectas en los dos planos, una sobre cada uno, de modo que formen ángulos rectos las dos líneas curvas en los dos puntos en que caen las dos perpendiculares trazadas desde el punto dado. Pues, habiendo trazado otros dos planos, uno sobre cada una de las rectas dadas, cortando en ángulo recto el plano en que está, tendremos la intersección de estos dos planos como la recta buscada. De este modo espero no haber omitido elemento alguno decisivo para alcanzar el conocimiento de las líneas curvas.

A-T, VI, 441

LIBRO TERCERO

SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE PROBLEMAS SÓLIDOS Y SUPERSÓLIDOS⁶³ A-T, VI, 442

Sobre las líneas curvas de las que podemos servirnos en la construcción de cada problema

Aunque todas las líneas curvas que pueden ser descritas en virtud de algún movimiento regular deben considerarse como objeto de estudio en la Geometría, esto no quiere decir que deba utilizarse indiferentemente cualquiera de ellas para la construcción de cada uno de los problemas; por el contrario debe seleccionarse siempre la más simple, siempre y cuando haga posible la solución del problema. De igual modo debe notarse que

Pero puesto que la curva AD es de la segunda clase, es posible hallar dos medias proporcionales mediante las secciones cónicas, que pertenecen a la primera clase; puesto que también pueden hallarse cuatro o seis medias proporcionales mediante líneas curvas de clase más simple de lo que son AF y AH , sería un error en Geometría utilizarlas en este caso. Por otra parte sería igualmente un error el trabajar inútilmente para construir un problema por medio de una clase de líneas más simples de lo que permite su naturaleza. A-T, VI, 444

Sobre la naturaleza de las ecuaciones

Así pues, con el fin de facilitar algunas reglas que permitan evitar tanto el primero como el segundo de estos errores, es preciso realizar algunas observaciones generales sobre la naturaleza de las ecuaciones. Una ecuación está integrada por varios términos, alguno de ellos conocido y alguno de ellos desconocido, siendo unos iguales a los otros o, más bien, considerados todos conjuntamente son iguales a cero; digo tal, pues lo más conveniente será considerarlos de este modo.

Sobre el número de raíces en cada ecuación

Cada ecuación, pues, puede tener tantas raíces (valores de la cantidad desconocida), cuantas dimensiones tiene la cantidad desconocida: así, por ejemplo, supongamos que x es igual a 2 ($x=2$), o bien que $x-2$ es igual a cero ($x-2=0$) y, a su vez, que x es igual a 3 ($x=3$) o que $x-3$ es igual a cero ($x-3=0$); multiplicando estas dos ecuaciones, $x-2=0$ y $x-3=0$, tenemos $x^2-5x+6=0$, o bien que $x^2=5x-6$. Es ésta una ecuación en la que x tiene el valor 2 y, a la vez, el valor 3. Si $x-4=0$ y multiplicamos por $x^2-5x+6=0$, tenemos otra ecuación: $x^3-9x^2+26x-24=0$; en esta ecuación x , teniendo tres dimensiones, tiene también tres valores, que son 2, 3 y 4. A-T, VI, 445

Sobre las raíces falsas

Pero frecuentemente se da el caso de que alguna de estas raíces es falsa⁶⁴ o menor que cero. Así, si suponemos que x representa la carencia de una cantidad ($x=$

— 5), que fuese 5, tenemos que $x+5=0$; cuando se multiplica por $x^3-9x^2+26x-24=0$, resulta:

$$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0.$$

Estamos ante una ecuación que tiene cuatro raíces, a saber, tres que son verdaderas 2, 3 y 4, y una que es falsa, 5.

Sobre la reducción del número de dimensiones de una ecuación cuando se conoce alguna de sus raíces

Es evidente a partir de lo expuesto que la ecuación que tiene varias raíces es siempre divisible por un binomio formado por la cantidad desconocida menos el valor de una de las raíces verdaderas, o más el valor de una de las raíces falsas. De este modo pueden ser reducidas las dimensiones (el grado) de una ecuación.

Cómo puede examinarse si una cantidad dada es el valor de una raíz

De modo recíproco si la ecuación no puede ser dividida por un binomio compuesto de la cantidad desconocida más («+») o menos («-») alguna otra cantidad, esto muestra que esta última cantidad no es valor de alguna de sus raíces. Así, esta última ecuación, $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$; puede ser dividida por $x-2$, $x-3$, $x-4$, $x+5$, pero no por x más («+») o menos («-») alguna otra cantidad, lo cual muestra que solamente tiene cuatro raíces, 2, 3, 4, 5.

A.T. VI, 446

Cuántas raíces verdaderas pueden darse en cada ecuación

Igualmente podemos determinar el número de raíces verdaderas y falsas que pueda tener alguna ecuación del modo siguiente: pueden darse tantas verdaderas como cambios de signos de «+» (más) a «-» (menos) y de «-» (menos) a «+» (más); igualmente, pueden darse tantas falsas como veces se encuentren dos signos «+», o dos signos «-» que se encuentren en sucesión. Así, en la última ecuación, puesto que $+x^4$ es seguido de $-4x^3$,

$$\begin{array}{r}
 y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81 \\
 + 4y^3 - 36y^2 + 108y - 108 \\
 - 19y^2 + 114y - 171 \\
 - 106y + 318 \\
 - 120
 \end{array}$$

$$y^4 - 8y^3 - y^2 + 8y = 0$$

o

$$y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0,$$

cuya verdadera raíz no es ahora 5 sino 8, puesto que ha sufrido un incremento de 3.

A-T, VI, 448

Por el contrario, si lo que deseamos es disminuir en 3 la raíz de esta misma ecuación, será preciso que $y+3 = x$, y que $y^2 + 6y + 9 = x^2$, y así para otros casos. De modo que en lugar de:

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0,$$

tendremos:

$$\begin{array}{r}
 y^4 + 12y^3 + 54y^2 + 108y + 81 \\
 + 4y^3 + 36y^2 + 108y + 108 \\
 - 19y^2 - 114y - 171 \\
 - 106y - 318 \\
 - 120
 \end{array}$$

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0$$

Aumentando las raíces verdaderas disminuyen las falsas, y a la inversa

Debe tenerse en cuenta que al incrementar las raíces verdaderas de una ecuación, las falsas disminuyen en la misma cantidad y, por el contrario, si se disminuyen las verdaderas, aumentan las falsas; pero, sean unas u otras, si disminuyen en una cantidad igual a ellas, entonces la raíz será cero y si disminuimos en una cantidad mayor que la raíz, entonces la raíz verdadera pasa a ser falsa o la falsa pasa a ser verdadera. Así, en nuestro caso, incrementando en 3 la raíz verdadera, 5, disminuyen en 3 cada una de las falsas de modo que la que era 4 no será sino 1, la que era 3 será 0, y la raíz 2 es ahora una raíz verdadera, pues $-2+3 = +1$. Por ello en esta ecuación:

$$y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0,$$

existiendo un cambio de signo de «+» a «-», y puesto que $-19x^2$ es seguido de $+106x$, y $+106x$ de -120 , se deduce que hay tres raíces verdaderas y una falsa puesto que $-4x^3$ es seguido de $-19x^2$.

Cómo en una ecuación pueden convertirse las raíces falsas en verdaderas y a la inversa

Así mismo, es fácil lograr en una misma ecuación que todas las raíces falsas pasen a ser verdaderas y, por el mismo medio, que todas las verdaderas pasen a ser falsas. Esto se logra modificando los signos del segundo, cuarto, sexto y de todos los términos pares sin modificar los del primero, tercero, quinto y términos que ocupen un puesto impar. Así si en vez de

$$+x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

ponemos

$$+x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0,$$

obtendremos una ecuación en la que no hay sino una raíz verdadera, que es 5, y tres falsas, que son 2, 3 y 4. A-T, VI, 447

Cómo pueden aumentarse o disminuirse las raíces de una ecuación sin conocerlas

Pero si los valores de las raíces de una ecuación son desconocidos y deseamos aumentar o disminuir cada una de las raíces en una cantidad conocida, solamente es necesario que en el lugar del término desconocido se suponga otro que sea mayor o menor que esta misma cantidad, sustituyéndolo en toda la ecuación. Así, si deseamos aumentar en 3 la raíz de esta ecuación,

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0,$$

debemos introducir y en lugar de x , y suponer que y es mayor que x en 3, de modo que $y - 3 = x$; así mismo, en vez de x^2 debemos introducir el cuadrado de $y - 3$, que es $y^2 - 6y + 9$; en vez de x^3 , debe introducirse $y^3 - 9y^2 + 27y - 27$; y en lugar de x^4 , debemos introducir $y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81$. De este modo, sustituyendo todos estos valores en la anterior ecuación, tenemos:

solamente hay tres raíces, de las cuales solamente dos son verdaderas, 1 y 8, y una falsa, que también es 1. A-T, VI, 449. Pero en esta otra ecuación:

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0,$$

solamente tenemos una raíz verdadera, 2, puesto que $+5 - 3 = +2$, y tres raíces falsas, 5, 6 y 7.

Cómo se puede sacar el segundo término de una ecuación

Este procedimiento para transformar las raíces de una ecuación sin determinar sus valores permite realizar dos observaciones cuya utilidad posteriormente comprobaremos. En primer lugar, siempre podemos suprimir el segundo término de la ecuación que examinamos restando sus raíces verdaderas de la cantidad conocida de este segundo término, dividida por el número de dimensiones del primero si uno de estos términos es positivo y el otro negativo (si tienen signos opuestos); si tienen signos iguales, incrementando las raíces con la misma cantidad. Así para suprimir el segundo término de la ecuación:

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0,$$

dividido 16 por 4 (el exponente de y en y^4), siendo el cociente 4. Seguidamente establezco $z - 4 = y$. Entonces

$$\begin{array}{r} z^4 - 16z^3 + 96z^2 - 256z + 256 \\ + 16z^3 - 192z^2 + 768z - 1.024 \\ + 71z^2 - 568z + 1.136 \\ \hline 4z + 16 \\ - 420 \\ \hline z^4 - 25z^2 - 60z - 36 = 0 \end{array}$$

La verdadera raíz de esta ecuación que era 2, ha pasado a ser 6, puesto que ha sido incrementada en 4; las falsas que eran 5, 6 y 7 son en el caso presente 1, 2 y 3, pues cada una de ellas ha sido reducida en 4. A-T, VI, 450

De modo similar, si deseamos suprimir el segundo término de:

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0.$$

puesto que $2a$ dividido por $4 = \frac{1}{2}a$, debemos introducir $z + \frac{1}{2}a = x$ y tenemos que:

$$\begin{aligned}
 & z^4 + 2az^3 + \frac{3}{2}a^2z^2 + \frac{1}{2}a^3z + \frac{1}{16}a^4 \\
 & - 2az^3 - 3a^2z^2 - \frac{3}{2}a^3z - \frac{1}{4}a^4 \\
 & + 2a^2z^2 + 2a^3z + \frac{1}{2}a^4 \\
 & - c^2z^2 - ac^2z - \frac{1}{4}a^2c^2 \\
 & - 2a^3z - a^4 \\
 & + a^4
 \end{aligned}$$

$$z^4 + \left(\frac{1}{2}a^2 - c^2\right)z^2 - (a^3 + ac^2)z + \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 = 0.$$

Y si posteriormente hallamos el valor de z , sumándole $\frac{1}{2}a$, obtendremos el valor de x .

Sobre el procedimiento para lograr que las raíces falsas pasen a ser verdaderas, sin que suceda lo inverso

En segundo lugar será igualmente de utilidad para el desarrollo de este tratado el considerar que siempre que incrementemos las raíces verdaderas en una cantidad mayor de lo que es cualquiera de las raíces falsas, todas ellas pasarán a ser verdaderas, de modo que no se registrarán dos signos, «+» o «-», consecutivamente; además de esto, que la cantidad conocida del tercer término sea mayor que el cuadrado de la mitad del segundo. Pues, aunque esto pueda realizarse cuando las raíces falsas son desconocidas es fácil estimar aproximadamente sus valores y adoptar una cantidad que sea tal como se requiere o mayor aún para lograr tal efecto. Así, si tenemos:

$$\begin{aligned}
 & x^6 + nx^5 - 6n^2x^4 + 36n^3x^3 - 216n^4x^2 + \\
 & + 1.296n^5x - 7.776n^6 = 0,
 \end{aligned}$$

Sobre la multiplicación o división de raíces desconocidas

Así mismo, sin conocer el valor de las raíces de una ecuación podemos multiplicarlas o dividir las por cualquier cantidad conocida que deseemos. Esto se hace suponiendo que la cantidad desconocida, siendo multiplicada o dividida por la cantidad que debe multiplicar o dividir las raíces, es igual a otra cantidad; seguidamente, multiplicando o dividiendo la cantidad conocida del segundo término por la cantidad dada, y la cantidad conocida del tercer término por el cuadrado de la cantidad dada, y la del cuarto por el cubo, y así sucesivamente hasta el último.

Sobre la reducción de los quebrados en una ecuación

Esto puede ser útil para reducir a números enteros y racionales tanto las fracciones como frecuentemente los números irracionales que se encuentran en los términos de las ecuaciones. Así, si tenemos

$$x^3 - \sqrt{3}x^2 + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0,$$

A-T. VI. 453 y deseamos establecer otra en la que todos sus términos sean expresados mediante números racionales, es preciso suponer:

$$y = x\sqrt{3},$$

y multiplicar por $\sqrt{3}$ la cantidad conocida del segundo término, que es también, $\sqrt{3}$; y por su cuadrado, que es 3, la del tercer término, que es $\frac{26}{27}$; por su cubo, que es 3.

$$\sqrt{3}, \text{ la del último, que es } \frac{8}{27\sqrt{3}}.$$

Obtendremos como ecuación resultante:

$$y^3 - 3y^2 + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0.$$

Posteriormente si se desea reemplazar esta ecuación por otra cuyas cantidades conocidas sean solamente expresadas en números enteros, debemos suponer que $z = 3y$, y multiplicando 3 por 3, $\frac{26}{9}$ por 9, y $\frac{8}{9}$ por

estableciendo $y - 6n = x$, tendremos:

$$\begin{array}{r}
 y^6 - 36ny^5 + 540n^2y^4 - 4.320n^3y^3 + 19.440n^4y^2 - 46.656n^5y + 46.656n^6 \\
 + \quad ny^5 - 30n^2y^4 + 360n^3y^3 - 2.160n^4y^2 + 6.480n^5y - 7.776n^6 \\
 \quad \dots \quad 6n^2y^4 + 144n^3y^3 - 1.296n^4y^2 + 5.184n^5y - 7.776n^6 \\
 \qquad \qquad \quad + \quad 36n^3y^3 - 648n^4y^2 + 3.888n^5y - 7.776n^6 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \quad - \quad 216n^4y^2 + 2.592n^5y - 7.776n^6 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad + \quad 1.296n^5y - 7.776n^6 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad - \quad 7.776n^6 \\
 \hline
 y^6 + 35ny^5 + 504n^2y^4 - 3.780n^3y^3 + 15.120n^4y^2 - 27.216n^5y \quad = 0.
 \end{array}$$

Es claro en este caso que $504n^2$, la cantidad conocida del tercer término, es mayor que $\left(\frac{35}{2}n\right)^2$, el cuadrado de la mitad de la del segundo; no hay caso en el que la cantidad, en que se incrementen las verdaderas raíces, deba ser necesariamente mayor, en proporción a las que son dadas, de lo que ha sido para éste.

Procedimiento para completar los diversos lugares de una ecuación

Pero si no se desea que el último término sea nulo (cero), como en este caso, debe ser necesariamente incrementado el valor de las raíces aunque sólo sea en una pequeña cantidad, no debiendo ser tan reducida que no sea suficiente a tal efecto; no más que si se desea aumentar el número de dimensiones (el grado) de una ecuación y también asegurar que todos los lugares de sus términos estén completos, como si en vez de

$$x^5 - b = 0$$

descamos una ecuación de sexto grado y en la que ninguno de sus términos fuere nulo; en este caso, debemos primeramente para

$$x^5 - b = 0, \text{ escribir}$$

A-T. VI. 452

$$x^6 - bx = 0;$$

en segundo lugar, habiendo establecido $y - a = x$, tendremos:

$$\begin{aligned}
 &y^6 - 6ay^5 + 15a^2y^4 - 20a^3y^3 + \\
 &+ 15a^4y^2 - (6a^5 + b)y + a^6 + ab = 0.
 \end{aligned}$$

Es evidente que por muy pequeña que se haya supuesto la cantidad a , cada término de esta ecuación ha sido completado.

27, hallamos que $z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0$. Las raíces son 2, 3 y 4. A partir de esto deducimos que las raíces de la ecuación precedente eran $\frac{2}{3}$, 1 y $\frac{4}{3}$, siendo las de la primera

$$\frac{2}{9}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ y } \frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

Procedimiento para establecer una igualdad entre la cantidad conocida de uno de los términos de la ecuación y otra cantidad dada

Esta operación también puede utilizarse para hacer que la cantidad conocida de algún término de la ecuación sea igual a alguna otra dada. Así, si teniendo la ecuación:

$$x^3 - b^2x + c^3 = 0,$$

deseamos establecer otra ecuación en la que la cantidad conocida del término que ocupa el tercer lugar, esto es b^2 , sea $3a^2$, es preciso suponer que:

$$y = x \sqrt{\frac{3a^2}{b^2}}$$

y tenemos

$$y^3 - 3a^2y + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} = 0.$$

Las raíces, verdaderas o falsas, pueden ser reales o imaginarias

Nótese, finalmente, que tanto las raíces verdaderas como las falsas no siempre son reales; es decir, podemos imaginar cuanto he dicho en cada ecuación, pero algunas veces no hay cantidad alguna que corresponda a las raíces imaginadas. Así, aunque pudiésemos imaginar tres raíces en esta ecuación:

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0,$$

no hay sino una real, 2; en relación con las otras dos, aunque se las incremente, disminuya o multiplique de

acuerdo con las reglas cuya exposición he realizado, siempre serán imaginarias.

La reducción de ecuaciones cúbicas cuando el problema es plano

Cuando la construcción de algún problema implica la solución de una ecuación en la que la cantidad desconocida tiene tres dimensiones, deben adoptarse los siguientes pasos: en primer lugar si la ecuación incluye algunas fracciones, debemos reducir a números enteros, siguiendo el procedimiento indicado; si contiene algún número irracional, en cuanto sea posible mediante multiplicación o por otros fáciles procedimientos, debemos reducirlos a racionales; en segundo lugar examinando por orden todas las cantidades que pueden dividir el último término sin dar lugar a fracción, es preciso comprobar si alguna de ellas es divisible por un binomio integrado por la cantidad desconocida más o menos alguna de ellas⁶⁵. Si tal es el caso, entonces el problema es plano, esto es, puede ser construido por medio de la regla y el compás; pues, o bien la cantidad conocida de este binomio es la raíz exigida, o bien dividida la ecuación por el binomio, el cociente es de segundo grado (se reduce a dos dimensiones), de modo que podamos a partir de este cociente hallar la raíz, como se explicó en el primer libro de este tratado.

Por ejemplo, si tenemos:

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0,$$

A-T, VI, 455 el último término, que es 64, es divisible por 1, 2, 4, 8, 16, 32 y 64; por tanto, debemos comprobar si la ecuación es divisible por $y^2 - 1$, $y^2 + 1$, $y^2 - 2$, $y^2 + 2$, $y^2 - 4$ y así sucesivamente. Hallaremos que es divisible por $y^2 - 16$ del modo siguiente:

$$\begin{array}{r}
 + y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0 \\
 - y^6 - 8y^4 - 4y^2 - 16 \\
 \hline
 - 16y^4 - 128y^2 \\
 - 16y^4 - 16 \\
 \hline
 + y^4 + 8y^2 + 4 = 0
 \end{array}$$

Esto muestra que la raíz buscada es $a^2 + c^2$, siendo fácil de establecer la prueba mediante una multiplicación.

Qué problemas son sólidos cuando la ecuación es cúbica

A-T, VI, 457

Pero cuando no se encuentra algún binomio que pueda dividir la ecuación propuesta, es cierto que el problema que de ella depende es sólido. En tal caso no es un error menor intentar su construcción utilizando solamente círculos y líneas rectas de lo que sería emplear secciones cónicas en la construcción de aquellos que no exigen sino círculos, ya que todo aquello que testimonia una cierta ignorancia suele ser llamado error.

Sobre la reducción de las ecuaciones con cuatro dimensiones cuando el problema es plano y sobre los que son sólidos

De igual modo, si tenemos una ecuación cuya cantidad desconocida tiene cuatro dimensiones, es preciso después de haber suprimido los números irracionales y fracciones, caso de haberlos, comprobar si es posible establecer algún binomio que divida la suma, estando integrado por una de las cantidades que dividiesen sin fracción el último término. Si se halla tal binomio, o bien la cantidad conocida de este binomio es la raíz buscada o al menos después de realizada tal división, la ecuación resultante solamente es de tres dimensiones, debe ser examinada de igual modo. Pero cuando tal binomio no se halla, es preciso, aumentando o disminuyendo el valor de la raíz, suprimir el segundo término del modo explicado; posteriormente, debe reducirse a otra que no tenga sino tres dimensiones. Esto se hace del modo siguiente: en vez de

$$x^4 \pm px^2 \pm qx \pm r = 0,$$

es preciso afirmar

$$y^6 \pm 2py^4 + (p^2 \pm 4r)y^2 - q^2 = 0.$$

En relación con los signos «+» o «-» (que he omitido⁶⁶), si en la primera ecuación tenemos $+p$, es preciso que en la segunda introduzcamos $+2p$, o si en la primera se da $-p$, en la segunda debemos introducir

Modo de dividir una ecuación por un binomio que contiene su raíz

Comienzo por el último término, divido -64 por -16 , que da $+4$, que anoto en el cociente; seguidamente se multiplica $+4$ por y^2 , cuyo resultado es $+4y^2$ y consigno en el dividendo $-4y^2$, pues debemos introducir el signo «+» o «-» de modo opuesto al del resultado de la multiplicación. Sumando $-124y^2$ con $-4y^2$, obtenemos $-128y^2$. Dividiendo esto por -16 , se obtiene $+8y^2$ en el cociente, y multiplicando por y^2 se obtiene $-8y^4$ que debe sumarse al término que corresponde, $-8y^4$, en el dividendo. El resultado es $-16y^4$ que dividido por -16 da como resultado y^4 para el cociente; por otra parte, $-y^6$ unido con $+y^6$, será cero el resultado, mostrándose que la división ha sido concluida. Si aún resta alguna cantidad o bien si alguno de los términos no fuese divisible sin obtenerse fracción, entonces estaría claro que no podría realizarse.

De modo semejante, si tenemos:

A-T, VI, 456

$$\left. \begin{array}{r} y^6 + a^2 \\ - 2c^2 \end{array} \right\} y^4 \quad \left. \begin{array}{r} - a^4 \\ + c^4 \end{array} \right\} y^2 \quad \left. \begin{array}{r} - a^6 \\ - 2a^4c^2 \\ - a^2c^4 \end{array} \right\} = 0,$$

el último término es divisible sin fracción por a , a^2 , $a^2 + c^2$, $a^3 + ac^2$ y semejantes. Pero solamente deben ser considerados dos, esto es, a^2 y $a^2 + c^2$. Es tal, pues los otros darían un término en el cociente de mayor o menor grado que la cantidad conocida del penúltimo término, haciendo esto imposible la división. Nótese que estoy considerando y^6 como de tercer grado, puesto que no hay términos tales como y^5 , ni y^3 , ni y . Así, examinando el binomio $y^2 - a^2 - c^2 = 0$, hallamos que la división puede establecerse como sigue:

$$\begin{array}{r} + y^6 + a^2 \\ - y^6 - 2c^2 \\ 0 - 2a^2 \\ + c^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} y^4 - a^4 \\ + c^4 \\ - a^4 \\ - a^2c^2 \end{array} \right\} y^2 \quad \left\{ \begin{array}{r} - a^6 \\ - 2a^4c^2 \\ - a^2c^4 \end{array} \right\} = 0$$

$$\begin{array}{r} - a^2 - c^2 \\ + y^4 \end{array} \quad \begin{array}{r} - a^2 - c^2 \\ + 2a^2 \\ - c^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} y^2 + a^4 \\ + a^2c^2 \end{array} \right\} = 0;$$

$-2p$; por el contrario, si tenemos $+r$, debe introducirse $-4r$, y $+4r$ si tenemos $-r$; pero si tenemos $+q$ o $-q$ A-T, VI, 458 siempre deberemos introducir $-q^2$ y $+p^2$ en la segunda, al menos si se supone que x^4 e y^6 tienen signo positivo (+); en caso contrario debería ser $+q^2$ y $-p^2$.

Por ejemplo, si tenemos:

$$x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0,$$

debemos introducir en su lugar

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0,$$

pues la cantidad llamada p siendo igual a -4 , debemos reemplazar $2py^4$ por $-8y^4$; puesto que r es igual a 35 , deberemos sustituir $(p^2 - 4r)y^2$ por $(16 - 140)y^2$ o $-124y^2$; y puesto que $q = 8$, deberemos reemplazar $-q^2$ por -64 .

De modo semejante, en vez de

$$x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0,$$

debemos afirmar

$$y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0,$$

pues 34 es el doble de 17 , 313 es el cuadrado de 17 sumado al cuádruplo de 6 , y 400 es el cuadrado de 20 .

Del mismo modo, en vez de

$$+z^4 + \left(\frac{1}{2}a^2 - c^2\right)z^2 - (a^3 + ac^2)z - \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 = 0$$

debemos escribir

$$y^6 + (a^2 - 2c^2)y^4 + (c^4 - a^4)y^2 - a^6 - 2a^4c^2 - a^2c^4 = 0;$$

pues,

$$p = \frac{1}{2}a^2 - c^2, p^2 = \frac{1}{4}a^4 - a^2c^2 + c^4, 4r = -\frac{5}{4}a^4 + a^2c^2.$$

Finalmente, tenemos:

$$-q^2 = -a^6 - 2a^4c^4 - a^2c^4.$$

Cuando ya hemos reducido la ecuación a tres dimensiones, es preciso calcular el valor de y^2 , utilizando el método que ya hemos explicado^{66 bis}; si no pudiera ser hallado, no existe necesidad alguna de proseguir, pues de ello se deduce necesariamente que el problema es sólido. Pero si es hallado el valor de y^2 , ello hará posible que podamos dividir la ecuación precedente en otras dos, no teniendo la cantidad desconocida en cada

una de ellas, sino dos dimensiones, y siendo sus raíces las mismas que las de la ecuación original. Así en vez de

$$\pm x^4 \pm px^2 \pm qx \pm r = 0,$$

deberemos establecer estas otras dos ecuaciones

$$+x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 \pm \frac{1}{2}p \pm \frac{q}{2y} = 0$$

y

$$+x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 \pm \frac{1}{2}p \pm \frac{q}{2y} = 0.$$

En relación con los signos $+$ y $-$ que he omitido⁶⁶, si tenemos $+p$ en la ecuación precedente, entonces debemos anotar $+\frac{1}{2}p$ en cada una de las otras dos ecuaciones; caso de que tengamos $-p$, entonces $-\frac{1}{2}p$. Pero será necesario anotar $+\frac{q}{2y}$ cuando tenemos $-yx$, y $-\frac{q}{2y}$ cuando tenemos $+yx$, siempre que q vaya precedida de signo positivo. Pero, por el contrario, si tuviéramos $-q$ deberíamos poner $-\frac{q}{2y}$ en la que se diera $-yx$; debería anotarse $+\frac{q}{2y}$ si encontramos $+yx$. De este modo es fácil conocer todas las raíces de la ecuación propuesta y, en consecuencia, construir el problema cuya solución expresa, no siendo necesario utilizar sino círculos y líneas rectas.

Por ejemplo, tomando

$$+y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0$$

en vez de

$$+x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0,$$

A-T, VI, 460 hallamos que $y^2 = 16$; entonces, en el lugar de la ecuación

$$+x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0,$$

deberemos anotar

$$+x^2 - 4x - 3 = 0$$

puesto que $y^2 = a^2 + c^2$, tendremos que

$$z^2 - \sqrt{a^2 + c^2} z + \frac{3}{4} a^2 - \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 + c^2} = 0,$$

y

$$z^2 + \sqrt{a^2 + c^2} z + \frac{3}{4} a^2 + \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 + c^2} = 0;$$

puesto que

$$y = \sqrt{a^2 + c^2},$$

y que

$$+ \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} p = \frac{3}{4} a^2;$$

y, finalmente, que

$$\frac{q}{2y} = \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 + c^2},$$

por tanto, llegamos a establecer que el valor de

$$z = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{-\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 + c^2}}$$

o bien que

$$z = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{-\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Como se había establecido que $z + \frac{1}{2} a = x$, tenemos que la cantidad x , para cuyo conocimiento hemos realizado estas operaciones, es igual a

$$+ \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{4} c^2} - \sqrt{\frac{1}{4} c^2 - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Ejemplo del uso de estas reducciones

A. T. VI. 462

Con el fin de que pueda ser más fácilmente reconocida la utilidad de esta regla, es preciso que la aplique a algún problema⁶⁷.

Si el cuadrado AD y la línea BN son dados, debemos prolongar el lado AC hasta E , de modo que EF , trazada desde E hacia B sea igual a NB . Conocemos por Pappus

y

$$+x^2+4x+2=0;$$

pues $y=4$, $\frac{1}{2}y^2=8$, $p=17$ y $q=20$, tenemos que

$$+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y}=-3$$

y

$$+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}=+2.$$

Obteniendo las raíces de estas ecuaciones, llegaremos al mismo resultado que en el caso de que se obtuvieran en la que contiene x^4 ; es decir, tendríamos una verdadera $\sqrt{7+2}$, y tres falsas: $2+\sqrt{2}$, $\sqrt{7-2}$ y $2-\sqrt{2}$. Así, teniendo

$$x^4-4x^2-8x+35=0,$$

puesto que la raíz de

$$y^6-8y^4-124y^2-64=0$$

es 16, debemos anotar

$$x^2-4x+5=0$$

y

$$x^2+4x+7=0.$$

En este caso tenemos que

$$+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y}=5$$

y

$$+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}=7.$$

Como no se encuentra ninguna raíz, verdadera o falsa, en estas dos últimas, deducimos que las cuatro raíces de la ecuación original son imaginarias; asimismo que el problema al cual corresponde es plano, pero que no podrá ser construido puesto que las cantidades dadas no pueden ser unidas.

De igual modo, si tenemos

$$z^4+\left(\frac{1}{2}a^2-c^2\right)z^2-(a^3+ac^2)z+\frac{5}{16}a^4-\frac{1}{4}a^2c^2=0,$$

mediante el procedimiento expuesto conocemos que su raíz, que es la longitud de DF , es

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2} - \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

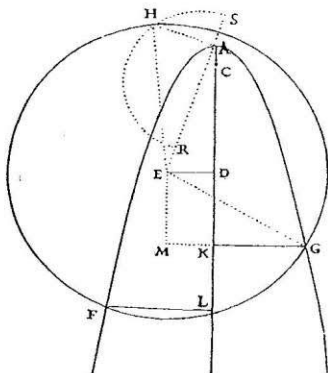
Si considerásemos BF o CE o BE como la cantidad desconocida obtendríamos una ecuación con cuatro dimensiones pero cuyo desarrollo sería más fácil y, a la vez, se accedería a la misma con gran facilidad. Por el contrario, si tomásemos DG se obtendría con mucha mayor dificultad la ecuación, aunque también sería muy simple. Comunico esto para advertir que cuando se propone un problema que no es sólido si al intentarlo resolver por un método accedemos a una ecuación muy compleja, podemos acceder a otra más simple tratando de hallarla por otro camino.

Aún podría comunicar otras reglas para resolver ecuaciones cúbicas o bicuadráticas, pero estimo que son innecesarias, pues si los problemas son planos puede accederse a su solución mediante los procedimientos que hemos propuesto.

Regla general para reducir las ecuaciones que pasan el cuadrado de cuadrado.

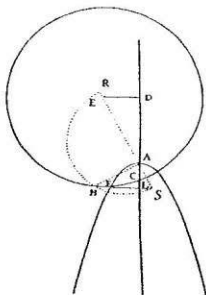
Así mismo, podría agregar otras reglas relacionadas con las ecuaciones de quinto, sexto y superior grado. Sin embargo, prefiero reducirlas todas a una sola regla, afirmando en general que cuando hemos intentado reducir las ecuaciones dadas a la misma forma de aquellas que con otras tantas dimensiones, provienen de la multiplicación de otras dos con menos dimensiones, y que si habiendo enumerado todos los medios por los cuales esta multiplicación es posible, no ha sido posible obtenerse, entonces podemos asegurar que las ecuaciones dadas no pueden ser reducidas a otras más simples. De modo que si la cantidad desconocida tuviese tres o cuatro dimensiones, el problema correspondiente es sólido; si tiene cinco o seis dimensiones, entonces posee un grado mayor de complejidad, y así sucesivamente.

Finalmente, he omitido las demostraciones de la mayor parte de cuanto he expuesto porque me han parecido tan fáciles que si se toma la molestia de examinar metódicamente si me he equivocado, llegarán



(en el caso de que p sea igual a 0 desde el punto C) se traza la perpendicular DE sobre CD de modo que DE

A-T. VI. 466 sea igual a $\frac{1}{2}q$. Finalmente, desde el punto E y con el radio AE se traza el círculo FG en el caso de que la ecuación dada sea cúbica, esto es, de modo que r sea igual a cero. Pero cuando nos encontramos con que en la ecuación se halla $+r$, debemos tomar sobre la prolongación de AE , por un lado, $AR=ry$, por otro, AS



a hacerse presentes. Es mucho más útil conocerlas de este modo que mediante una simple lectura.

Forma general de reducir todos los problemas sólidos en una ecuación de tercer o cuarto grado

Asegurados de que el problema propuesto es sólido, sea que la ecuación de la cual depende su solución sea de cuarto grado o bien porque solamente sea de tercer grado, siempre podremos hallar su raíz por medio de una cualquiera de las tres secciones cónicas o incluso por alguna de sus partes, por pequeña que fuese, empleando simplemente líneas rectas y circulares. Me sentiré satisfecho en este lugar con facilitar solamente una regla para encontrarlas todas por medio de una parábola puesto que, en cierto modo, es la más simple de estas curvas.

En primer lugar, debe eliminarse el segundo término de la ecuación, caso de que ya no sea nulo y reducir la ecuación a la fórmula

$$z^3 = \pm aqz \pm a^2q,$$

si la cantidad desconocida no tiene más que tres dimensiones, en el caso de que tuviera cuatro deberíamos reducirla a la fórmula A-T, VI, 465

$$z^4 = \pm apz^2 \pm a^2qz \pm a^3r.$$

Si tomamos a como la unidad, entonces la reducción para el primer caso sería

$$z^3 = \pm pz \pm q$$

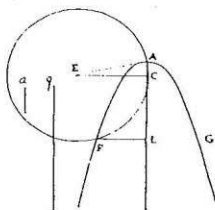
y para el segundo

$$z^4 = \pm pz^2 + qz \pm r.$$

A continuación, suponiendo que la parábola FAG ha sido trazada y que su eje es $ACDKL$, que su lado recto es $a=1$, y que AC es su mitad ($\frac{1}{2}$); suponiendo que el punto C es interior a esta parábola y que A es el vertex.

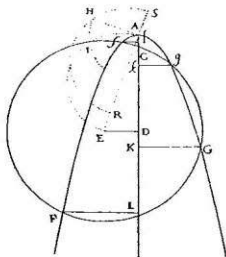
Debemos establecer que $CD = \frac{1}{2}p$ y tomarla de modo que los puntos D y A caigan sobre el mismo lado que C en el caso de que la ecuación contenga $+p$; en el caso de que en la ecuación tengamos $-p$, es preciso que caiga del lado opuesto. Seguidamente desde el punto D

que debe ser igual al lado recto de la parábola, esto es, a 1. Cuando hayamos descrito un círculo cuyo diámetro sea RS , debemos trazar una perpendicular, AH , sobre AE , encontrando tal perpendicular al círculo RHS en el punto H , por el que debe pasar también el otro círculo FHG . En el caso de que tengamos $-r$, es preciso



después de haber hallado de este modo la línea AH , inscribir AI , siendo igual a AH en otro círculo, siendo AE el diámetro. En tal caso pasará por I el primer círculo buscado FIG . Este círculo, FG , puede cortar o ser tangente a la parábola en 1 ó 2 ó 3 ó 4 puntos; si desde ellos trazamos perpendiculares sobre el eje, tendremos todas las raíces de la ecuación, tanto las verdaderas como las falsas. Si la cantidad q está precedida del signo $+$ las raíces verdaderas serán aquéllas, como FL que se encuentran del mismo lado de la parábola que E , centro del círculo; las otras, tal como es el caso de GK , serán las raíces falsas. Pero, si por el

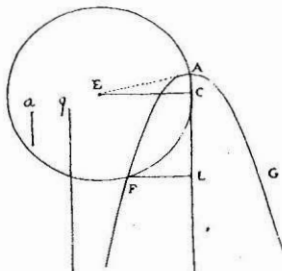
A-T, VI, 467



Sobre la determinación de dos medias proporcionales

Así mismo, si lo deseamos, siguiendo esta regla podemos hallar dos medias proporcionales entre las líneas a y q . Es claro que si a una llamamos z , entonces tendremos que

$$a : z = z : \frac{z^2}{a} = \frac{z^2}{a} : \frac{z^3}{a^2}.$$



De este modo tenemos una ecuación entre q y $\frac{z^3}{a^2}$, esto es que $z^3 = a^2 q$.

La parábola FAG siendo trazada con la parte de su eje AC , siendo que AC es igual a $\frac{1}{2}a$, la mitad del lado recto, debe trazarse por C una perpendicular $CE = \frac{1}{2}q$, describiendo el círculo AF de modo que el centro del mismo sea E y que pase por A . De este modo tendremos que FL y LA serán las medias proporcionales buscadas.

A-T. VI. 470

Modo de dividir un ángulo en tres partes

De igual modo si deseamos dividir el ángulo NOP , o bien el arco o porción del círculo $NQTP$ en tres partes iguales, tomando $NO = 1$ como el radio del círculo, $NP = q$ como la cuerda del arco dado y $NQ = z$ para la

pero puesto que $DE = KM = \frac{1}{2}q$, tendremos que la línea A.T. VI, 468

$GM = z + \frac{1}{2}q$, y el cuadrado de GM será igual a $z^2 + qz + \frac{1}{4}q^2$. La adición de estos dos cuadrados nos da que

$$z^4 - pz^2 + qz + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$$

es el valor para el cuadrado de la línea GE , puesto que es la hipotenusa del triángulo EMG .

Pero puesto que esta misma línea GE es el radio del círculo FG , puede ser expresada en otros términos; esto es, si

$$ED = \frac{1}{2}q,$$

y

$$AD = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2},$$

entonces tendremos que

$$EA = \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}},$$

puesto que ADE es un ángulo recto. Luego, siendo AH A.T. VI, 469
media proporcional entre $AS=1$ y AR o r , tendremos que AH es igual a $\sqrt{r}$; y puesto que EAH es un ángulo recto, el cuadrado de HE o de EG es

$$\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r.$$

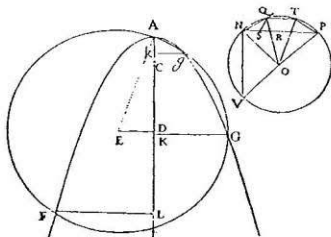
De este modo tenemos una ecuación a partir de esta suma y de la anteriormente obtenida.

Tal ecuación será de la forma $z^4 = pz^2 - qz + r$ y, en consecuencia, tendremos que la línea GK , llamada z , es la raíz de esta ecuación. Tal era el objeto de esta demostración. Si se aplica el mismo cálculo a todos los otros casos de esta regla, adoptando los oportunos cambios de los signos (+ y -), podrán lograrse resultados semejantes, no siendo necesario que yo me detenga en tal tipo de consideraciones⁶⁸.

cuerda que corresponde al tercio del arco dado, tenemos que la ecuación es

$$z^3 = 3z - q.$$

Es tal, pues trazando las líneas NQ , OQ y OT , y trazando a su vez QS paralela a TO , se ve que NO es a NQ como NQ es a QR y como QR es a RS . De modo que siendo $NO=1$, y $NQ=z$, entonces $QR=z^2$ y RS



$= z^3$. Puesto que es preciso solamente RS o z^3 para que $NP=q$ sea triple de $NQ=z$, tenemos que $q=3z-z^3$ o bien que $z^3=3z-q$.

Si posteriormente describimos la parábola FAG , y si CA es la mitad de su lado recto, y si $CD=\frac{3}{2}$ y la

perpendicular $DE=\frac{1}{2}q$, y, finalmente, si desde el centro

E describimos el círculo FAG por A , tendremos que cortará a esta parábola en los tres puntos F , g y G sin contar el punto A que es el vértice. Esto muestra que hay tres raíces en esta ecuación, a saber: GK y gk que son verdaderas, y la tercera que es falsa, FL . De las dos raíces verdaderas, la menor de ellas gk es la que debemos tomar para la línea buscada NQ ; la otra, GK , es igual a NV la cuerda correspondiente a la tercera parte del arco NVP que junto con el otro arco NQP constituye el círculo. La falsa, FL , es igual a la suma de las otras dos, QN y NV , como fácilmente puede comprobarse mediante el cálculo⁶⁹.

A-T. VI, 471

Sobre la reducción de los problemas sólidos a estas dos construcciones

Sería superfluo que me detuviese explicando otros ejemplos ya que todos los problemas sólidos admiten reducciones tales que no necesitamos aplicar esta regla para construirlos con excepción de aquellos casos en que es necesario hallar dos medias proporcionales o dividir un ángulo en tres partes iguales. Esto es evidente si se considera que las dificultades propias de estos problemas pueden estar siempre comprendidas en ecuaciones no superiores a las de tercer o cuarto grado; que todas las ecuaciones de cuarto grado pueden reducirse a las de segundo por medio de otras no superiores a las de tercer grado y, finalmente, que puede eliminarse el segundo término de estas ecuaciones. En consecuencia, no hay ninguna que no pueda reducirse a alguna de estas tres formas

$$z^3 = -pz + q$$

$$z^3 = +pz + q$$

$$z^3 = +pz - q.$$

Así, si tenemos $z^3 = -pz + q$, la regla que atribuye A. T., VI, 472 Cardan a Escipión Ferreus, nos enseña que la raíz es

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}.$$

De modo semejante cuando tenemos $z^3 = +pz + q$, y el cuadrado de la mitad del último término es mayor que el cubo del tercio de la cantidad conocida del penúltimo término, una regla semejante nos muestra que la raíz es

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}.$$

Por ello parece que pueden construirse todos los problemas cuyas ecuaciones pueden reducirse a una de estas dos formas sin tener necesidad de las secciones cónicas sino para extraer las raíces cúbicas de ciertas cantidades conocidas, es decir, para calcular medias proporcionales entre estas cantidades y la unidad.

De nuevo, si tenemos $z^3 = +pz + q$ cuando el cuadrado de la mitad del último término no es mayor que el cubo del tercio de la cantidad conocida del penúltimo término, describiendo el círculo $NQPV$ con radio NO

Forma de expresar el valor de todas las raíces de las ecuaciones cúbicas y de todas las bicuadráticas

A-T, VI, 474 Por otra parte, debe señalarse que la forma de expresar el valor de las raíces en base a la relación que guardan con los lados de ciertos cubos de los que no se conocen sino sus áreas, no es ni más inteligible ni más simple que la de expresarlas en virtud de su relación con las cuerdas de ciertos arcos o porciones de círculos cuyos triplos son dados. Por ello todas las ecuaciones cúbicas que no pueden ser expresadas mediante las reglas de Cardan, pueden serlo con tanta claridad o aún mayor del modo indicado.

Pues si, por ejemplo, se piensa conocer la raíz de la ecuación

$$z^3 = +pz + q,$$

puesto que se sabe que está compuesta de dos líneas, una de las cuales es el lado de un cubo cuyo contenido es $+ \frac{1}{2}q$, agregado al lado de un cuadrado cuya área es

$$\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3,$$

y la otra es el lado de otro cubo cuyo volumen es la diferencia entre $\frac{1}{2}q$ y el lado del cuadrado cuyo área es

$$\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3.$$

Todo esto es lo que podemos conocer mediante la regla de Cardan. No cabe duda de que podemos conocer el valor de la raíz de

$$z^3 = pz - q$$

considerándola inscrita en un círculo cuyo radio es $\sqrt{\frac{1}{3}}p$ y sabiendo que es la cuerda de un arco cuyo tri-

ple tiene por cuerda el valor $\frac{3q}{p}$. Estos mismos términos son menos engorrosos que los otros y, además, más breves si se desea usar algún signo particular para expresar estas cuerdas, tal como se hace con $\sqrt{C}$ para expresar el lado de los cubos.

Así mismo, es posible expresar las raíces de todas las ecuaciones bicuadráticas mediante las reglas expresadas. De modo que no conozco nada más que sea deseable en esta cuestión. La naturaleza de estas raíces no nos permite que las expresemos en términos más simples ni que se las determine por alguna construcción que sea no sólo más general, sino también más fácil.

Razones por las que los problemas sólidos no pueden ser contruidos sin las secciones cónicas y aquéllos cuya complejidad es mayor sin otras de complejidad creciente

Verdad es que aún no he dicho nada sobre las razones por las que me atrevo a afirmar que algo es o no posible. Pero, si nos percatamos de cómo mediante el método que utilizo todo cuanto es considerado por los geómetras se reduce a un mismo género de problemas, que consiste en buscar el valor de las raíces de alguna ecuación, se podrá juzgar correctamente que no es equivocado realizar una enumeración de todos los medios por los que pueden ser halladas de modo que sea suficiente para mostrar que se ha escogido el más general y el más simple. En particular y en relación con los problemas sólidos que he indicado que no pueden ser contruidos sin que se emplee alguna línea más compleja que la circular, es algo que también puede ser fácilmente cognoscible a partir de que éstos se reducen a dos tipos de construcciones: uno de ellos supone tener los dos puntos que determinan dos medias proporcionales entre dos líneas dadas; el otro, los dos puntos que dividen en tres partes iguales un arco dado. Pues, en tanto que la curvatura del círculo no depende sino de una simple relación de todas sus partes con el punto que ocupa el centro, no puede sernos de utilidad sino para determinar un solo punto entre dos extremos, o bien para hallar una media proporcional entre dos líneas rectas dadas, o para dividir en dos un arco dado. Por el contrario la curvatura de las secciones cónicas, dependiendo de dos factores diferentes, puede servir para determinar dos puntos diferentes.

A-T, VI, 476

Pero por esta misma razón es imposible que cualquiera de los problemas que son de grado superior a los sólidos y que presuponen la determinación de cuatro medias proporcionales o la división de un ángulo en cinco partes iguales, puedan ser contruidos por medio de alguna de las secciones cónicas. Por ello creo realizar

lo mejor si facilito una regla general para construirlos, empleando la línea curva que se describe por la intersección de una parábola y una línea recta de la forma ya explicada. Me atrevo a afirmar que no hay otra más simple en la naturaleza que pueda contribuir a tal efecto y se ha visto como sigue a las secciones cónicas en esta cuestión tan estudiada por los antiguos y cuya solución muestra por orden todas las líneas curvas que deben ser recibidas en Geometría.

Procedimiento general para construir todos los problemas reducidos a una ecuación no superior al grado sexto

Ya se conoce cómo cuando se buscan las cantidades que son requeridas para la construcción de estos problemas pueden siempre reducirse a alguna ecuación que no sea superior a las de quinto o sexto grado. También es conocido cómo aumentando el valor de las raíces en esta ecuación puede lograrse que todas lleguen a ser verdaderas; de este modo, que la cantidad conocida del tercer término sea mayor que el cuadrado de la mitad de la del segundo. Finalmente, si no es superior al quinto grado, puede ser modificada de modo que alcance el sexto grado, logrando que cada uno de sus términos estén consignados. Así, con el fin de que todas las dificultades de las que pueden surgir en esto, puedan ser resueltas recurriendo a una misma regla, deseo que todo esto sea realizado y que, por tal medio, se les reduzca siempre a una ecuación del tipo

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + u = 0$$

en la que q es mayor que el cuadrado de la mitad de la designada p .

Seguidamente prolónguese indefinidamente por ambos extremos la línea BK y trácese AB por B perpendicular a BK , siendo igual a $\frac{1}{2}p$; en un plano separado trácese la parábola CDF cuyo lado recto principal es

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{u}} + q - \frac{1}{4}p^2},$$

que será representado por n por razones de comodidad. Finalmente, es preciso situar el plano en que se encuentra la parábola sobre el que se han trazado las líneas AB

$$LH = \frac{t}{2n\sqrt{u}};$$

a continuación desde el punto H , así hallado, se traza formando ángulos rectos la línea HI del mismo lado en que se encuentra la curva ACN . Tomando

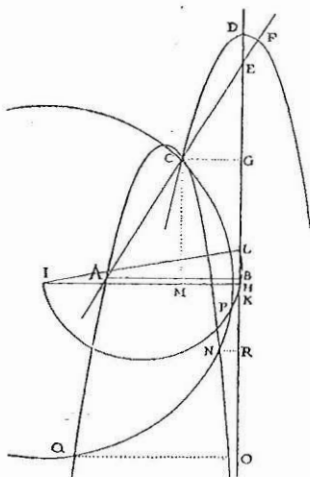
$$HI = \frac{r}{2n^2} + \frac{\sqrt{u}}{n^2} + \frac{pt}{4n^2\sqrt{u}},$$

que, para abreviar, podemos llamar $\frac{m}{n^2}$; uniendo los puntos L e I y describiendo el círculo LPI se tiene que LI es su diámetro e inscribiéndose la línea LP en este círculo, tenemos que es igual a

$$\sqrt{\frac{s+p\sqrt{u}}{n^2}}.$$

Finalmente, describáse el círculo PCN con centro en I y pasando por el punto P . Este círculo deberá cortar o ser tangente a la curva ACN en tantos puntos como raíces tenga la ecuación. De modo que las perpendiculares trazadas desde estos puntos sobre la línea BK tal como CG , NR , QO y semejantes, serán las raíces buscadas sin que exista excepción o fallo alguno dada la aplicación de esta regla. Pues si la cantidad s fuera tan grande, en proporción con las otras, p , q , r , t y u , que la línea LP fuera mayor que el diámetro del círculo IL , de modo que no pudiera inscribirse, en tal caso no habría ninguna raíz en esta ecuación que no fuese imaginaria; de igual modo sucedería si el círculo IP fuese tan pequeño que no cortase a ACN en punto alguno. Pero puede cortarla en seis puntos diferentes, pudiendo, en consecuencia, existir seis raíces diferentes en la ecuación. Cuando la corta en un número menor, esto testimonia que alguna de estas raíces son iguales entre sí o bien que no son sino imaginarias.

En el caso de que el procedimiento utilizado para trazar la línea ACN , mediante el movimiento de una parábola, pudiera parecer incómodo, es fácil hallar otros diversos medios para describirla. Así, teniendo las mismas cantidades que antes para AB y BL y también para BK , que había sido establecida como el lado recto de la parábola, debe describirse el semicírculo KST tomando el centro del mismo a discreción en la línea BK , de modo que corte en alguna parte la línea AB , tal



y BK , de modo que su eje, DE , se encuentre sobre la recta BK . Tomando la parte de este eje que está entre

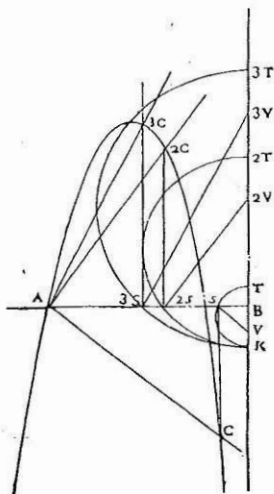
A-T, VI, 478

los puntos E y $D = \frac{2\sqrt{u}}{pn}$, es preciso situar sobre E una

regla de modo tal que conecte el punto E y el punto A del plano inferior. Tal regla debe permanecer conectando ambos puntos mientras asciende o desciende la parábola sobre la línea BK , sobre la que se ha aplicado el eje. Por este medio, la intersección de la parábola y de esta regla, que se dará en el punto C , describirá una línea curva como ACN que es de la que hemos de servirnos para la construcción del problema propuesto. Descrita de este modo, si se toma el punto L en la línea BK hacia el lado en que se encuentra el vértice de la parábola, y si

$$BL = DE = \frac{2\sqrt{u}}{pn};$$

seguidamente, si desde el punto L y hacia B se toma en la misma línea BK , la línea



como en el punto *S*; si desde el punto *T* en que termina, se toma hacia *K* la línea $TV = BL$ y, seguidamente, habiendo trazado la línea SV , se traza otra que sea paralela por el punto *A*, como AC ; y si se traza otra por el punto *S* que sea paralela a BK , tal como la línea SC ; en tal caso, el punto *C*, en el que se produce la intersección de AC y SC , tendremos uno de los puntos de la línea buscada. Podemos, siguiendo el mismo procedimiento, hallar cuantos deseemos.

La demostración de todo esto es bastante fácil. Pues aplicando la regla AE y la parábola FD de tal modo que pasen por el punto *C*, lo cual puede ser ya que el punto *C* se encuentra en la línea curva ACN que es descrita por la intersección de la parábola y la regla. Si $CG = y$, entonces tendremos que

$$GD = \frac{y^2}{n},$$

puesto que el lado recto, esto es n , es a CG como CG es a GD . Por tanto,

$$DE = \frac{2\sqrt{u}}{pn},$$

y restando DE de GD tendremos que

$$GE = \frac{y^2}{n} - \frac{2\sqrt{u}}{pn}.$$

Seguidamente y puesto que AB es a BE como CG es a GE , y puesto que $AB = \frac{1}{2}p$, tenemos que

$$BE = \frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{u}}{ny}.$$

De igual modo, suponiendo que el punto C de la curva ha sido hallado mediante la intersección de las líneas rectas SC , paralela a BK , y AC , paralela a SV ; sea, por otra parte, que $SB = CG = y$, y $BK = n$, el lado recto de la parábola. Entonces tendremos que

$$BT = \frac{y^2}{n}$$

puesto que KB es a BS como BS es a BT ; pero puesto que

$$TV = BL = \frac{2\sqrt{u}}{pn},$$

tenemos que

$$BV = \frac{y^2}{n} - \frac{2\sqrt{u}}{pn}.$$

Y como SB es a BV , así AB es a BE que, en consecuencia, es igual a

$$\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{u}}{ny}.$$

En consecuencia, obtenemos el mismo resultado que en el caso anterior, lo cual nos muestra que se trata de una misma curva la que es descrita de estas dos formas.

Después de esto, puesto que BL y DE son iguales, podemos concluir que también lo son DL y BE . En consecuencia, puesto que

$$LH = \frac{t}{2n\sqrt{n}}$$

$$GH = \frac{-y^3 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{ty}{2\sqrt{u}} - \sqrt{u}}{ny}.$$

En consecuencia, el cuadrado de GH es igual a

$$\frac{y^6 - py^5 + \left(\frac{1}{4}p^2 - \frac{t}{\sqrt{u}}\right)y^4 + \left(2\sqrt{u} + \frac{pt}{2\sqrt{u}}\right)y^3 + \left(\frac{t^2}{4u} - p\sqrt{u}\right)y^2 - ty + u}{n^2y^3}.$$

Si imaginamos que el punto C se encuentra en cualquier otro lugar de esta línea curva, tal como hacia N o hacia Q , tendremos siempre que el cuadrado de la línea recta situada entre el punto H y aquél en que indica la perpendicular trazada por C sobre BH , puede ser expresada en estos mismos términos y con los mismos signos «+» y «-».

Así, siendo

$$IH = \frac{m}{n^2} \quad \text{y} \quad LH = \frac{t}{2n\sqrt{u}},$$

tendremos que

$$IL = \sqrt{\frac{m^2}{n^4} + \frac{t^2}{4n^2u}},$$

puesto que el ángulo IHL es recto; por otra parte, puesto que

$$LP = \sqrt{\frac{s}{n^2} + \frac{p\sqrt{u}}{n^2}}$$

puede establecerse

$$IC = IP = \sqrt{\frac{m^2}{n^4} + \frac{t^2}{4n^2u} - \frac{s}{n^2} - \frac{p\sqrt{u}}{n^2}}$$

puesto que IPL es un ángulo recto.

Trazando CM perpendicular a IH , tendremos que IM es igual a $HI - HM$ y, por tanto, $IM = HI - CG$. Aplicando los valores establecidos tendríamos que

$$IM = \frac{m}{n^2} - y.$$

Por ello el cuadrado de IM sería igual a

$$\frac{m^2}{n^4} - \frac{2my}{n^2} + y^2.$$

Si sustraemos tal cantidad del cuadrado de IC , tendremos el cuadrado de CM , o

$$\frac{t^2}{4n^2u} - \frac{s^2}{n^2} - \frac{p\sqrt{u}}{n^2} + \frac{2my}{n^2} - y^2,$$

el cual es igual al cuadrado de GH , previamente hallado. A-T, VI, 483

O bien, dividiendo esta expresión, como en el otro caso, por n^2y^2 , tenemos

$$\frac{-n^2y^4 + 2my^3 - p\sqrt{u}y^2 - sy^2 + \frac{t^2}{4u}y^2}{n^2y^2}.$$

Seguidamente, estableciendo que

$$\frac{t}{\sqrt{u}}y^4 + qy^4 - \frac{1}{4}p^2y^4$$

para n^2y^4 , y

$$ry^3 + 2\sqrt{u}y^3 + \frac{pt}{2\sqrt{u}}y^3$$

para $2my^3$, y multiplicando ambos miembros por n^2y^2 , tenemos que

$$y^6 - py^5 + \left(\frac{1}{4}p^2 - \frac{t}{\sqrt{u}}\right)y^4 + \left(2\sqrt{u} + \frac{pt}{2\sqrt{u}}\right)y^3 + \\ + \left(\frac{t^2}{4u} - p\sqrt{u}\right)y^2 - ty + u$$

es igual a

$$\left(\frac{1}{4}p^2 - q - \frac{t}{\sqrt{u}}\right)y^4 + \left(r + 2\sqrt{u} + \frac{pt}{2\sqrt{u}}\right)y^3 + \\ + \left(\frac{t^2}{4u} - s - p\sqrt{u}\right)y^2;$$

es decir, tenemos que

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + u = 0.$$

De lo que resulta que las líneas CG , NR , QO y otras semejantes son las raíces de esta ecuación, lo cual constituía el objeto e interés de nuestra demostración.

Así, pues, si se desean calcular cuatro medias propor-

cionales entre las líneas a y b , habiendo establecido x para la primera, la ecuación es

$$x^5 - a^4b = 0$$

o

$$x^6 - a^4bx = 0.$$

A-T, VI, 484 Siendo $y - a = x$, tendríamos

$$y^6 - 6ay^5 + 15a^2y^4 - 20a^3y^3 + 15a^4y^2 - (6a^5 + a^4b)y + a^6 + a^5b = 0.$$

Por esto debemos tomar $AB = 3a$, y BK , el lado recto de la parábola debe ser

$$\sqrt{\frac{6a^3 + a^2b}{a^2 + ab}} + 6a^2$$

al cual he llamado n . Así mismo, DE o BL será:

$$\frac{2a}{3n} \sqrt{a^2 + ab}.$$

Describiendo la curva ACN de acuerdo con estos tres valores, tendremos que

$$LH = \frac{6a^3 + a^2b}{2n\sqrt{a^2 + ab}}$$

y

$$HI = \frac{10a^3}{n^2} + \frac{a^2}{n^2} \sqrt{a^2 + ab} + \frac{18a^4 + 3a^3b}{2n^2\sqrt{a^2 + ab}},$$

y finalmente que

$$LP = \sqrt{\frac{15a^4 + 6a^3\sqrt{a^2 + ab}}{n^2}}.$$

Así el círculo que con centro en I pase por el punto P , hallado de esta forma, cortará a la curva en los puntos C y N . Trazando perpendiculares desde estos puntos, NR y CG , tendremos que si restamos la menor, NR , de la mayor CG , obtendremos x , que será la primera de las cuatro medias proporcionales buscadas.

De igual modo y con facilidad puede dividirse un ángulo en cinco partes iguales, e inscribir una figura dentro de un círculo que posea 11 ó 13 lados iguales, o bien tratar otra infinidad de problemas.

Sin embargo, debe hacerse notar que en diversos casos, puede suceder que el círculo corte tan oblicua-

mente a la parábola de segundo género que el punto de intersección sea difícilmente determinable; en consecuencia, tal construcción no sería cómoda desde el punto de vista práctico. La dificultad puede ser fácilmente superable estableciendo otras reglas semejantes a ésta, lo cual puede realizarse de mil modos diferentes.

A-T, VI, 485

Pero no es mi propósito confeccionar un gran tratado, sino el analizar muchas cuestiones en pocas palabras. Así espero que será juzgado si se piensa que he reducido todos los problemas de un mismo género a un mismo tipo de construcción y, a la vez, he facilitado el procedimiento para reducirlos a una infinidad de otras; de este modo cada uno de ellos puede solucionarse de infinidad de formas; además, habiendo construido todos los que son planos, cortando una recta con un círculo, y todos los que son sólidos, cortando con un círculo una parábola, y, en fin, todos aquellos que son de un grado superior cortando un círculo por una curva de un grado superior a la parábola. De esta forma no es preciso sino seguir el mismo procedimiento para construir todos aquéllos cuya complejidad sea creciente. Pues en materia de progresiones matemáticas cuando se tienen los dos o tres primeros términos no es difícil hallar los otros. Espero que nuestros descendientes sabrán reconocerme no sólo las cuestiones que he explicado, sino también aquellas que he omitido voluntariamente con el fin de permitirles disfrutar del placer que produce su descubrimiento.

FIN

INDICE

DE LAS MATERIAS QUE CONTIENE LA GEOMETRIA

Libro Primero

SOBRE LOS PROBLEMAS QUE PUEDEN CONSTRUIRSE EMPLEANDO SOLAMENTE CIRCULOS Y LINEAS RECTAS

Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones geométricas (369).

Cómo se realizan en Geometría la multiplicación, la división, la extracción de la raíz cuadrada (369-370).

Cómo se usan las letras o cifras en Geometría (371).

Cómo se accede a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas (372-373).

Cuáles son los problemas planos y cómo se resuelven (374-375).

Ejemplo tomado de Pappus (377).

Respuesta al problema de Pappus (380-381).

Cómo deben establecerse los términos para acceder a la ecuación de este ejemplo (382-383).

Cómo se decide que este problema es plano cuando no se ha propuesto para más de cinco líneas (385-386).

Libro Segundo

SOBRE LA NATURALEZA DE LAS LINEAS CURVAS

Cuáles son las líneas curvas que pueden admitirse en Geometría (388).

Sobre la clasificación de todas las curvas en géneros y sobre la relación de sus puntos con los de las rectas (392).

Prosigue la explicación del problema de Pappus expuesta en el libro anterior (396).

Solución de este problema cuando se propone respecto de tres o cuatro líneas (397).

Demostración de lo que ha sido explicado (404).

Cuáles son los lugares planos y sólidos; forma de hallarlos (406).

Cuál es la primera y más simple de todas las líneas curvas utilizable en el problema de los antiguos cuando está propuesto para cinco líneas (407).

Sobre las líneas que se trazan hallando varios de sus puntos y que pueden ser admitidas en Geometría (411).

Cuáles son las que pueden trazarse utilizando una cuerda y que también pueden ser admitidas (412).

Que para hallar todas las propiedades de las líneas curvas, basta con conocer la relación que guardan sus puntos con

Cómo se puede sacar el segundo término de una ecuación (449).

Sobre el procedimiento para lograr que las raíces falsas pasen a ser verdaderas sin que suceda lo inverso (450).

Procedimiento para completar los diversos lugares de una ecuación (451).

Cómo se pueden multiplicar o dividir las raíces de una ecuación (452).

Sobre la reducción de los quebrados en una ecuación (452).

Procedimiento para establecer una igualdad entre la cantidad conocida de uno de los términos de la ecuación y otra cantidad dada (453).

Las raíces, verdaderas o falsas, pueden ser reales o imaginarias (453-454).

La reducción de las ecuaciones cúbicas cuando el problema es plano (454).

Sobre el modo de dividir una ecuación por un binomio que contiene su raíz (455).

Qué problemas son sólidos cuando la ecuación es cúbica (456-457).

Sobre la reducción de las ecuaciones con cuatro dimensiones cuando el problema es plano y cuáles son aquellos que son sólidos (457).

Ejemplo del uso de estas reducciones (461-462).

Regla general para reducir las ecuaciones que pasan el cuadrado del cuadrado (463-464).

Forma general de reducir todos los problemas sólidos en una ecuación de tercer o cuarto grado (464).

Sobre la determinación de las medias proporcionales (469).

Modo de dividir un ángulo en tres partes (470).

Sobre la reducción de los problemas sólidos a estas dos construcciones (471).

Forma de expresar el valor de todas las ecuaciones cúbicas y de todas las bicuadráticas (474).

Razones por las que los problemas sólidos no pueden ser contruidos sin las secciones cónicas y aquellos cuya complejidad es mayor sin otras de complejidad creciente (475).

Procedimiento general para construir todos los problemas reducidos a una ecuación no superior al grado sexto (476).

Sobre la invención de las cuatro medias proporcionales (483).

los de las rectas, y la forma de trazar otras líneas formando ángulos rectos (412).

Procedimiento general para hallar líneas rectas que corten las curvas dadas o sus contingentes formando ángulos rectos (413).

Ejemplo de esta operación en una elipse o en una parábola de segundo género (414-415).

Ejemplos respecto de un óvalo de segundo género (415-416).

Ejemplo de la construcción de este problema en la conoide (423).

Explicación de cuatro nuevos géneros de óvalos de utilidad en la óptica (424).

Sus propiedades en relación con las reflexiones y refracciones (429).

Su demostración (431).

Cómo se puede construir una lente tan cóncava o convexa en una de sus caras como se desee, y que sea capaz de reunir en un punto dado los rayos procedentes de un punto dado (435).

Cómo se puede elaborar una lente que produzca el mismo efecto, que la precedente, guardando la convexidad de una de sus caras una proporción dada con la otra (437).

Aplicación de lo expuesto sobre las líneas curvas trazadas sobre una superficie plana a las que se describen en un espacio que tiene tres dimensiones o bien sobre una superficie curva (440).

Libro Tercero

SOBRE LA CONSTRUCCION DE PROBLEMAS SOLIDOS O MAS QUE SOLIDOS

Cuáles son las líneas curvas de que podemos servirnos en la construcción de cada problema (441-442).

Ejemplo relacionado con la determinación de diversas medias proporcionales (442-443).

Sobre la naturaleza de las ecuaciones (444).

Sobre el número de raíces en cada ecuación (444-445).

Cuáles son las raíces falsas (445).

Sobre la reducción del número de dimensiones de una ecuación cuando se conoce alguna de sus raíces (445).

Cómo puede examinarse si una cantidad dada es el valor de una raíz (445).

Cuántas raíces verdaderas pueden darse en cada ecuación (446).

Cómo en una ecuación pueden convertirse las raíces falsas en verdaderas y a la inversa (446).

Cómo pueden aumentarse o disminuirse las raíces de una ecuación sin conocerlas (447).

Aumentando las raíces verdaderas disminuyen las falsas, y a la inversa (448).

NOTAS A LA GEOMETRIA

¹ Esta observación no aparece generalmente recogida en ediciones actuales, v.gr. en las de Olscamp o la de Smith. No obstante, estimamos que es importante, pues, evidencia que Descartes era consciente de las dificultades que podía plantear su lectura. Tales dificultades se veían aumentadas al no facilitar los pasos intermedios de sus demostraciones bien por evitar «pérdida de tiempo», bien por evitar críticas (A-T, II, 30, 18/22). Ciertamente la labor de reproducir las razones de todos y cada uno de los pasos de este tratado supondría multiplicar por cuatro su volumen. Tal fue, por ejemplo, la tarea realizada por Schooten. En su edición de la Geometría reproduce al margen diversas letras que vienen a ser otras tantas notas. En los correspondientes lugares realiza el comentario al texto de Descartes y a la vez introduce una serie de problemas con sus resoluciones y planteamientos. Tales comentarios se realizan desde la página 107 hasta la página 520. Ejemplares de esta edición se encuentran en la Biblioteca Nacional de Madrid y en la Biblioteca Universitaria de Valencia, si bien el estado de conservación de este último ejemplar es lastimoso por cuanto no existe servicio de restauración en la referida biblioteca. La

⁸ Las magnitudes a , $a+b$, $a \cdot b$, etc., pueden representarse mediante una longitud. De igual modo acontece con expresiones del tipo a^2 , a^3 , a^n . Para Descartes, al generalizar la noción de dimensión, al prescindir del obstáculo que para los antiguos representaba («nada hay que no esté comprendido bajo más de tres dimensiones...»), es posible superar su tratamiento.

⁹ Descartes no utiliza el signo «=». Por razones de adaptación a la asignatura actual no respetaremos tal signo «=».

¹⁰ Entiéndase «incógnitas».

¹¹ Las dos condiciones fundamentales del método analítico, considerar efectuada la solución y considerar las relaciones entre las líneas, han sido dadas. La segunda hace posible el establecimiento de ecuaciones. El estadio analítico del método se complementa con la síntesis algebraica. La construcción sintética se funda en la analítica.

El análisis y el álgebra están ordenados al conocimiento de figuras. En la geometría analítica, pues, deben traducirse los datos geométricos de modo que sean tratables por medio del cálculo algebraico; asimismo debe concluirse el problema de álgebra y, finalmente, los resultados obtenidos mediante el cálculo algebraico deben ser traducidos al lenguaje geométrico.

¹² Como se deduce del libro II de *La Geometría*, existe relación entre los problemas de construcción y los de clasificación. En el presente lugar relaciona claramente un tipo determinado de expresiones algebraicas con los instrumentos que permiten trazar determinadas construcciones: línea (regla) y círculo (compás).

¹³ Va a iniciar el estudio de los diferentes tipos de ecuaciones de segundo grado. Estudia tres casos:

1.º Aquél en el que los coeficientes tienen valor positivo (son magnitudes positivas).

2.º Aquel en el que uno de los coeficientes tiene valor negativo y el segundo positivo.

3.º Aquél en el que el segundo de los coeficientes tiene valor negativo y el primero positivo.

¹⁴ De acuerdo con la figura trazada se establece inicialmente que $ON = NL$ (ambos son radios del círculo con centro en N).

Indica Descartes que el valor de $Z = OM$; en virtud del teorema de Pitágoras, tenemos que

$$OM = \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + b^2}.$$

Por tanto, OM^2 será igual a

$$\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} a^2 + b^2 + a \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + b^2}.$$

Simplificando el valor de az será igual a:

$$\frac{1}{2} a^2 + a \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + b^2}.$$

propia estructura de la edición Schooten hace inviable su inclusión dentro del presente volumen.

Para el lector de nuestros días que se haya formado dentro del tradicional olvido de la Geometría siguen siendo válidas estas apreciaciones y las que Descartes comunicó en carta a Pempius: sus lectores deben ser «valde laboriosos, ingeniosos et attentos» (A-T, I, 411, 12/20). Siempre y cuando no sea necesario un gran desarrollo algebraico, trataremos de facilitar en notas el proceso deductivo que sigue Descartes.

² El lector de *La Geometría* puede recordar algunas reglas (R, XVIII) en las que se refiere a alguna de estas cuestiones. Sin embargo, es claro que no estaba en posesión del tratamiento de la geometría analítica, pues, por ejemplo, en la mencionada R, XVIII aún figura mediante la superficie de un triángulo el producto de dos factores. Sobre la progresión de *La Geometría* en relación con algunas partes de *Las Reglas para la dirección de la mente*, véase el estudio de P. Bourtroux (*L'imagination et les mathématiques selon Descartes*. París, 1900, pp. 43 y ss.).

³ En éste como en la generalidad de los casos se razona a partir de la semejanza de triángulos, estableciendo las proporciones correspondientes. Así, trazada tal paralela, cabe afirmar:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BE}.$$

Considerando que BA es la unidad, tenemos que $BE = BC \cdot BD$.

⁴ De igual modo tendríamos:

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BD}; \quad \frac{BC}{BA} = \frac{BE}{BD}.$$

Por tanto,

$$BC = \frac{BE}{BD}.$$

⁵ El triángulo GIH es semejante a FGI . Por tanto,

$$\frac{GI}{GH} = \frac{GF}{GI}.$$

Dado que $GI \cdot GI = GF \cdot GH$, y que $GF = 1$, tenemos que $GI \cdot GI = GH$. En consecuencia, $GI = \sqrt{GH}$.

⁶ Las anotaciones y símbolos fueron objeto de una importante simplificación por parte de Descartes. Como se deducirá de la lectura de la geometría adopta x, y, z , para las cantidades desconocidas; a, b, c , para las cantidades conocidas.

⁷ Se trata de raíz cúbica. El equivalente en notación de nuestros días sería $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$.

Al igual que Descartes en la traducción respetaremos expresiones del tipo aa, bb ; en otros casos a^2, b^2 . Optamos por esta última forma cuando son más complejas las expresiones.

Por tanto,

$$az + b^2 = \frac{1}{2} a^2 + a \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + b^2}.$$

¹⁵ Es decir, hipotenusa.

¹⁶ El desarrollo total sería el siguiente:

$$z^2 = az - b^2.$$

$$z^2 - az + b^2 = 0.$$

Si, pues,

$$\left(z - \frac{1}{2} a\right)^2 = z^2 + \frac{a^2}{4} - az,$$

entonces podemos obtener que

$$\left(z - \frac{1}{2} a\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b^2 = 0.$$

Y,

$$\left(z - \frac{1}{2} a\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b^2$$

Cuando $b^2 > \frac{a^2}{4}$, entonces carece de solución. En consecuencia, puede establecerse que

$$z - \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2};$$

por tanto:

$$z = \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

$$z = \frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}.$$

Por lo que se refiere a la construcción trazada en el correspondiente gráfico, es claro que $NL = \frac{1}{2} a$, tal como se indica.

Por tanto, para hallar el valor de $z = MQ$, sólo tendríamos que trazar por N una perpendicular sobre MR que, sería paralela a LM y alcanzaría a MR en el punto O . En consecuencia, tendríamos que $z = MO - QO$.

Por otra parte, si unimos los puntos Q y N formamos el triángulo rectángulo QNO . Tendríamos que como NQ es igual a NL , pues ambos son radios, entonces $NQ = \frac{1}{2} a$. Por el teorema de Pitágoras, tendríamos que

$$\left(\frac{1}{2} a\right)^2 = b^2 + m^2.$$

Por ello, podemos establecer que

$$\frac{1}{4}a^2 - b^2 = m^2.$$

Y, por tanto, puede establecerse que

$$\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} = m.$$

Como $MQ = z = (MO - QO)$, y tenemos que $MO = \frac{1}{2}a$, entonces, sustituyendo valores, tenemos que

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

Conocido esto tenemos que OR , en virtud del teorema de Pitágoras, es igual a

$$\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

Como $MR = MQ + QO + OR$, con sólo sustituir los valores tendríamos que

$$MR = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} + \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2};$$

Por tanto,

$$MR = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

¹⁷ Pappus vivió hacia el 300 d.C., destacando por la gran compilación que realizó y que fue dada a conocer por Commandinus a los escolásticos. En carta a Golius (Amsterdam, enero de 1632) Descartes ya se refiere al problema de Pappus y, a su vez, facilita la razón por la que excluye de la geometría algunas líneas. Esta cuestión la analizaría en el libro II (A-T, I, 232).

¹⁸ Se inicia la exposición de los datos del problema.

¹⁹ Elipse, parábola e hipérbola.

²⁰ Se refiere a que nada está comprendido bajo más de tres dimensiones.

²¹ Segmentos de líneas rectas.

²² Esto es, el producto de estos dos segmentos.

²³ Esto es, el producto de los tres segmentos.

²⁴ La geometría antigua solamente permitía explicar el caso en que el problema se refería a tres o cuatro líneas. La geometría cartesiana al adoptar el método analítico de las proporciones hace posible la generalización de tal problema.

Tal método es al que se refería cuando indicaba a Mersenne que en su Geometría «...estimaba dar una demostración de que

³¹ A partir de que

$$\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c},$$

tenemos que

$$CD = \frac{CR \cdot c}{z} = \frac{c}{z} \left(y + \frac{bx}{z} \right) = \frac{c}{z} y + \frac{bc}{z^2} x.$$

³² Es claro que si $EA=k$ y A es un punto de la línea EB , entonces $BE=k+x$.

³³ Puesto que los ángulos del triángulo ESB son dados, puede establecerse que

$$\frac{BE}{BS} = \frac{z}{d}$$

o también que

$$\frac{k+x}{BS} = \frac{z}{d}.$$

En consecuencia, operando obtenemos que

$$BS = \frac{(k+x)d}{z}$$

y puesto que $CS=BS+BC$, sustituyendo tenemos que

$$CS = \frac{(k+x)d}{z} + y.$$

De aquí tenemos que

$$CS = \frac{zy + dk + dx}{z}.$$

³⁴

$$\frac{CS}{CF} = \frac{z}{e}.$$

³⁵ A partir de la proporción anterior tenemos que

$$CF = \frac{CSe}{z}.$$

Por ello, tenemos que

$$CF = \frac{e}{z} \left(\frac{zy + dk + dx}{z^2} \right).$$

A partir de aquí se obtiene que

$$CF = \frac{e}{z} y + \frac{de}{z^2} \times \frac{dek}{z^2}.$$

³⁶

$$\frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}; \quad BT = \frac{BG \cdot f}{z}.$$

mi método es mejor que el ordinario» (A-T, I, 340, 10/11). Según hemos indicado en la introducción a esta edición tal método equivale a un procedimiento de análisis cuya claridad, simplicidad y alcance explicativo-resolutivo le hacen sobresalir sobre el procedimiento seguido desde la antigüedad (establecer ecuaciones que relacionen las áreas dadas con las buscadas o deseadas).

²⁵ Evitar la confusión y favorecer la claridad es una de las cualidades que Descartes destaca como propias de su método. Desde la comprensión de tal procedimiento debe valorarse la crítica que Descartes dirige a la geometría de los antiguos, cuya confusión y oscuridad le llevaron a pensar en la necesidad de buscar «...otro método que estuviese libre de tales defectos» (A-T, VI, 18, 1/8). El método cuya práctica ilustrará a partir de este momento supone que las cantidades geométricas constituyen ilustraciones de las algebraicas que forman las ecuaciones.

²⁶ Se trata de los ejes.

²⁷ Para comprender el razonamiento cuyo inicio se está dando debe considerarse que:

ARB , dado por suposición;

CBA , dado por suposición;

RBA , conocido por ser suplementario;

$RAB = 180 - (ABR + ARB)$.

Por otra parte, tenemos que

$$\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b},$$

y de acuerdo con el supuesto establecido que

$$\frac{x}{BR} = \frac{z}{b}.$$

Aplicando que el producto de medios es igual al producto de extremos, tenemos que $xb = BR \cdot z$. En consecuencia, se podrá establecer que

$$28 \quad \begin{aligned} BR &= \frac{bx}{z}, \\ \frac{x}{BR} &= \frac{z}{b}; \quad BR = \frac{bx}{z}. \end{aligned}$$

²⁹ Considerando que $CR = BR + BC$, tenemos que

$$CR = y + \frac{bx}{z}.$$

³⁰ Esto es: los ángulos del triángulo DRC son dos, y por tanto,

$$\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}.$$

Considerando el valor de BG , tenemos que

$$BT = \frac{f}{z}(l-x).$$

Como $CT = BC + BT$, tendremos que

$$CT = y + \frac{fl}{z} - \frac{fx}{z}.$$

Pero como los ángulos del triángulo TCH son dados, también es posible establecer que

$$\frac{CT}{CH} = \frac{z}{g}.$$

En consecuencia,

$$CH = \frac{CT \cdot g}{z};$$

sustituyendo el valor de CT , tenemos que

$$CH = \frac{g}{z} \left(y + \frac{fl}{z} - \frac{fx}{z} \right),$$

de donde tenemos que

$$CH = \frac{g}{z} y - \frac{fg}{z^2} x + \frac{fgl}{z^2}$$

³⁷ Segundo grado.

³⁸ No superior al cuarto grado.

³⁹ No superior al sexto grado.

⁴⁰ Por contraposición con éstas, Descartes habla de las líneas complejas o compuestas en la medida en que su trazado mecánico se aparta de la regla y el compás. Más adelante explicará el instrumento que facilita el trazado de algunas curvas.

⁴¹ Tal es la condición para que sean introducidas en la geometría las curvas.

⁴² Véase su tratamiento en J. Vuillemin, *ob. cit.*, pp. 146 y ss. Para Descartes, aunque los antiguos hubiesen estudiado estas líneas, no deberán incluirse por cuanto su descripción requiere dos movimientos que carecen de relación mensurable y, en consecuencia, no serían representables mediante funciones algebraicas. Bourbaki reconoce a Descartes haber establecido la distinción entre funciones algebraicas y funciones trascendentes, paralela a la establecida entre curvas «geométricas» y las «mecánicas» (*Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid, 1976, p. 106).

⁴³ Las construcciones que permite este instrumento facilitan la obtención de las ecuaciones de diversas curvas. En el caso de la primera (AD) su ecuación sería $x^4 = a^2(x^2 + y^2)$. Para obtener tal ecuación basta con considerar las líneas que describe el punto $B(AB)$ y el punto $D(AD)$ al abrirse el ángulo XYZ .

Entonces tomamos que $YA=YB=a$; que $YC=x$, que $CD=y$ y que $YD=z$. Es claro que los triángulos YBC y el YCD son semejantes y que, por tanto, puede establecerse que

$$\frac{YF}{YC} = \frac{YC}{YB}$$

es decir, que

$$\frac{z}{x} = \frac{x}{a}.$$

Operando algebraicamente obtenemos que

$$z = \frac{x^2}{a}.$$

El teorema de Pitágoras permite afirmar que $YD^2 = YC^2 + CD^2$. Sustituyendo, de acuerdo con las igualdades establecidas inicialmente, tenemos que $z^2 = x^2 + y^2$. Dado el valor de z , tenemos que

$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = x^2 + y^2.$$

La ecuación, pues, será $x^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

En segundo lugar puede determinarse analíticamente la curva AF . Para ello $YA=YB=a$, $YE=x$, $EF=y$, $YF=z$. De nuevo la semejanza de triángulos permite establecer que

$$\frac{YE}{YF} = \frac{YE}{YD}.$$

o según las igualdades iniciales que

$$\frac{z}{x} = \frac{x}{YD}.$$

El valor de YD tendremos que es igual a

$$\frac{x^2}{z}.$$

A su vez los triángulos YDE e YCD son semejantes y, por tanto, tenemos que

$$\frac{YE}{YD} = \frac{YD}{YC};$$

así pues,

$$YC = \frac{YD^2}{YE} = \frac{x^4}{z^2 x} = \frac{x^3}{z^2},$$

También podemos establecer que

$$\frac{YD}{YC} = \frac{YC}{A}$$

Estas simples operaciones han de suponerse en la mayor parte de los casos. Así

$$BL = BK - KL; \quad BL = \frac{by}{c} - b.$$

En el caso de

$$AL = x + \frac{by}{c} - b.$$

Descartes afirma, finalmente, que $GA \cdot BL = AL \cdot CB$; efectuando la oportuna sustitución se obtiene que

$$\frac{aby}{c} - ba = yx + \frac{by^2}{c} - by.$$

Tal igualdad puede establecerse del modo siguiente:

$$\frac{by^2}{c} + yx - by - \frac{aby}{c} + ba = 0;$$

en consecuencia, puede establecerse que

$$by^2 + ycx - bcy - aby + bac = 0;$$

expresión que permite establecer que

$$y^2 + \frac{cyx}{b} - cy - ay + ca = 0;$$

por ello, puede afirmarse que

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

⁴⁹ Equivale a afirmar que aquéllas cuyas ecuaciones son de sexto grado en el mismo género que aquéllas cuya ecuación son de quinto. De modo semejante en otros casos. Como indica Descartes la razón reside en que existe una regla en virtud de la cual es posible efectuar tal reducción. Es, en virtud de la mayor o menor potencia de la ecuación como se clasifican las curvas.

^{49bis} Un estudio de la Concorde, atribuida a Nicomedes, en Vuillemin, ob. cit., p. 148 ss.

⁵⁰ Esto es, en lenguaje de Descartes no alcanza sino al cuadrado.

^{50bis} Ver en la edc. de Schooten, p. 206.

⁵¹ Obtenido algebraicamente el valor de BC , su longitud será establecida geométricamente.

⁵² Esto es, $m^2 + ox$.

⁵³ Esto es, $+m^2 - ox$.

⁵⁴ Esto es, $-m^2 + ox$.

⁵⁵ El procedimiento de construcción no permite determinar la naturaleza de una curva, pero no debe ser rechazado. El lector de *La Dióptrica* (D.X) ha podido comprobar la utilidad de tal tipo de construcciones.

y que

$$YC^2 = \left(\frac{x^3}{z^2}\right)^2 = \frac{x^2}{z} a.$$

Obtenemos de este modo que

$$z^3 = \frac{x^4}{a}$$

y, en consecuencia, que

$$z = \sqrt[3]{\frac{x^4}{a}}$$

De nuevo en el triángulo YFE tenemos que es rectángulo y en base al teorema de Pitágoras, tenemos que $z^2 = y^2 + x^2$. La ecuación de la curva AF será, pues,

$$\frac{x^8}{a^2} = xx + y^2,$$

lo cual nos lleva a $x^8 = a^2(x^2 + y^2)^3$.

De igual modo podría calcularse la ecuación de AH . Se vería que su complejidad es creciente respecto de la segunda, como ésta lo era respecto de la primera. La mayor composición o complejidad no es razón para excluirlas de la Geometría como tampoco lo es el medio que se ha utilizado para su construcción.

⁴⁴ En consecuencia, no admite la oposición trazada por los griegos, reteniendo como válida y legítima la construcción mecánica, cuya utilidad tratará de mostrar.

⁴⁵ De este modo hace explícito el criterio con el que complementa la conclusión del párrafo anterior.

⁴⁶ Esto es, al producto.

⁴⁷ En la traducción alternamos la expresión del texto con las utilizadas por Descartes. En este caso podría decirse «cuando las dos magnitudes o una de ellas alcanza la tercera o cuarta dimensión».

⁴⁸ Al igual que en la nota anterior podríamos indicar siguiendo la terminología de Descartes, que «contiene la quinta o sexta dimensión».

^{48 bis} Según Descartes, que se funda para establecer relaciones en el teorema relacionado con la semejanza de triángulos, tendríamos que

$$\frac{NL}{KL} = \frac{CB}{KB};$$

de acuerdo con la signatura adoptada por Descartes, tendríamos que

$$\frac{e}{b} = \frac{y}{KB};$$

de aquí tendríamos que $c \cdot KB = b \cdot y$; de donde

$$KB = \frac{yb}{c}.$$

⁵⁶ En el caso anterior se trata de las normales y en éste de las tangentes.

⁵⁷ $PM = PA \cdot MA$; $PM = v - y$.

⁵⁸ Por ser PMC un triángulo rectángulo, tenemos que $PC^2 = MC^2 + MP^2$. De acuerdo con las igualdades establecidas: $s^2 = x^2 + (v - y)^2$. Operando tenemos que $s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2$. De igual modo tendríamos que $x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$.

⁵⁹ Pero como $(v - y)^2 = s^2 - x^2$, obtenemos que $y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$. En consecuencia, sustituyendo estos valores de x e y en la ecuación podrá obtenerse la normal. Una vez que se ha determinado el punto C y que son conocidos x e y puede obtenerse v y s .

⁶⁰ Véase en A-T, VI, 393 ss.

⁶¹ La ecuación de la normal, determinado C , permitirá que mediante x e y se pueda calcular el valor tanto de V como de s . Si P no se encuentra en el lugar requerido para la ecuación de la normal, entonces el círculo con centro en P y radio PC cortará necesariamente a la línea CE en otro punto.

⁶² Sobre las diferencias con Fermat a este respecto, véase en Vuillemin, *ob. cit.*, pp. 59 ss.

^{62bis} Aducimos esta expresión equivalente a la dada por Descartes:

$$GP = b \frac{-bcd^2 + bcde - bd^2z - ce^2z}{bde + cd^2 + d^2z - e^2z}.$$

⁶³ El libro posee un esquema claro y progresivo: en la primera parte se refiere a una serie de consideraciones generales sobre las ecuaciones; llama la atención el orden y claridad de su exposición lograda en base a la gradual respuesta que va facilitando de cuestiones diversas, v.gr. ofrecida la definición de ecuación procede a facilitar «algunas reglas» que integran y conforman el alcance operativo de su método; aplicando tales reglas podemos conocer el número de raíces de una ecuación, distinguir las raíces verdaderas de las falsas, discernir si una cantidad dada constituye el valor de una raíz, determinar cuántas raíces verdaderas pueden darse en una ecuación, etc. La concreción de estas reglas se contraponen a la vaga generalidad de los preceptos formulados en la segunda parte de *El Discurso del Método*. Por ello su comprensión es más problemática, como advierte al inicio de *La Geometría*, pero es la que permitirá decidir sobre su método a la vez que dirigirá adecuadamente nuestra razón al operar en este campo de problemas, evitando los errores y alcanzando la mayor simplicidad posible: en la segunda parte trata la correspondencia de las ecuaciones y problemas planos; en la tercera, ya analiza las cuestiones referentes a los sólidos.

⁶⁴ La geometría analítica tiene para las raíces negativas, situándolas a la izquierda de la intersección de las coordenadas, una ilustración de la que carecían los antiguos estudiosos del álgebra. Tal aportación del álgebra a la geometría trajo

entre otras esta aportación, adecuadamente valorada en su época. (Véase en Vuillemin, *ob. cit.*, p. 129, n. 6.)

⁶⁵ Vuillemin (*ob. cit.*) comenta en la nota VII (pp. 154-159) la resolución de la ecuación de tercer grado en base a los ejemplos, literal y numérico, que Descartes aduce y desarrollará en estas páginas (A-T, 455-456). El desarrollo de estas cuestiones justifica afirmaciones vertidas por Descartes en el libro II al tratar la clasificación de las curvas en géneros. Por otra parte, como indica Vuillemin, «el procedimiento de la división por un binomio no es sino un artificio secundario, cuya razón de ser está fundada en el método de las indeterminadas» (*ob. cit.*, p. 157).

⁶⁶ La ecuación la hemos presentado con los signos correspondientes, aunque hemos recogido la traducción del texto. El lector comprenderá que la ecuación era presentada del modo siguiente:

$$x^4 \cdot pxx \cdot qx \cdot r = 0.$$

^{66bis} Véase en A-T, VI, 449.

⁶⁷ Descartes inicia la exposición de la construcción que cumple

$$x = \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{4} c^2} - \sqrt{\frac{1}{4} c^2 - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 + c^2}},$$

a la vez que son dados el cuadrado de lado BD y BN . Sería preciso sobre la prolongación del lado opuesto a BD , esto es AC , hallar un punto E tal que uniéndolo con B diera lugar a un segmento al ser cortado por CD que fuese igual a BN , esto es, que $FE = BN$. Utilizando solamente la regla y el compás, podríamos unir N y D ; trazando con tal radio (ND) y con centro en D a NG , tendríamos que $ND = DG$. Si trazamos una circunferencia con el diámetro BG , veríamos que cortarfa la prolongación del lado AC en el punto E , que sería el punto buscado.

Considérese que el ángulo BEG , es recto y que $DN = DG$; en consecuencia, puesto que DN es la hipotenusa del triángulo DBN , tendríamos que $DN^2 = DG^2 = NB^2 + BD^2$. Por otra parte, dado que ECF y EHG son semejantes podemos establecer que

$$\frac{CF}{HG} = \frac{CE}{EH}$$

y, en consecuencia, que $CF \cdot EH = HG \cdot CE$; por tanto,

$$HG = \frac{CF \cdot EH}{CE}.$$

De igual modo, basándose en la semejanza de los triángulos ECF y BDF tenemos que

$$\frac{CF}{FD} = \frac{CE}{BD}$$

y como $BD = CD = EH$, se establece en base al desarrollo de ambas igualdades que

$$CE = \frac{CF \cdot BD}{FD} = \frac{CF \cdot BD}{HG} \quad \text{y que } HG = FD.$$

Por ello, pueden establecer las siguientes equivalencias:

$$DG^2 = (DH + HG)^2 = (CE + HG)^2 = CE^2 + HG^2 + 2CE \cdot HG =$$

$$CE^2 + HG^2 + 2CE \cdot \frac{CF \cdot EH}{CE} = CE^2 + FD^2 + 2CF \cdot CO =$$

$$CE^2 + (CD - CF)^2 + 2CF \cdot CD = (CE^2 + CF^2) + CD^2 = FE^2 + CD^2.$$

En base al desarrollo y comparación de estas igualdades se ha obtenido que $FE = BN$. Para establecer la correspondencia analítica de tal construcción si $DF = x$ y $BD = a$, tendríamos:

$$CF = a - x;$$

como

$$\frac{CF}{FE} = \frac{FD}{BF}, \quad \text{o} \quad \frac{a - x}{c} = \frac{x}{BF}.$$

Por tanto,

$$BF = \frac{cx}{a - x}.$$

A su vez como $BF^2 = x^2 + a^2$ y $x^2 + a^2 = \frac{c^2 x^2}{x^2 - 2ax - a^2}$; si se multiplican ambos miembros por

$x^2 - 2ax + a^2$
se obtendría

$$x^4 - 2ax^2 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3xa^4 = 0.$$

Por tanto tendríamos que

$$DF = x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2} - \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4}a^2} + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}$$

Descartes varia de incógnita. El análisis lo continúa y comenta Vuillemin, *ob. cit.*, p. 167 ss.

The Project Gutenberg EBook of La géométrie, by René Descartes

This eBook is for the use of anyone anywhere at no cost and with almost no restrictions whatsoever. You may copy it, give it away or re-use it under the terms of the Project Gutenberg License included with this eBook or online at www.gutenberg.org

Title: La géométrie

Author: René Descartes

Editor: A Hermann

Release Date: August 23, 2008 [EBook #26400]

Language: French

Character set encoding: ISO-8859-1

*** START OF THIS PROJECT GUTENBERG EBOOK LA GÉOMÉTRIE ***

Produced by K.F. Greiner, Joshua Hutchinson, Keith Edkins and the Online Distributed Proofreading Team at <http://www.pgdp.net> (This file was produced from images generously made available by Cornell University Digital Collections)

LA
G É O M É T R I E

DE
RENÉ DESCARTES

NOUVELLE ÉDITION

PARIS
A. HERMANN, LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE

8-rue de la Sorbonne-8

MDCCCLXXXVI

AVERTISSEMENT

Peu de livres ont autant contribué que la Géométrie de Descartes au progrès des sciences Mathématiques. Aussi croyons-nous rendre service à la science en en publiant une nouvelle édition. Nous avons d'ailleurs été encouragé dans cette voie par plusieurs savants, et particulièrement par l'un de nos philosophes les plus distingués, M. de Blignières, gendre de l'illustre Liouville, qui a bien voulu contribuer pour une part importante aux frais d'impression.

A. H.

LA GÉOMÉTRIE⁽¹⁾

LIVRE PREMIER

DES PROBLÈMES QU'ON PEUT CONSTRUIRE SANS Y EMPLOYER QUE DES CERCLES ET DES LIGNES DROITES.

Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.

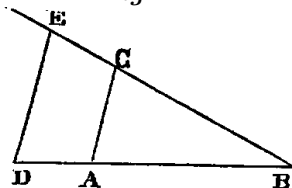
Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division; ou enfin trouver une ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

Soit, par exemple, AB (*fig. 1*) l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC , je n'ai qu'à joindre les points A et C , puis tirer DE parallèle à CA , et BE est

Comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie.

La multiplication.

Fig. 1.



le produit de cette multiplication.

⁽¹⁾Pour en faciliter la lecture, nous avons substitué à quelques signes employés par Descartes d'autres signes universellement adoptés, toutes les fois que ces changements n'en apportent pas dans le *principe* de la notation. Le lecteur en sera prévenu.

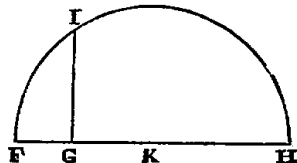
Ou bien, s'il faut diviser BE par BD , ayant joint les points E et D , je tire AC parallèle à DE , et BC est le produit de cette division.

La division.

Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH (fig. 2), je lui ajoute en ligne droite

L'extraction de la racine carrée.

Fig. 2.



FG , qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K , du centre K je tire le cercle FIH , puis élevant du point G une ligne droite jusques à I à angles droits sur FH , c'est GI la racine cherchée. Je ne dis rien ici de la racine cubique, ni des autres, à cause que j'en parlerai plus commodément ci-après.

Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule. Comme pour ajouter la ligne BD à GH , je nomme l'une a et l'autre b , et écris $a + b$; et $a - b$ pour soustraire b de a ; et ab pour les multiplier l'une par l'autre; et $\frac{a}{b}$ pour diviser a par b ; et aa ou a^2 pour multiplier a par soi-même⁽²⁾; et a^3 pour le multiplier encore une fois par a , et ainsi à l'infini; et $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine carrée de $a^2 + b^2$; et $\sqrt[3]{C \cdot a^3 - b^3 + ab^2}$, pour tirer la racine cubique de $a^3 - b^3 + ab^2$, et ainsi des autres.

Comment on peut user de chiffres en géométrie.

Où il est à remarquer que par a^2 , ou b^3 , ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me servir des noms usités en l'algèbre je les nomme des carrés ou des cubes, etc.

Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne se doivent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre, lorsque l'unité n'est point déterminée en la question, comme ici a^3 en contient autant que ab^2 or b^3 dont se compose la ligne que j'ai nommée

$$\sqrt{C \cdot a^3 - b^3 + ab^2};$$

mais que ce n'est pas de même lorsque l'unité est déterminée, à cause qu'elle peut être sous-entendue partout où il y a trop ou trop peu de dimensions : comme s'il faut tirer la racine cubique de $a^2b^2 - b$, il faut penser que la quantité a^2b^2 est divisée une fois par l'unité, et que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la même.

Au reste, afin de ne pas manquer à se souvenir des noms de ces lignes, il en faut toujours faire un registre séparé à mesure qu'on les pose ou qu'on les change, écrivant par exemple⁽³⁾ :

$AB = 1$, c'est-à-dire AB égal à 1.

⁽²⁾Cependant Descartes répète presque toujours les facteurs égaux lorsqu'ils ne sont qu'au nombre de deux. Nous avons ici constamment adopté la notation a^2 .

⁽³⁾Nous substituons partout le signe $=$ au signe ∞ dont se servoit Descartes.

$$GH = a.$$

$$BD = b, \text{ etc.}$$

Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons, ce qui se nomme une équation ; car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles équations qu'on a supposé de lignes qui étoient inconnues. Ou bien, s'il ne s'en trouve pas tant, et que nonobstant on n'omette rien de ce qui est désiré en la question, cela témoigne qu'elle n'est pas entièrement déterminée. Et lors on peut prendre à discrétion des lignes connues pour toutes les inconnues auxquelles ne correspond aucune équation. Après cela, s'il en reste encore plusieurs, il se faut servir par ordre de chacune des équations qui restent aussi, soit en la considérant toute seule, soit en la comparant avec les autres, pour expliquer chacune de ces lignes inconnues, et faire ainsi, en les démêlant, qu'il n'en demeure qu'une seule égale à quelque autre qui soit connue, ou bien dont le carré, ou le cube, ou le carré de carré, ou le sursolide, ou le carré de cube, etc., soit égal à ce qui se produit par l'addition ou soustraction de deux ou plusieurs autres quantités, dont l'une soit connue, et les autres soient composées de quelques moyennes proportionnelles entre l'unité et ce carré, ou cube, ou carré de carré, etc., multipliées par d'autres connues. Ce que j'écris en cette sorte :

Comment il faut
venir aux
équations qui
servent à résoudre
les problèmes.

$$z = b,$$

$$\text{ou } z^2 = -az + b^2,$$

$$\text{ou } z^3 = +az^2 + b^2z - c^3,$$

$$\text{ou } z^4 = az^3 - c^3z + d^4, \text{ etc. ;}$$

c'est-à-dire z , que je prends pour la quantité inconnue, est égale à b ; ou le carré de z est égal au carré de b moins a multiplié par z ; ou le cube de z est égal à a multiplié par le carré de z plus le carré de b multiplié par z moins le cube de c ; et ainsi des autres.

Et on peut toujours réduire ainsi toutes les quantités inconnues à une seule, lorsque le problème se peut construire par des cercles et des lignes droites, ou aussi par des sections coniques, ou même par quelque autre ligne qui ne soit que d'un ou deux degrés plus composée. Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterois le plaisir de l'apprendre de vous-même, et l'utilité de cultiver votre esprit en vous y exerçant, qui est à mon avis la principale qu'on puisse tirer de cette science. Aussi que je n'y remarque rien de si difficile que ceux qui seront un peu versés en la géométrie commune et en l'algèbre, et qui prendront garde à tout ce qui est en ce traité, ne puissent trouver.

C'est pourquoi je me contenterai ici de vous avertir que, pourvu qu'en démêlant ces équations, on ne manque point à se servir de toutes les divisions qui seront possibles, on aura infailliblement les plus simples termes auxquels la question puisse être réduite.

Et que si elle peut être résolue par la géométrie ordinaire, c'est-à-dire en ne se servant que de lignes droites et circulaires tracées sur une superficie plate, lorsque la dernière équation aura été entièrement démêlée, il n'y restera tout au plus qu'un carré inconnu, égal à ce qui se produit de l'addition ou soustraction de sa racine multipliée par quelque quantité connue, et de quelque autre quantité aussi connue.

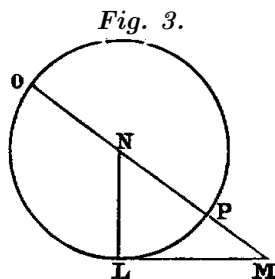
Et lors cette racine, ou ligne inconnue, se trouve aisément ; car si j'ai par exemple

$$z^2 = az + b^2,$$

je fais le triangle rectangle $N L M$ (*fig. 3*), dont le côté $L M$ est égal à b , racine carrée de la quantité connue b^2 , et l'autre $L N$ est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre

Quels sont les problèmes plans.

Comment ils se résolvent.



quantité connue qui étoit multipliée par z , que je suppose être la ligne inconnue ; puis prolongeant $M N$, la base de ce triangle, jusques à O , en sorte que $N O$ soit égale à $N L$, la toute $O M$ est z , la ligne cherchée ; et elle s'exprime en cette sorte :

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$

Que si j'ai $y^2 = -ay + b^2$, et que y soit la quantité qu'il faut trouver, je fais le même triangle rectangle $N L M$, et de sa base $M N$ j'ôte $N P$ égale à $N L$, et le reste $P M$ est y , la racine cherchée. De façon que j'ai

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$

Et tout de même si j'avois

$$x^4 = -ax^2 + b^2,$$

$P M$ seroit x^2 , et j'aurois

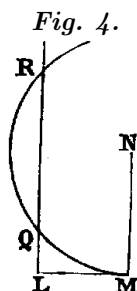
$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}};$$

et ainsi des autres.

Enfin, si j'ai

$$z^2 = az - b^2,$$

je fais NM (*fig. 4*) égale à $\frac{1}{2}a$, et LM égale à b , comme devant ; puis, au lieu



de joindre les points LN , je tire LQR parallèle à MN , et du centre N , par L , ayant décrit un cercle qui la coupe aux points Q et R , la ligne cherchée z est LQ , ou bien LR ; car en ce cas elle s'exprime en deux façons, à savoir

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2},$$

et

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N passe par le point M , ne coupe ni ne touche la ligne droite LQR , il n'y a aucune racine en l'équation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problème proposé est impossible.

Au reste, ces mêmes racines se peuvent trouver par une infinité d'autres moyens, et j'ai seulement voulu mettre ceux-ci, comme fort simples, afin de faire voir qu'on peut construire tous les problèmes de la géométrie ordinaire sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que j'ai expliquées. Ce que je ne crois pas que les anciens aient remarqué ; car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en écrire tant de gros livres où le seul ordre de leurs propositions nous fait connoître qu'ils n'ont point eu la vraie méthode pour les trouver toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.

Et on peut le voir aussi fort clairement de ce que Pappus a mis au commencement de son septième livre, où après s'être arrêté quelque temps à dénombrer tout ce qui avoit été écrit en géométrie par ceux qui l'avoient précédé, il parle enfin d'une question qu'il dit que ni Euclide, ni Apollonius, ni aucun autre, n'avoient su entièrement résoudre ; et voici ses mots ⁽⁴⁾ :

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres et quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius ;

⁽⁴⁾Je cite plutôt la version latine que le texte grec, afin que chacun l'entende plus aisément.

Exemple tiré de
Pappus.

sed neque paululum quid addere iis, quæ Euclides scripsit, per ea tantum conica, quæ usque ad Euclidis tempora præmonstrata sunt, etc.

Et un peu après il explique ainsi quelle est cette question :

At locus ad tres et quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnifice se jactat, et ostentat, nulla habita gratia ei, qui prius scripserat, est hujusmodi. Si positione datis tribus rectis lineis ab uno et eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectæ lineæ ducantur, et data sit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquæ : punctum contingit positione datum solidum locum, hoc est unam ex tribus conicis sectionibus. Et si ad quatuor rectas lineas positione datas in datis angulis lineæ ducantur ; et rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data sit : similiter punctum datam coni sectionem positione continget. Si quidem igitur ad duas tantum locus planus ostensus est. Quod si ad plures quam quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, sed lineas tantum dictas ; quales autem sint, vel quam habeant proprietatem, non constat : earum unam, neque primam, et quæ manifestissima videtur, composuerunt ostendentes utilem esse. Propositiones autem ipsarum hæ sunt.

Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas quinque ducantur rectæ lineæ in datis angulis, et data sit proportio solidi parallelepipedum rectangulum, quod tribus ductis lineis continetur ad solidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur reliquis duabus, et data quapiam linea, punctum positione datam lineam continget. Si autem ad sex, et data sit proportio solidi tribus lineis contenti ad solidum, quod tribus reliquis continetur ; rursus punctum continget positione datam lineam. Quod si ad plures quam sex, non adhuc habent dicere, an data sit proportio cujuspian contenti quatuor lineis ad id quod reliquis continetur, quoniam non est aliquid contentum pluribus quam tribus dimensionibus.

Où je vous prie de remarquer en passant que le scrupule que faisoient les anciens d'user des termes de l'arithmétique en la géométrie, qui ne pouvoit procéder que de ce qu'ils ne voyoient pas assez clairement leur rapport, causoit beaucoup d'obscurité et d'embarras en la façon dont ils s'expliquoient ; car Pappus poursuit en cette sorte :

Acquiescunt autem his, qui paulo ante talia interpretati sunt ; neque unum aliquo pacto comprehensibile significantes quod his continetur. Licebit autem per conjunctas proportionibus hæc, et dicere, et demonstrare universe in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, et data sit proportio conjuncta ex ea, quam habet una ductarum ad unam, et altera ad alteram, et alia ad aliam, et reliqua ad datam lineam, si sint septem ; si vero octo, et reliqua ad reliquam : punctum continget positione datas lineas. Et similiter quotcumque sint impares vel pares multitudine, cum hæc, ut dixi, loco ad quatuor lineas respondeant, nullum igitur posuerunt ita ut linea nota sit, etc.

La question donc qui avoit été commencée à résoudre par Euclide et poursuivie par Apollonius, sans avoir été achevée par personne, étoit telle : Ayant trois ou quatre, ou plus grand nombre de lignes droites données par position ; premièrement on demande un point duquel on puisse tirer autant d'autres lignes droites, une sur chacune des données, qui fassent avec elles des angles donnés,

et que le rectangle contenu en deux de celles qui seront ainsi tirées d'un même point, ait la proportion donnée avec le carré de la troisième, s'il n'y en a que trois ; ou bien avec le rectangle des deux autres, s'il y en a quatre ; ou bien, s'il y en a cinq, que le parallépipède composé de trois ait la proportion donnée avec le parallépipède composé des deux qui restent, et d'une autre ligne donnée ; ou s'il y en a six, que le parallépipède composé de trois ait la proportion donnée avec le parallépipède des trois autres ; ou s'il y en a sept, que ce qui se produit lorsqu'on en multiplie quatre l'une par l'autre, ait la raison donnée avec ce qui se produit par la multiplication des trois autres, et encore d'une autre ligne donnée ; ou s'il y en a huit, que le produit de la multiplication de quatre ait la proportion donnée avec le produit des quatre autres ; et ainsi cette question se peut étendre à tout autre nombre de lignes. Puis à cause qu'il y a toujours une infinité de divers points qui peuvent satisfaire à ce qui est ici demandé, il est aussi requis de connoître et de tracer la ligne dans laquelle ils doivent tous se trouver. Et Pappus dit que lorsqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données, c'est en une des trois sections coniques ; mais il n'entreprend point de la déterminer ni de la décrire, non plus que d'expliquer celles où tous ces points se doivent trouver, lorsque la question est proposée en un plus grand nombre de lignes. Seulement il ajoute que les anciens en avoient imaginé une qu'ils montroient y être utile, mais qui sembloit la plus manifeste, et qui n'étoit pas toutefois la première. Ce qui m'a donné occasion d'essayer si, par la méthode dont je me sers, on peut aller aussi loin qu'ils ont été.

Et premièrement j'ai connu que cette question n'étant proposée qu'en trois, ou quatre, ou cinq lignes, on peut toujours trouver les points cherchés par la géométrie simple, c'est-à-dire en ne se servant que de la règle et du compas, ni ne faisant autre chose que ce qui a déjà été dit ; excepté seulement lorsqu'il y a cinq lignes données, si elles sont toutes parallèles : auquel cas, comme aussi lorsque la question est proposée en 6, ou 7, ou 8, ou 9 lignes, on peut toujours trouver les points cherchés par la géométrie des solides, c'est-à-dire en y employant quelqueune des trois sections coniques ; excepté seulement lorsqu'il y a neuf lignes données, si elles sont toutes parallèles : auquel cas, derechef, et encore en 10, 11, 12 ou 13 lignes, on peut trouver les points cherchés par le moyen d'une ligne courbe qui soit d'un degré plus composée que les sections coniques ; excepté en treize, si elles sont toutes parallèles : auquel cas, et en 14, 15, 16 et 17, il y faudra employer une ligne courbe encore d'un degré plus composée que la précédente, et ainsi à l'infini.

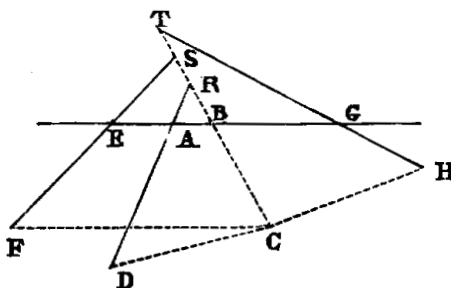
Puis j'ai trouvé aussi que lorsqu'il n'y a que trois ou quatre lignes données, les points cherchés se rencontrent tous, non seulement en l'une des trois sections coniques, mais quelquefois aussi en la circonférence d'un cercle ou en une ligne droite ; et que lorsqu'il y en a cinq, ou six, ou sept, ou huit, tous ces points se rencontrent en quelqueune des lignes qui sont d'un degré plus composées que les sections coniques, et il est impossible d'en imaginer aucune qui ne soit utile à cette question ; mais ils peuvent aussi derechef se rencontrer en une section conique, ou en un cercle, ou en une ligne droite. Et s'il y en a 9, ou 10, ou 11, ou 12, ces points se rencontrent en une ligne qui ne peut être que d'un degré plus composée que les précédentes ; mais toutes celles qui sont d'un degré plus

Réponse à la
question de
Pappus.

Au reste, la première et la plus simple de toutes, après les sections coniques, est celle qu'on peut décrire par l'intersection d'une parabole et d'une ligne droite, en la façon qui sera tantôt expliquée. En sorte que je pense avoir entièrement satisfait à ce que Pappus nous dit avoir été cherché en ceci par les anciens ; et je tâcherai d'en mettre la démonstration en peu de mots, car il m'ennuie déjà d'en tant écrire.

Premièrement, je suppose la chose comme déjà faite, et pour me démêler de

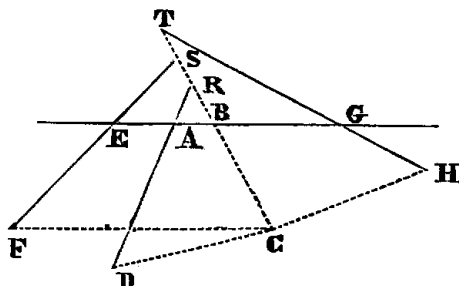
Fig. 5.



8

comme de z à c , de façon que CR étant $y + \frac{bx}{z}$, CD sera $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2}$. Après cela, pourceque les lignes AB , AD et EF sont données par position, la distance qui est entre les points A et E est aussi donnée, et si on la nomme k , on aura EB égal à $k + x$; mais ce seroit $k - x$ si le point B tomboit entre E et A ; et $-k + x$ si E tomboit entre A et B . Et pourceque les angles du triangle ESB sont tous donnés, la proportion de BE à BS est aussi donnée, et je la pose comme de z à

Fig. 6.



d , si bien que BS est $\frac{dk+dx}{z}$, et la toute CS est $\frac{zy+dk+dx}{z}$; mais ce seroit $\frac{zy-dk-dx}{z}$, si le point S tomboit entre B et C ; et ce seroit $\frac{-zy+dk+dx}{z}$, si C tomboit entre B et S . De plus les trois angles du triangle $FS C$ sont donnés, et ensuite la proportion de CS à CF , qui soit comme de z à e , et la toute CF sera $\frac{ezy+dek+dex}{z^2}$. En même façon AG que je nomme l est donnée, et BG est $l-x$, et à cause du triangle BGT , la proportion de BG à BT est aussi donnée, qui soit comme de z à f , et BT sera $\frac{fl-fx}{z}$, et $CT = \frac{zy+fl-fx}{z}$. Puis derechef la proportion de CT à CH est donnée à cause du triangle TCH , et la posant comme de z à g , on aura $CH = \frac{gzy+fgl-fgx}{z}$.

Et ainsi vous voyez qu'en tel nombre de lignes données par position qu'on puisse avoir, toutes les lignes tirées dessus du point C à angles donnés, suivant la teneur de la question, se peuvent toujours exprimer chacune par trois termes, dont l'un est composé de la quantité inconnue y , multipliée ou divisée par quelque autre connue; et l'autre de la quantité inconnue x , aussi multipliée ou divisée par quelque autre connue; et le troisième d'une quantité toute connue; excepté seulement si elles sont parallèles, ou bien à la ligne AB , auquel cas le terme composé de la quantité x sera nul; ou bien à la ligne CB , auquel cas celui qui est composé de la quantité y sera nul, ainsi qu'il est trop manifeste pour que je m'arrête à l'expliquer. Et pour les signes $+$ et $-$ qui se joignent à ces termes, ils peuvent être changés en toutes les facons imaginables.

Puis vous voyez aussi que, multipliant plusieurs de ces lignes l'une par l'autre, les quantités x et y qui se trouvent dans le produit n'y peuvent avoir que chacune autant de dimensions qu'il y a eu de lignes à l'explication desquelles elles servent,

qui ont été ainsi multipliées ; en sorte qu'elles n'auront jamais plus de deux dimensions en ce qui ne sera produit que par la multiplication de deux lignes ; ni plus de trois, en ce qui ne sera produit que par la multiplication de trois, et ainsi à l'infini.

De plus, à cause que pour déterminer le point C , il n'y a qu'une seule condition qui soit requise, à savoir que ce qui est produit par la multiplication d'un certain nombre de ces lignes soit égal, ou, ce qui n'est de rien plus malaisé, ait la proportion donnée à ce qui est produit par la multiplication des autres ; on peut prendre à discrétion l'une des deux quantités inconnues x ou y , et chercher l'autre par cette équation, en laquelle il est évident que, lorsque la question n'est point posée en plus de cinq lignes, la quantité x , qui ne sert point à l'expression de la première, peut toujours n'y avoir que deux dimensions ; de façon que, prenant une quantité connue pour y , il ne restera que $x^2 = +$ ou $-ax +$ ou $-b^2$; et ainsi on pourra trouver la quantité x avec la règle et le compas, en la façon tantôt expliquée. Même, prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y , on en trouvera aussi infinies pour la ligne x , et ainsi on aura une infinité de divers points, tels que celui qui est marqué C , par le moyen desquels on décrira la ligne courbe demandée.

Il se peut faire aussi, la question étant proposée en six ou plus grand nombre de lignes, s'il y en a entre les données qui soient parallèles à AB ou BC , que l'une des deux quantités x ou y n'ait que deux dimensions en l'équation, et ainsi qu'on puisse trouver le point C avec la règle et le compas. Mais au contraire si elles sont toutes parallèles, encore que la question ne soit proposée qu'en cinq lignes, ce point C ne pourra ainsi être trouvé, à cause que la quantité x ne se trouvant point en toute l'équation, il ne sera plus permis de prendre une quantité connue pour celle qui est nommée y , mais ce sera celle qu'il faudra chercher. Et pourcequ'elle aura trois dimensions, on ne le pourra trouver qu'en tirant la racine d'une équation cubique, ce qui ne se peut généralement faire sans qu'on y emploie pour le moins une section conique. Et encore qu'il y ait jusques à neuf lignes données, pourvu qu'elles ne soient point toutes parallèles, on peut toujours faire que l'équation ne monte que jusques au carré de carré ; au moyen de quoi on la peut aussi toujours résoudre par les sections coniques, en la façon que j'expliquerai ci-après. Et encore qu'il y en ait jusques à treize, on peut toujours faire qu'elle ne monte que jusques au carré de cube ; ensuite de quoi on la peut résoudre par le moyen d'une ligne, qui n'est que d'un degré plus composée que les sections coniques, en la façon que j'expliquerai aussi ci-après. Et ceci est la première partie de ce que j'avois ici à démontrer ; mais avant que je passe à la seconde, il est besoin que je dise quelque chose en général de la nature des lignes courbes.

Comment on trouve que ce problème est plan, lorsqu'il n'est point proposé en plus de cinq lignes.

LIVRE SECOND

DE LA NATURE DES LIGNES COURBES.

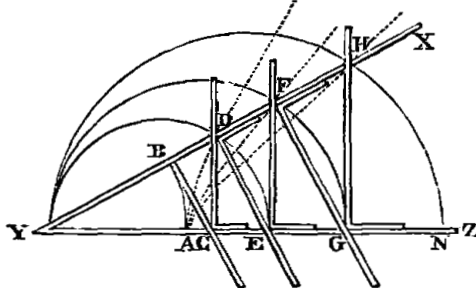
Les anciens ont fort bien remarqué qu'entre les problèmes de géométrie, les uns sont plans, les autres solides et les autres linéaires, c'est-à-dire que les uns peuvent être construits en ne traçant que des lignes droites et des cercles ; au lieu que les autres ne le peuvent être, qu'on n'y emploie pour le moins quelque section conique ; ni enfin les autres, qu'on n'y emploie quelque autre ligne plus composée. Mais je m'étonne de ce qu'ils n'ont point outre cela distingué divers degrés entre ces lignes plus composées, et je ne saurois comprendre pourquoi ils les ont nommées mécaniques plutôt que géométriques. Car de dire que c'ait été à cause qu'il est besoin de se servir de quelque machine pour les décrire, il faudroit rejeter par même raison les cercles et les lignes droites, vu qu'on ne les décrit sur le papier qu'avec un compas et une règle, qu'on peut aussi nommer des machines. Ce n'est pas non plus à cause que les instruments qui servent à les tracer, étant plus composés que la règle et le compas, ne peuvent être si justes ; car il faudroit pour cette raison les rejeter des mécaniques, où la justesse des ouvrages qui sortent de la main est désirée, plutôt que de la géométrie, où c'est seulement la justesse du raisonnement qu'on recherche, et qui peut sans doute être aussi parfaite touchant ces lignes que touchant les autres. Je ne dirai pas aussi que ce soit à cause qu'ils n'ont pas voulu augmenter le nombre de leurs demandes, et qu'ils se sont contentés qu'on leur accordât qu'ils pussent joindre deux points donnés par une ligne droite, et décrire un cercle d'un centre donné qui passât par un point donné ; car ils n'ont point fait de scrupule de supposer outre cela, pour traiter des sections coniques, qu'on pût couper tout cône donné par un plan donné. Et il n'est besoin de rien supposer pour tracer toutes les lignes courbes que je prétends ici d'introduire, sinon que deux ou plusieurs lignes puissent être mues l'une par l'autre, et que leurs intersections en marquent d'autres ; ce qui ne me paroît en rien plus difficile. Il est vrai qu'ils n'ont pas aussi entièrement reçu les sections coniques en leur géométrie, et je ne veux pas entreprendre de changer les noms qui ont été approuvés par l'usage ; mais il est, ce me semble, très clair que, prenant comme on fait pour géométrique ce qui est précis et exact, et pour mécanique ce qui ne l'est pas, et considérant la géométrie comme une science qui enseigne généralement à connoître les mesures de tous les corps, on n'en doit pas plutôt exclure les lignes les plus composées que les plus simples, pourvu qu'on les puisse imaginer être décrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entre-suivent, et dont les derniers soient entièrement réglés par ceux qui les précèdent ; car par ce moyen on peut toujours avoir une connoissance exacte de leur mesure. Mais peut-être que ce qui a empêché les anciens géomètres de recevoir celles qui étoient plus composées que les sections coniques, c'est que les premières qu'ils ont considérées, ayant par hasard été la spirale, la quadratrice et semblables, qui n'appartiennent véritablement qu'aux mécaniques, et ne sont point du nombre

Quelles sont les
lignes courbes
qu'on peut
recevoir en
géométrie.

de celles que je pense devoir ici être reçues, à cause qu'on les imagine décrites par deux mouvements séparés, et qui n'ont entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement ; bien qu'ils aient après examiné la conchoïde, la cissoïde, et quelque peu d'autres qui en sont, toutefois à cause qu'ils n'ont peut-être pas assez remarqué leurs propriétés, ils n'en ont pas fait plus d'état que des premières ; ou bien c'est que, voyant qu'ils ne connoissoient encore que peu de choses touchant les sections coniques, et qu'il leur en restait même beaucoup, touchant ce qui se peut faire avec la règle et le compas, qu'ils ignoroient, ils ont cru ne devoir point entamer de matière plus difficile. Mais pourceque j'espère que dorénavant ceux qui auront l'adresse de se servir du calcul géométrique ici proposé, ne trouveront pas assez de quoi s'arrêter touchant les problèmes plans ou solides, je crois qu'il est à propos que je les invite à d'autres recherches, où ils ne manqueront jamais d'exercice.

Voyez les lignes AB , AD , AF et semblables (*fig. 7*), que je suppose avoir été décrites par l'aide de l'instrument YZ , qui est composé de plusieurs règles

Fig. 7.



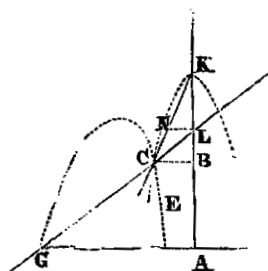
tellement jointes que celle qui est marquée YZ étant arrêtée sur la ligne AN , on peut ouvrir et fermer l'angle XYZ , et que lorsqu'il est tout fermé, les points B, C, D, E, F, G, H sont tous rassemblés au point A ; mais qu'à mesure qu'on l'ouvre, la règle BC , qui est jointe à angles droits avec XY au point B , pousse vers Z la règle CD , qui coule sur YZ en faisant toujours des angles droits avec elle ; et CD pousse DE , qui coule tout de même sur YX en demeurant parallèle à BC ; DE pousse EF , EF pousse FG , celle-ci pousse GH , et on en peut concevoir une infinité d'autres qui se poussent consécutivement en même façon, et dont les unes fassent toujours les mêmes angles avec YX et les autres avec YZ . Or, pendant qu'on ouvre ainsi l'angle XYZ , le point B décrit la ligne AB , qui est un cercle ; et les autres points D, F, H , où se font les intersections des autres règles, décrivent d'autres lignes courbes AD, AF, AH , dont les dernières sont par ordre plus composées que la première, et celle-ci plus que le cercle ; mais je ne vois pas ce qui peut empêcher qu'on ne conçoive aussi nettement et aussi distinctement la description de cette première que du cercle, ou du moins que des sections coniques ; ni ce qui peut empêcher qu'on ne conçoive la seconde, et la troisième, et toutes les autres qu'on peut décrire, aussi bien que la première ; ni par conséquent qu'on ne les reçoive toutes en même façon pour servir aux

spéculations de géométrie.

Je pourrais mettre ici plusieurs autres moyens pour tracer et concevoir des lignes courbes qui seroient de plus en plus composées par degrés à l'infini ; mais pour comprendre ensemble toutes celles qui sont en la nature, et les distinguer par ordre en certains genres, je ne sache rien de meilleur que de dire que tous les points de celles qu'on peut nommer géométriques, c'est-à-dire qui tombent sous quelque mesure précise et exacte, ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimée par quelque équation, en tous par une même ; et que, lorsque cette équation ne monte que jusqu'au rectangle de deux quantités indéterminées, ou bien au carré d'une même, la ligne courbe est du premier et plus simple genre, dans lequel il n'y a que le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse qui soient comprises ; mais que lorsque l'équation monte jusqu'à la troisième ou quatrième dimension des deux, ou de l'une des deux quantités indéterminées (car il en faut deux pour expliquer ici le rapport d'un point à un autre), elle est du second ; et que lorsque l'équation monte jusqu'à la cinquième ou sixième dimension, elle est du troisième ; et ainsi des autres à l'infini. Comme si je veux savoir de quel genre est la ligne EC (*fig. 8*), que j'imagine être décrite par l'intersection de la règle GL et du plan rectiligne

La façon de distinguer toutes les lignes courbe en certains genres, et de connoître le rapport qu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites.

Fig. 8.



$C N K L$, dont le côté $K N$ est indéfiniment prolongé vers C , et qui, étant mu sur le plan de dessous en ligne droite, c'est-à-dire en telle sorte que son diamètre $K L$ se trouve toujours appliqué sur quelque endroit de la ligne $B A$ prolongée de part et d'autre, fait mouvoir circulairement cette règle GL autour du point G , à cause qu'elle lui est tellement jointe qu'elle passe toujours par le point L . Je choisis une ligne droite comme AB , pour rapporter à ses divers points tous ceux de cette ligne courbe EC ; et en cette ligne AB je choisis un point comme A , pour commencer par lui ce calcul. Je dis que je choisis et l'un et l'autre, à cause qu'il est libre de les prendre tels qu'on veut ; car encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'équation plus courte et plus aisée, toutefois en quelle façon qu'on les prenne, on peut toujours faire que la ligne paroisse de même genre, ainsi qu'il est aisé à démontrer. Après cela prenant un point à discrétion dans la courbe, comme C , sur lequel je suppose que l'instrument qui sert à la décrire est appliqué, je tire de ce point C la ligne CB parallèle à GA , et pour ce que CB et BA sont deux quantités indéterminées et inconnues, je les nomme l'une

y et l'autre x ; mais afin de trouver le rapport de l'une à l'autre, je considère aussi les quantités connues qui déterminent la description de cette ligne courbe, comme GA , que je nomme a , KL que je nomme b , et NL , parallèle à GA , que je nomme c ; puis je dis, comme NL est à LK , ou c à b , ainsi CB ou y est à BK , qui est par conséquent $\frac{b}{c}y$: et BL est $\frac{b}{c}y - b$, et AL est $x + \frac{b}{c}y - b$. De plus, comme CB est à LB , ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainsi AG ou a est à LA ou $x + \frac{b}{c}y - b$; de façon que, multipliant la seconde par la troisième, on produit $\frac{ab}{c}y - ab$ qui est égale à $xy + \frac{b}{c}y^2 - by$, qui se produit en multipliant la première par la dernière : et ainsi l'équation qu'il falloit trouver est

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac,$$

de laquelle on connoît que la ligne EG est du premier genre, comme en effet elle n'est autre qu'une hyperbole.

Que si, en l'instrument qui sert à la décrire, on fait qu'au lieu de la ligne droite CNK , ce soit cette hyperbole, ou quelque autre ligne courbe du premier genre, qui termine le plan $CNK L$, l'intersection de cette ligne et de la règle GL décrira, au lieu de l'hyperbole EC , une autre ligne courbe qui sera d'un second genre. Comme si CNK est un cercle dont L soit le centre, on décrira la première conchoïde des anciens ; et si c'est une parabole dont le diamètre soit KB , on décrira la ligne courbe que j'ai tantôt dit être la première et la plus simple pour la question de Pappus, lorsqu'il n'y a que cinq lignes droites données par position ; mais si au lieu d'une de ces lignes courbes du premier genre, c'en est une du second qui termine le plan $CNK L$, on en décrira, par son moyen, une du troisième, ou si c'en est une du troisième, on en décrira une du quatrième, et ainsi à l'infini, comme il est fort aisé à connoître par le calcul. Et en quelque autre façon qu'on imagine la description d'une ligne courbe, pourvu qu'elle soit du nombre de celles que je nomme géométriques, on pourra toujours trouver une équation pour déterminer tous ses points en cette sorte.

Au reste, je mets les lignes courbes qui font monter cette équation jusqu'au carré, au même genre que celles qui ne la font monter que jusqu'au cube ; et celles dont l'équation monte au carré de cube, au même genre que celles dont elle ne monte qu'au sursolide, et ainsi des autres : dont la raison est qu'il y a règle générale pour réduire au cube toutes les difficultés qui vont au carré de carré, et au sursolide toutes celles qui vont au carré de cube ; de façon qu'on ne les doit point estimer plus composées.

Mais il est à remarquer qu'entre les lignes de chaque genre, encore que la plupart soient également composées, en sorte qu'elles peuvent servir à déterminer les mêmes points et construire les mêmes problèmes, il y en a toutefois aussi quelques unes qui sont plus simples, et qui n'ont pas tant d'étendue en leur puissance ; comme entre celles du premier genre, outre l'ellipse, l'hyperbole et la parabole, qui sont également composées, le cercle y est aussi compris, qui manifestement est plus simple ; et entre celles du second genre, il y a la conchoïde

vulgaire, qui a son origine du cercle ; et il y en a encore quelques autres qui, bien qu'elles n'aient pas tant d'étendue que la plupart de celles du même genre, ne peuvent toutefois être mises dans le premier.

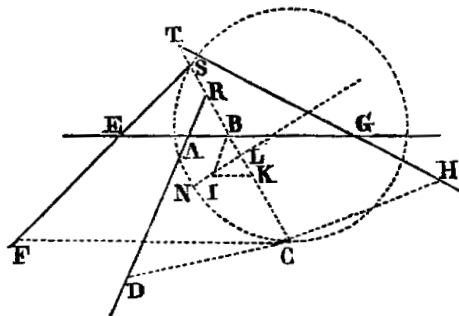
Or, après avoir ainsi réduit toutes les lignes courbes à certains genres, il m'est aisé de poursuivre en la démonstration de la réponse que j'ai tantôt faite à la question de Pappus ; car premièrement, ayant fait voir ci-dessus que, lorsqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données, l'équation qui sert à déterminer les points cherchés ne monte que jusqu'au carré, il est évident que la ligne courbe où se trouvent ces points est nécessairement quelque'une de celles du premier genre, à cause que cette même équation explique le rapport qu'ont tous les points des lignes du premier genre à ceux d'une ligne droite ; et que lorsqu'il n'y a point plus de huit lignes droites données, cette équation ne monte que jusqu'au carré de carré tout au plus, et que par conséquent la ligne cherchée ne peut être que du second genre, ou au-dessous ; et que lorsqu'il n'y a point plus de douze lignes données, l'équation ne monte que jusqu'au carré de cube, et que par conséquent la ligne cherchée n'est que du troisième genre, ou au-dessous ; et ainsi des autres. Et même à cause que la position des lignes droites données peut varier en toutes sortes, et par conséquent faire changer tant les quantités connues que les signes + et - de l'équation, en toutes les façons imaginables, il est évident qu'il n'y a aucune ligne courbe du premier genre qui ne soit utile à cette question, quand elle est proposée en quatre lignes droites ; ni aucune du second qui n'y soit utile, quand elle est proposée en huit ; ni du troisième, quand elle est proposée en douze ; et ainsi des autres : en sorte qu'il n'y a pas une ligne courbe qui tombe sous le calcul et puisse être reçue en géométrie, qui n'y soit utile pour quelque nombre de lignes.

Mais il faut ici plus particulièrement que je détermine et donne la façon de trouver la ligne cherchée qui sert en chaque cas, lorsqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données ; et on verra, par même moyen, que le premier genre des lignes courbes n'en contient aucunes autres que les trois sections coniques et le cercle.

Suite de l'explication de la question de Pappus, mise au livre précédent.

Solution de cette question quand elle n'est proposée qu'en trois ou quatre lignes.

Fig. 9.



Reprenons les quatre lignes AB , AD , EF et GH (*fig. 9*) données ci-dessus, et qu'il faille trouver une autre ligne en laquelle il se rencontre une infinité de

points tels que C , duquel ayant tiré les quatre lignes CB , CD , CF et CH , à angles donnés sur les données, CB multipliée par CF produit une somme égale à CD multipliée par CH ; c'est-à-dire, ayant fait

$$CB = y, \quad CD = \frac{czy + bcx}{z^2}, \quad CF = \frac{ezy + dek + dex}{z^2},$$

et $CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2},$

l'équation est⁽⁵⁾

$$y^2 = \frac{(cfglz - dckz^2)y - (dez^2 + cfgz - bcgz)xy + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}.$$

au moins en supposant ez plus grand que cg , car s'il étoit moindre il faudroit changer tous les signes $+$ et $-$. Et si la quantité y se trouvoit nulle ou moindre que rien en cette équation, lorsqu'on a supposé le point C en l'angle DAG , il faudroit le supposer aussi en l'angle DAE , ou EAR , ou RAG , en changeant les signes $+$ et $-$ selon qu'il serait requis à cet effet. Et si en toutes ces quatre positions la valeur de y se trouvoit nulle, la question seroit impossible au cas proposé. Mais supposons-la ici être possible, et pour en abrégier les termes, au lieu des quantités $\frac{cfglz - dckz^2}{ez^3 - cgz^2}$, écrivons $2m$; et au lieu de $\frac{dez^2 + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgz^2}$, écrivons $\frac{2n}{z}$; et ainsi nous aurons

$$y^2 = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2},$$

dont la racine est

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - \frac{2mnx}{z} + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}};$$

et de rechef pour abrégier, au lieu de $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgz^2}$, écrivons o ; et au lieu de $\frac{n^2}{z^2} - \frac{bcfg}{ez^2 - cgz^2}$, écrivons $\frac{p}{m}$; car ces quantités étant toutes données, nous les pouvons nommer comme il nous plaît : et ainsi nous avons

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2},$$

qui doit être la longueur de la ligne BC , en laissant AB ou x indéterminée. Et il est évident que la question n'étant proposée qu'en trois ou quatre lignes, on

⁽⁵⁾Les termes contenus entre deux parenthèses sont placés l'un sous l'autre dans les anciennes éditions, comme, par exemple, $\left. \begin{array}{r} -dekz^2 \\ +cfglz \end{array} \right\} y.$

peut toujours avoir de tels termes, excepté que quelques uns d'eux peuvent être nuls, et que les signes + et - peuvent diversement être changés.

Après cela je fais KI égale et parallèle à BA , en sorte qu'elle coupe de BC la partie BK égale à m , à cause qu'il y a ici $+m$; et je l'aurois ajoutée en tirant cette ligne IK de l'autre côté, s'il y avoit eu $-m$; et je ne l'aurois point du tout tirée, si la quantité m eût été nulle. Puis je tire aussi IL , en sorte que la ligne IK est à KL comme z est à n ; c'est-à-dire que IK étant x , KL est $\frac{n}{z}x$. Et par même moyen je connois aussi la proportion qui est entre KL et IL , que je pose comme entre n et a : si bien que KL étant $\frac{n}{z}x$, IL est $\frac{a}{z}x$. Et je fais que le point K soit entre L et C , à cause qu'il y a ici $-\frac{n}{z}x$; au lieu que j'aurois mis L entre K et C , si j'eusse eu $+\frac{n}{z}x$; et je n'eusse point tiré cette ligne IL , si $\frac{n}{z}x$ eût été nulle.

Or, cela fait, il ne me reste plus pour la ligne LC que ces termes

$$LC = \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2},$$

d'où je vois que s'ils étoient nuls, ce point C se trouveroit en la ligne droite IL ; et que s'ils étoient tels que la racine s'en pût tirer, c'est-à-dire que m^2 et $\frac{p}{m}x^2$ étant marqués d'un même signe + ou -, o^2 fût égal à $4pm$, ou bien que les termes m^2 et ox , ou ox et $\frac{p}{m}x^2$ fussent nuls, ce point C se trouveroit en une autre ligne droite qui ne seroit pas plus malaisée à trouver que IL . Mais lorsque cela n'est pas, ce point C est toujours en l'une des trois sections ou en un cercle dont l'un des diamètres est en la ligne IL , et la ligne LC est l'une de celles qui s'appliquent par ordre à ce diamètre; ou au contraire LC est parallèle au diamètre auquel celle qui est en la ligne IL est appliquée par ordre; à savoir si le terme $\frac{p}{m}x^2$ est nul, cette section conique est une parabole; et s'il est marqué du signe +, c'est une hyperbole; et enfin s'il est marqué du signe -, c'est une ellipse, excepté seulement si la quantité a^2m est égale à pz^2 , et que l'angle ILC soit droit, auquel cas on a un cercle au lieu d'une ellipse. Que si cette section est une parabole, son côté droit est égal à $\frac{oz}{a}$, et son diamètre est toujours en la ligne IL ; et pour trouver le point N , qui en est le sommet, il faut faire IN égale à $\frac{am^2}{oz}$; et que le point I soit entre L et N , si les termes sont $+m^2 + ox$; ou bien que le point L soit entre I et N , s'ils sont $+m^2 - ox$; ou bien il faudroit que N fût entre I et L , s'il y avoit $-m^2 + ox$. Mais il ne peut jamais y avoir $-m^2$, en la façon que les termes ont ici été posés. Et enfin le point N seroit le même que le point I si la quantité m^2 étoit nulle; au moyen de quoi il est aisé de trouver cette parabole par le premier problème du premier livre d'Apollonius.

Que si la ligne demandée est un cercle, ou une ellipse, ou une hyperbole, il faut premièrement chercher le point M qui en est le centre, et qui est toujours en la ligne droite IL ; ou on le trouve en prenant $\frac{aom}{2pz}$ pour IM , en sorte que si

la quantité o est nulle, ce centre est justement au point I . Et si la ligne cherchée est un cercle ou une ellipse, on doit prendre le point M du même côté que le point L , au respect du point I , lorsqu'on a $+ox$; et lorsqu'on a $-ox$, on le doit prendre de l'autre. Mais tout au contraire, en l'hyperbole, si on a $-ox$, ce centre M doit être vers L ; et si on a $+ox$, il doit être de l'autre côté. Après cela le côté droit de la figure doit être

$$\sqrt{\frac{o^2 z^2}{a^2} + \frac{4mpz^2}{a^2}},$$

lorsqu'on a $+m^2$, et que la ligne cherchée est un cercle ou une ellipse; ou bien lorsqu'on a $-m^2$, et que c'est une hyperbole; et il doit être

$$\sqrt{\frac{o^2 z^2}{a^2} - \frac{4mpz^2}{a^2}},$$

si la ligne cherchée, étant un cercle ou une ellipse, on a $-m^2$; ou bien si étant une hyperbole, et la quantité o^2 étant plus grande que $4mp$, on a $+m^2$. Que si la quantité m^2 est nulle, ce côté droit est $\frac{o^2 z}{a}$; et si ox est nulle, il est

$$\sqrt{\frac{4mpz^2}{a^2}}.$$

Puis, pour le côté traversant, il faut trouver une ligne qui soit à ce côté droit comme $a^2 m$ est à pz^2 ; à savoir si ce côté droit est

$$\sqrt{\frac{o^2 z^2}{a^2} + \frac{4mpz^2}{a^2}},$$

le traversant est

$$\sqrt{\frac{a^2 o^2 m^2}{p^2 z^2} + \frac{4a^2 m^3}{pz^2}}.$$

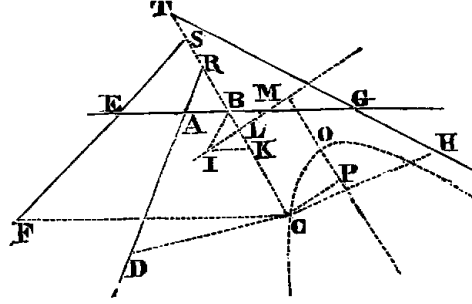
Et en tous ces cas le diamètre de la section est en la ligne IM , et LC est l'une de celles qui lui est appliquée par ordre. Si bien que, faisant MN égale à la moitié du côté traversant, et le prenant du même côté du point M qu'est le point L , on a le point N pour le sommet de ce diamètre; ensuite de quoi il est aisé de trouver la section par les second et troisième problèmes du premier livre d'Apollonius.

Mais quand cette section étant une hyperbole, on a $+m^2$, et que la quantité o^2 est nulle ou plus petite que $4pm$, on doit tirer du centre M la ligne MOP parallèle à LC , et CP parallèle à LM , et faire MO égale à

$$\sqrt{m^2 - \frac{o^2 m}{4p}},$$

ou bien la faire égale à m si la quantité ox est nulle; puis considérer le point O

Fig. 10.



comme le sommet de cette hyperbole, dont le diamètre est OP , et CP la ligne qui lui est appliquée par ordre, et son côté droit est

$$\sqrt{\frac{4a^4m^4}{p^2z^4} - \frac{a^4o^2m^3}{p^3z^4}},$$

et son côté traversant est

$$\sqrt{4m^2 - \frac{o^2m}{p}};$$

excepté quand ox est nulle, car alors le côté droit est $\frac{2a^2m^2}{pz^2}$, et le traversant est $2m$; et ainsi il est aisé de la trouver par le troisième problème du premier livre d'Apollonius.

Et les démonstrations de tout ceci sont évidentes; car composant un espace des quantités que j'ai assignées pour le côté droit, et le traversant, et pour le segment du diamètre NL ou OP , suivant la teneur du 11^e, du 12^e et du 13^e théorème du premier livre d'Apollonius, on trouvera tous les mêmes termes dont est composé le carré de la ligne CP , ou CL , qui est appliquée par ordre à ce diamètre. Comme en cet exemple, ôtant IM qui est $\frac{aom}{2pz}$, de NM qui est

Démonstration de tout ce qui vient d'être expliqué.

$$\frac{am}{2pz} \sqrt{o^2 + 4mp},$$

j'ai IN , à laquelle ajoutant IL qui est $\frac{a}{z}x$, j'ai NL qui est

$$\frac{a}{z}x - \frac{aom}{2pz} + \frac{am}{2pz} \sqrt{o^2 + 4mp};$$

et ceci étant multiplié par $\frac{z}{a} \sqrt{o^2 + 4mp}$, qui est le côté droit de la figure, il vient

$$x\sqrt{o^2 + 4mp} - \frac{om}{2p} \sqrt{o^2 + 4mp} + \frac{mo^2}{2p} + 2m^2,$$

pour le rectangle, duquel il faut ôter un espace qui soit au carré de $N L$ comme le côté droit est au traversant, et ce carré de $N L$ est

$$\frac{a^2}{z^2}x^2 - \frac{a^2om}{pz^2}x + \frac{a^2m}{pz^2}x\sqrt{o^2 + 4mp} + \frac{a^2o^2m^2}{2p^2z^2} + \frac{a^2m^3}{pz^2} - \frac{a^2om^2}{2p^2z^2}\sqrt{o^2 + 4mp},$$

qu'il faut diviser par a^2m et multiplier par pz^2 , à cause que ces termes expliquent la proportion qui est entre le côté traversant et le droit, et il vient

$$\frac{p}{m}x^2 - ox + x\sqrt{o^2 + 4mp} + \frac{o^2m}{2p} - \frac{om}{2p}\sqrt{o^2 + 4mp} + m^2,$$

ce qu'il faut ôter du rectangle précédent, et on trouve

$$m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2$$

pour le carré de $C L$, qui par conséquent est une ligne appliquée par ordre dans une ellipse, ou dans un cercle, au segment du diamètre $N L$.

Et si on veut expliquer toutes les quantités données par nombres, en faisant par exemple $E A = 3$, $A G = 5$, $A B = B R$, $B S = \frac{1}{2}B E$, $G B = B T$, $C D = \frac{3}{2}C R$, $C F = 2C S$, $C H = \frac{2}{3}C T$, et que l'angle $A B R$ soit de 60 degrés, et enfin que le rectangle des deux $C B$ et $C F$ soit égal au rectangle des deux autres $C D$ et $C H$; car il faut avoir toutes ces choses afin que la question soit entièrement déterminée; et avec cela, supposant $A B = x$, et $C B = y$, on trouve par la façon ci-dessus expliquée.

$$y^2 = 2y - xy + 5x - x^2, \\ y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}x^2},$$

si bien que $B K$ doit être 1, $K L$ doit être la moitié de $K I$; et pourceque l'angle $I K L$ ou $A B R$ est de 60 degrés, et $K I L$ qui est la moitié de $K I B$ ou $I K L$, de 30, $I L K$ est droit. Et pourceque $I K$ ou $A B$ est nommée x , $K L$ est $\frac{1}{2}x$,

et $I L$ est $x\sqrt{\frac{3}{4}}$, et la quantité qui étoit tantôt nommée z est 1, celle qui étoit a

est $\sqrt{\frac{3}{4}}$, celle qui étoit m est 1, celle qui étoit o est 4, et celle qui étoit p est $\frac{3}{4}$,

de façon qu'on a $\sqrt{\frac{16}{3}}$ pour $I M$, et $\sqrt{\frac{19}{3}}$ pour $N M$; et pourceque a^2m , qui est $\frac{3}{4}$, est ici égal à pz^2 , et que l'angle $I L C$ est droit, on trouve que la ligne courbe $N C$ est un cercle. Et on peut facilement examiner tous les autres cas en même sorte.

Au reste, à cause que les équations qui ne montent que jusqu'au carré sont toutes comprises en ce que je viens d'expliquer, non seulement le problème des anciens en trois et quatre lignes est ici entièrement achevé, mais aussi tout ce qui appartient à ce qu'ils nommoient la composition des lieux solides, et par conséquent aussi à celle des lieux plans, à cause qu'ils sont compris dans les solides : car ces lieux ne sont autre chose, sinon que, lorsqu'il est question de trouver quelque point auquel il manque une condition pour être entièrement déterminé, ainsi qu'il arrive en cet exemple, tous les points d'une même ligne peuvent être pris pour celui qui est demandé : et si cette ligne est droite ou circulaire, on la nomme un lieu plan ; mais si c'est une parabole, ou une hyperbole, ou une ellipse, on la nomme un lieu solide : et toutefois et quantes que cela est, on peut venir à une équation qui contient deux quantités inconnues, et est pareille à quelqu'une de celles que je viens de résoudre. Que si la ligne qui détermine ainsi le point cherché est d'un degré plus composée que les sections coniques, on la peut nommer, en même façon, un lieu sursolide, et ainsi des autres. Et s'il manque deux conditions à la détermination de ce point, le lieu où il se trouve est une superficie, laquelle peut être tout de même ou plate, ou sphérique, ou plus composée. Mais le plus haut but qu'aient eu les anciens en cette matière a été de parvenir à la composition des lieux solides ; et il semble que tout ce qu'Apollonius a écrit des sections coniques n'a été qu'à dessein de la chercher.

Quels sont les lieux plans et solides, et la façon de les trouver.

De plus, on voit ici que ce que j'ai pris pour le premier genre des lignes courbes n'en peut comprendre aucunes autres que le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse, qui est tout ce que j'avois entrepris de prouver.

Que si la question des anciens est proposée en cinq lignes qui soient toutes parallèles, il est évident que le point cherché sera toujours en une ligne droite ; mais si elle est proposée en cinq lignes, dont il y en ait quatre qui soient parallèles, et que la cinquième les coupe à angles droits, et même que toutes les lignes tirées du point cherché les rencontrent aussi à angles droits, et enfin que le parallélogramme composé de trois des lignes ainsi tirées sur trois de celles qui sont parallèles soit égal au parallélogramme composé des deux lignes tirées, l'une sur la quatrième de celles qui sont parallèles, et l'autre sur celle qui les coupe à angles droits, et d'une troisième ligne donnée, ce qui est, ce semble, le plus simple cas qu'on puisse imaginer après le précédent, le point cherché sera en la ligne courbe qui est décrite par le mouvement d'une parabole, en la façon ci-dessus expliquée.

Quelle est la première et la plus simple de toutes les lignes courbes en la question des anciens quand elle est proposée en cinq lignes.

Soient par exemple les lignes données AB , $I H$, ED , GF , et GA (*fig. 11*), et qu'on demande le point C , en sorte que tirant CB , CF , CD , CH et CM à angles droits sur les données, le parallélogramme des trois CF , CD , CH soit égal à celui des deux autres CB et CM , et d'une troisième qui soit AI . Je pose $CB = y$, $CM = x$, AI ou AE ou $GE = a$; de façon que le point C étant entre les lignes AB et DE , j'ai $CF = 2a - y$, $CD = a - y$, et $CH = y + a$; et multipliant ces trois l'une par l'autre, j'ai $y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3$ égal au produit des trois autres, qui est axy . Après cela je considère la ligne courbe CEG , que j'imagine être décrite par l'intersection de la parabole CKN , qu'on fait mouvoir en telle sorte que son diamètre KL est toujours sur la ligne droite AB ,

les pareilles lignes sont appliquées par ordre. Et je ne saurois véritablement dire que cette ligne soit moins simple que la précédente, laquelle j'ai cru toutefois devoir prendre pour la première, à cause que la description et le calcul en sont en quelque façon plus faciles.

Pour les lignes qui servent aux autres cas, je ne m'arrêterai point à les distinguer par espèces, car je n'ai pas entrepris de dire tout ; et, ayant expliqué la façon de trouver une infinité de points par où elles passent, je pense avoir assez donné le moyen de les décrire.

Même il est à propos de remarquer qu'il y a grande différence entre cette façon de trouver plusieurs points pour tracer une ligne courbe, et celle dont on se sert pour la spirale et ses semblables ; car par cette dernière on ne trouve pas indifféremment tous les points de la ligne qu'on cherche, mais seulement ceux qui peuvent être déterminés par quelque mesure plus simple que celle qui est requise pour la composer ; et ainsi, à proprement parler, on ne trouve pas un de ses points, c'est-à-dire pas un de ceux qui lui sont tellement propres qu'ils ne puissent être trouvés que par elle ; au lieu qu'il n'y a aucun point dans les lignes qui servent à la question proposée, qui ne se puisse rencontrer entre ceux qui se déterminent par la façon tantôt expliquée. Et pourceque cette façon de tracer une ligne courbe, en trouvant indifféremment plusieurs de ses points, ne s'étend qu'à celles qui peuvent aussi être décrites par un mouvement régulier et continu, on ne la doit pas entièrement rejeter de la géométrie.

Et on n'en doit pas rejeter non plus celle où on se sert d'un fil ou d'une corde repliée pour déterminer l'égalité ou la différence de deux ou plusieurs lignes droites qui peuvent être tirées de chaque point de la courbe qu'on cherche, à certains autres points, ou sur certaines autres lignes à certains angles, ainsi que nous avons fait en la Dioptrique pour expliquer l'ellipse et l'hyperbole ; car encore qu'on n'y puisse recevoir aucunes lignes qui semblent à des cordes, c'est-à-dire qui deviennent tantôt droites et tantôt courbes, à cause que la proportion qui est entre les droites et les courbes n'étant pas connue, et même, je crois, ne le pouvant être par les hommes, on ne pourroit rien conclure de là qui fût exact et assuré. Toutefois à cause qu'on ne se sert de cordes en ces constructions que pour déterminer des lignes droites dont on connoît parfaitement la longueur, cela ne doit point faire qu'on les rejette.

Or de cela seul qu'on sait le rapport qu'ont tous les points d'une ligne courbe à tous ceux d'une ligne droite, en la façon que j'ai expliquée, il est aisé de trouver aussi le rapport qu'ils ont à tous les autres points et lignes données ; et ensuite de connoître les diamètres, les essieux, les centres et autres lignes ou points à qui chaque ligne courbe aura quelque rapport plus particulier ou plus simple qu'aux autres ; et ainsi d'imaginer divers moyens pour les décrire, et d'en choisir les plus faciles ; et même on peut aussi, par cela seul, trouver quasi tout ce qui peut être déterminé touchant la grandeur de l'espace qu'elles comprennent, sans qu'il soit besoin que j'en donne plus d'ouverture. Et enfin pour ce qui est de toutes les autres propriétés qu'on peut attribuer aux lignes courbes, elles ne dépendent que de la grandeur des angles qu'elles font avec quelques autres lignes. Mais lorsqu'on peut tirer des lignes droites qui les coupent à angles droits, aux points où elles sont rencontrées par celles avec qui elles font les angles qu'on veut

Quelles sont les lignes courbes qu'on décrit en trouvant plusieurs de leurs points, qui peuvent être reçues en géométrie.

Quelles sont aussi celles qu'on décrit avec une corde, qui peuvent y être reçues.

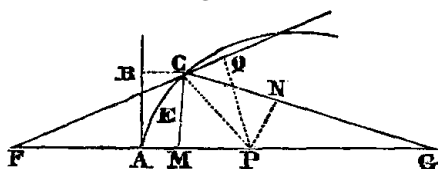
Que pour trouver toutes les propriétés des lignes courbes il suffit de savoir le rapport qu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites, et la façon de tirer d'autres lignes qui les coupent en tous ces points à angles droits.

mesurer, ou, ce que je prends ici pour le même, qui coupent leurs contingentes, la grandeur de ces angles n'est pas plus malaisée à trouver que s'ils étoient compris entre deux lignes droites. C'est pourquoi je croirai avoir mis ici tout ce qui est requis pour les éléments des lignes courbes, lorsque j'aurai généralement donné la façon de tirer des lignes droites qui tombent à angles droits sur tels de leurs points qu'on voudra choisir. Et j'ose dire que c'est ceci le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais désiré de savoir en géométrie.

Soit CE (*fig. 12*) la ligne courbe, et qu'il faille tirer une ligne droite par le point C , qui fasse avec elle des angles droits. Je suppose la chose déjà faite,

Façon générale pour trouver des lignes droites, qui coupent les courbes données ou leurs contingentes, à angles droits.

Fig. 12.



et que la ligne cherchée est CP , laquelle je prolonge jusqu'au point P , où elle rencontre la ligne droite GA , que je suppose être celle aux points de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne CE ; en sorte que faisant MA on $CB = y$, et CM ou $BA = x$, j'ai quelque équation qui explique le rapport qui est entre x et y ; puis je fais $PC = s$, et $PA = v$, ou $PM = v - y$; et à cause du triangle rectangle PMC , j'ai s^2 , qui est le carré de la base, égal à $x^2 + v^2 - 2vy + y^2$, qui sont les carrés des deux côtés; c'est-à-dire j'ai

$$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2},$$

ou bien

$$y = v + \sqrt{s^2 - x^2};$$

et par le moyen de cette équation, j'ôte de l'autre équation, qui m'explique le rapport qu'ont tous les points de la courbe CE à ceux de la droite GA , l'une des deux quantités indéterminées x ou y ; ce qui est aisé à faire en mettant partout

$$\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$$

au lieu de x , et le carré de cette somme au lieu de x^2 , et son cube au lieu de x^3 , et ainsi des autres, si c'est x que je veuille ôter; ou bien si c'est y , en mettant en son lieu

$$v + \sqrt{s^2 - x^2},$$

et le carré ou le cube, etc., de cette somme au lieu de y^2 ou y^3 , etc. De façon qu'il reste toujours après cela une équation en laquelle il n'y a plus qu'une seule quantité indéterminée x ou y . Comme si CE est une ellipse, et que MA soit le segment de son diamètre, auquel CM soit appliquée par ordre, et qui ait r

pour son côté droit et q pour le traversant, on a, par le treizième théorème du premier livre d'Apollonius, $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$, d'où ôtant x^2 , il reste

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2,$$

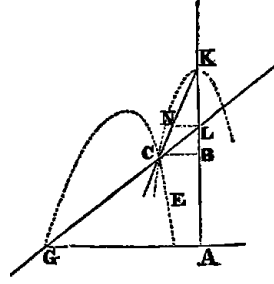
ou bien

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r} = 0;$$

car il est mieux en cet endroit de considérer ainsi ensemble toute la somme que d'en faire une partie égale à l'autre.

Tout de même si CE (*fig. 13*) est la ligne courbe décrite par le mouvement d'une parabole en la façon ci-dessus expliquée (page 13), et qu'on ait posé b

Fig. 13.



pour GA , c pour KL , et d pour le côté droit du diamètre KL en la parabole, l'équation qui explique le rapport qui est entre x et y est

$$y^3 - by^2 - cdy + bcd + dxy = 0,$$

d'où ôtant x on a

$$y^3 - by^2 - cdy + bcd + dy\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2} = 0;$$

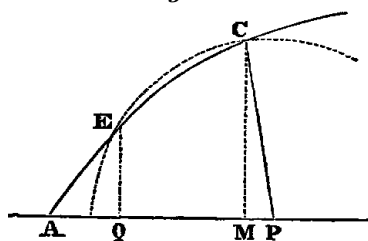
et remettant en ordre ces termes par le moyen de la multiplication, il vient

$$y^6 - 2by^5 + (b^2 - 2cd + d^2)y^4 + (4bcd - 2d^2v)y^3 + (c^2d^2 - d^2s^2 + d^2v^2 - 2b^2cd)y^2 - 2bc^2d^2y + b^2c^2d^2 = 0,$$

et ainsi des autres. Même, encore que les points de la ligne courbe ne se rapportassent pas en la façon que j'ai dit à ceux d'une ligne droite, mais en toute autre qu'on sauroit imaginer, on ne laisse pas de pouvoir toujours avoir une telle équation. Comme si CE (*fig. 14*) est une ligne qui ait tel rapport aux trois points F , G et A , que les lignes droites tirées de chacun de ses points comme C jusques au point F , surpassent la ligne FA d'une quantité qui ait certaine proportion donnée à une autre quantité dont GA surpasse les lignes

seulement au point C , mais aussi nécessairement en quelque autre. Puis il faut aussi considérer que lorsque ce cercle coupe la ligne courbe CE , l'équation par laquelle on cherche la quantité x ou y , ou quelque autre semblable, en supposant PA et PC être connues, contient nécessairement deux racines qui sont inégales. Car par exemple, si ce cercle coupe la courbe aux points C et E (*fig. 15*), ayant tiré EQ parallèle à CM , les noms des quantités indéterminées x et y conviendront aussi bien aux lignes EQ et QA qu'à CM et MA ; puis PE est égale à PC à cause du cercle, si bien que cherchant les lignes EQ et QA , par PE et PA qu'on suppose comme données, on aura la même équation que si on cherchoit

Fig. 15.



CM et MA par PC , PA ; d'où il suit évidemment que la valeur de x ou de y , ou de telle autre quantité qu'on aura supposée, sera double en cette équation, c'est-à-dire qu'il y aura deux racines inégales entre elles, et dont l'une sera CM , l'autre EQ , si c'est x qu'on cherche, ou bien l'une sera MA et l'autre QA , si c'est y ; et ainsi des autres. Il est vrai que si le point E ne se trouve pas du même côté de la courbe que le point C , il n'y aura que l'une de ces deux racines qui soit vraie, et l'autre sera renversée ou moindre que rien : mais plus ces deux points C et E sont proches l'un de l'autre, moins il y a de différence entre ces deux racines; et enfin elles sont entièrement égales, s'ils sont tous deux joints en un, c'est-à-dire si le cercle qui passe par C y touche la courbe CE sans la couper.

De plus il faut considérer que lorsqu'il y a deux racines égales en une équation, elle a nécessairement la même forme que si on multiplie par soi-même la quantité qu'on y suppose être inconnue, moins la quantité connue qui lui est égale, et qu'après cela, si cette dernière somme n'a pas tant de dimensions que la précédente, on la multiplie par une autre somme qui en ait autant qu'il lui en manque, afin qu'il puisse y avoir séparément équation entre chacun des termes de l'une et chacun des termes de l'autre.

Comme par exemple, je dis que la première équation trouvée ci-dessus, à savoir

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r},$$

doit avoir la même forme que celle qui se produit en faisant e égal à y , et multipliant $y - e$ par soi-même, d'où il vient $y^2 - 2ey + e^2$, en sorte qu'on peut comparer séparément chacun de leurs termes, et dire que puisque le premier qui est y^2 , est tout le même en l'une qu'en l'autre, le second qui est en l'une

$\frac{qry - 2qvy}{q - r}$, est égal au second de l'autre qui est $-2ey$; d'où cherchant la quantité v qui est la ligne PA , on a $v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$, ou bien à cause que nous avons supposé e égal à y , on a $v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. Et ainsi on pourroit trouver s par le troisième terme $e^2 = \frac{qv^2 - qs^2}{q - r}$; mais pourceque la quantité v détermine assez le point P , qui est le seul que nous cherchions, on n'a pas besoin de passer outre.

Tout de même la seconde équation trouvée ci-dessus, à savoir

$$y^6 - 2by^5 + (b^2 - 2cd + d^2)y^4 + (4bcd - 2d^2v)y^3 + (c^2d^2 - 2b^2cd + d^2v^2 - d^2s^2)y^2 - 2bc^2d^2y + b^2c^2d^2,$$

doit avoir même forme que la somme qui se produit lorsqu'on multiplie

$$y^2 - 2ey + e^2 \quad \text{par} \quad y^4 + fy^3 + g^2y^2 + h^3y + k^4$$

qui est

$$y^6 + (f - 2e)y^5 + (g^2 - 2ef + e^2)y^4 + (h^3 - 2eg^2 + e^2f)y^3 + (k^4 - 2eh^3 + e^2g^2)y^2 + (e^2h^3 - 2ek^4)y + e^2k^4;$$

de façon que de ces deux équations j'en tire six autres qui servent à connoître les six quantités f, g, h, k, v et s . D'où il est fort aisé à entendre que, de quelque genre que puisse être la ligne courbe proposée, il vient toujours par cette façon de procéder autant d'équations qu'on est obligé de supposer de quantités qui sont inconnues. Mais pour démêler par ordre ces équations, et trouver enfin la quantité v , qui est la seule dont on a besoin, et à l'occasion de laquelle on cherche les autres, il faut premièrement par le second terme chercher f , la première des quantités inconnues de la dernière somme, et on trouve

$$f = 2e - 2b.$$

Puis par le dernier, il faut chercher k , la dernière des quantités inconnues de la même somme, et on trouve

$$k^4 = \frac{b^2c^2d^2}{e^2}.$$

Puis par le troisième terme, il faut chercher g , la seconde quantité, et on a

$$g^2 = 3e^2 - 4be - 2cd + b^2 + d^2.$$

Puis par la pénultième, il faut chercher h , la pénultième quantité, qui est

$$h^3 = \frac{2b^2c^2d^2}{e^3} - \frac{2bc^2d^2}{e^2}.$$

Et ainsi il faudroit continuer suivant ce même ordre jusques à la dernière, s'il y en avoit d'avantage en cette somme ; car c'est chose qu'on peut toujours faire en même façon.

Puis, par le terme qui suit en ce même ordre, qui est ici le quatrième, il faut chercher la quantité v , et on a

$$v = \frac{2e^3}{d^2} - \frac{3be^2}{d^2} + \frac{b^2e}{d^2} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bc^2}{e^2} - \frac{b^2c^2}{e^3};$$

ou mettant y au lieu de e qui lui est égal, on a

$$v = \frac{2y^3}{d^2} - \frac{3by^2}{d^2} + \frac{b^2y}{d^2} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bc^2}{y^2} - \frac{b^2c^2}{y^3}$$

pour la ligne AP .

Et ainsi la troisième équation, qui est

$$z^2 + \frac{2bcd^2z - 2bcdez - 2cd^2vz - 2bdevz - bd^2s^2 + bd^2v^2 - cd^2s^2 + cd^2v^2}{bd^2 + ce^2 + e^2v - d^2v}$$

a la même forme que

$$z^2 - 2fz + f^2,$$

en supposant f égal à z , si bien qu'il y a derechef équation entre $-2f$ ou $-2z$, et

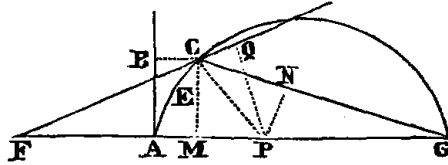
$$\frac{2bcd^2 - 2bcde - 2cd^2v - 2bdev}{bd^2 + ce^2 + e^2v - d^2v},$$

d'où on connoît que la quantité v est

$$\frac{bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z}.$$

C'est pourquoi, composant la ligne AP (*fig. 16*) de cette somme égale à v , dont toutes les quantités sont connues, et tirant du point P ainsi trouvé, une

Fig. 16.



ligne droite vers C , elle y coupe la courbe CE à angles droits ; qui est ce qu'il falloit faire. Et je ne vois rien qui empêche qu'on n'étende ce problème en même façon à toutes les lignes courbes qui tombent sous quelque calcul géométrique.

Même il est à remarquer, touchant la dernière somme, qu'on prend à discrétion pour remplir le nombre des dimensions de l'autre somme lorsqu'il y en

Je n'ajoute point les constructions par lesquelles on peut décrire les contingentes ou les perpendiculaires cherchées, ensuite du calcul que je viens d'expliquer, à cause qu'il est toujours aisé de les trouver, bien que souvent on ait besoin d'un peu d'adresse pour les rendre courtes et simples.

Exemple de la
construction de ce
problème en la
conchoïde.

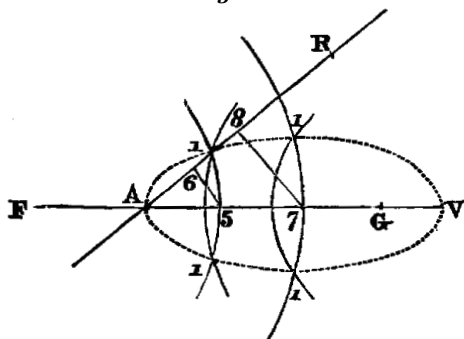
Au reste, afin que vous sachiez que la considération des lignes courbes ici proposée n'est pas sans usage, et qu'elles ont diverses propriétés qui ne cèdent en rien à celles des sections coniques, je veux encore ajouter ici l'explication de certaines ovales que vous verrez être très utiles pour la théorie de la catoptrique et de la dioptrique. Voici la façon dont je les décris :

Explication de
quatre nouveaux
genres d'ovales qui
servent à
l'optique.

30

un cercle qui passe quelque peu au-delà du point A , comme par le point 5 ; puis de ce point 5 je tire la ligne droite 5 6, qui coupe l'autre au point 6, en sorte que $A 6$ soit moindre que $A 5$ selon telle proportion donnée qu'on veut, à savoir

Fig. 18.

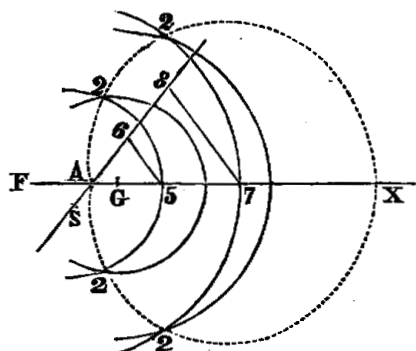


selon celle qui mesure les réfractions si on s'en veut servir pour la dioptrique. Après cela je prends aussi le point G en la ligne FA du côté où est le point 5, à discrétion, c'est-à-dire en faisant que les lignes AF et GA ont entre elles telle proportion donnée qu'on veut. Puis je fais RA égale à GA en la ligne $A 6$, et du centre G décrivant un cercle dont le rayon soit égal à $R 6$, il coupe l'autre cercle de part et d'autre au point 1, qui est l'un de ceux par où doit passer la première des ovales cherchées. Puis derechef du centre F je décris un cercle qui passe un peu au-deçà ou au-delà du point 5, comme par le point 7, et ayant tiré la ligne droite 7 8 parallèle à 5 6, du centre G je décris un autre cercle dont le rayon est égal à la ligne $R 8$, et ce cercle coupe celui qui passe par le point 7 au point 1, qui est encore l'un de ceux de la même ovale ; et ainsi on en peut trouver autant d'autres qu'on voudra, en tirant derechef d'autres lignes parallèles à 7 8, et d'autres cercles des centres F et G .

Pour la seconde ovale il n'y a point de différence, sinon qu'au lieu de AR (*fig. 19*) il faut de l'autre côté du point A prendre AS égal à AG , et que le rayon du cercle décrit du centre G , pour couper celui qui est décrit du centre F et qui passe par le point 5, soit égal à la ligne $S 6$, ou qu'il soit égal à $S 8$, si c'est pour couper celui qui passe par le point 7, et ainsi des autres ; au moyen de quoi ces cercles s'entre-coupent aux points marqués 2, 2, qui sont ceux de cette seconde ovale $A 2 X$.

Pour la troisième et la quatrième, au lieu de la ligne AG il faut prendre AH (*fig. 21 et 22*) de l'autre côté du point A , à savoir du même qu'est le point F ; et il y a ici de plus à observer que cette ligne AH doit être plus grande que AF , laquelle peut même être nulle, en sorte que le point F se rencontre où est le point A en la description de toutes ces ovales. Après cela les lignes AR et AS étant égales à AH , pour décrire la troisième ovale $A 3 Y$, je fais un cercle du centre H , dont le rayon est égal à $S 6$, qui coupe au point 3 celui du centre F , qui passe par le point 5 ; et un autre dont le rayon est égal à $S 8$, qui coupe celui qui passe par le point 7 au point aussi marqué 3, et ainsi des autres. Enfin, pour

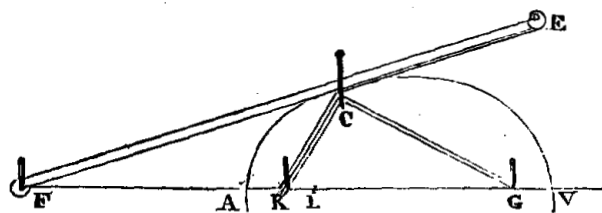
Fig. 19.



la dernière ovale, je fais des cercles du centre H , dont les rayons sont égaux aux lignes $R6$, $R8$, et semblables, qui coupent les autres cercles aux points marqués 4.

On pourroit encore trouver une infinité d'autres moyens pour décrire ces mêmes ovales; comme par exemple, on peut tracer la première AV (fig. 20), lorsqu'on suppose les lignes FA et AG être égales, si on divise la toute FG au

Fig. 20.



point L , en sorte que FL soit à LG comme $A5$ à $A6$, c'est-à-dire qu'elles aient la proportion qui mesure les réfractions. Puis ayant divisé AL en deux parties égales au point K , qu'on fasse tourner une règle comme EF autour du point F , en pressant du doigt C la corde EC , qui étant attachée au bout de cette règle vers E , se replie de C vers K , puis de K derechef vers C , et de C vers G , où son autre bout soit attaché, en sorte que la longueur de cette corde soit composée de celle des lignes GA , plus AL , plus FE , moins AF ; et ce sera le mouvement du point C qui décrira cette ovale, à l'imitation de ce qui a été dit en la dioptrique de l'ellipse et de l'hyperbole; mais je ne veux point m'arrêter plus long-temps sur ce sujet.

Or, encore que toutes ces ovales semblent être quasi de même nature, elles sont néanmoins de quatre divers genres, chacun desquels contient sous soi une infinité d'autres genres, qui derechef contiennent chacun autant de diverses espèces que fait le genre des ellipses ou celui des hyperboles; car selon que la proportion

qui est entre les lignes $A5$, $A6$, ou semblables, est différente, le genre subalterne de ces ovales est différent ; puis selon que la proportion qui est entre les lignes AF et AG ou AH est changée, les ovales de chaque genre subalterne changent d'espèce ; et selon que AG ou AH est plus ou moins grande, elles sont diverses en grandeur ; et si les lignes $A5$ et $A6$ sont égales, au lieu des ovales du premier genre ou du troisième, on ne décrit que des lignes droites ; mais au lieu de celles du second on a toutes les hyperboles possibles, et au lieu de celles du dernier toutes les ellipses.

Outre cela, en chacune de ces ovales il faut considérer deux parties qui ont diverses propriétés : à savoir en la première, la partie qui est vers A (*fig. 18*), fait que les rayons qui étant dans l'air viennent du point F , se retournent tous vers le point G , lorsqu'ils rencontrent la superficie convexe d'un verre dont la superficie est $1A1$, et dans lequel les réfractions se font telles que, suivant ce qui a été dit en la Dioptrique, elles peuvent toutes être mesurées par la proportion qui est entre les lignes $A5$ et $A6$ ou semblables, par l'aide desquelles on a décrit cette ovale.

Les propriétés de
ces ovales
touchant les
réflexions et les
réfractions.

Mais la partie qui est vers V fait que les rayons qui viennent du point G se réfléchiroient tous vers F , s'ils y rencontroient la superficie concave d'un miroir dont la figure fût $1V1$, et qui fût de telle matière qu'il diminuât la force de ces rayons selon la proportion qui est entre les lignes $A5$ et $A6$; car de ce qui a été démontré en la Dioptrique, il est évident que, cela posé, les angles de la réflexion seroient inégaux, aussi bien que sont ceux de la réfraction, et pourroient être mesurés en même sorte.

En la seconde ovale la partie $2A2$ (*fig. 19*) sert encore pour les réflexions dont on suppose les angles être inégaux ; car étant en la superficie d'un miroir composé de même matière que le précédent, elle feroit tellement réfléchir tous les rayons qui viendroient du point G , qu'ils sembleroient après être réfléchis venir du point F . Et il est à remarquer qu'ayant fait la ligne AG beaucoup plus grande que AF , ce miroir seroit convexe au milieu vers A , et concave aux extrémités ; car telle est la figure de cette ligne, qui en cela représente plutôt un cœur qu'une ovale.

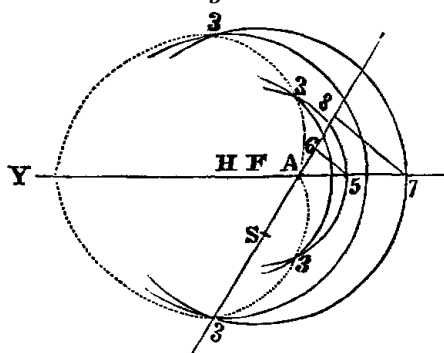
Mais son autre partie $X2$ sert pour les réfractions, et fait que les rayons qui étant dans l'air tendent vers F , se détournent vers G en traversant la superficie d'un verre qui en ait la figure.

La troisième ovale sert toute aux réfractions, et fait que les rayons qui étant dans l'air tendent vers F (*fig. 21*), se vont rendre vers H dans le verre, après qu'ils ont traversé sa superficie dont la figure est $A3Y3$, qui est convexe partout, excepté vers A où elle est un peu concave, en sorte qu'elle a la figure d'un cœur aussi bien que la précédente ; et la différence qui est entre les deux parties de cette ovale consiste en ce que le point F est plus proche de l'une que n'est le point H , et qu'il est plus éloigné de l'autre que ce même point H .

En même façon la dernière ovale sert toute aux réflexions, et fait que si les rayons qui viennent du point H (*fig. 22*) rencontroient la superficie concave d'un miroir de même matière que les précédents, et dont la figure fût $A4Z4$, ils se réfléchiroient tous vers F .

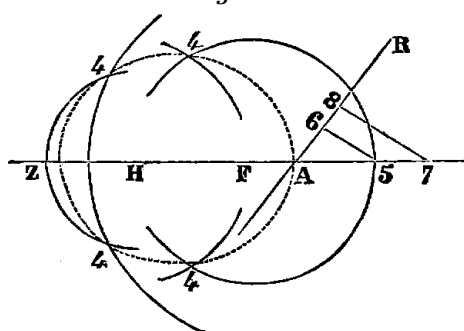
De façon qu'on peut nommer les points F et G ou H les points brûlants de

Fig. 21.



ces ovals, à l'exemple de ceux des ellipses et des hyperboles, qui ont été ainsi nommés en la Dioptrique.

Fig. 22.



J'ometts quantité d'autres réfractions et réflexions qui sont réglées par ces mêmes ovals, car n'étant que les converses ou les contraires de celles-ci, elles en peuvent facilement être déduites. Mais il ne faut pas que j'omette la démonstration de ce que j'ai dit ; et à cet effet prenons, par exemple, le point *C* (*fig. 16*) à discrétion en la première partie de la première de ces ovals ; puis tirons la ligne droite *CP* qui coupe la courbe au point *C* à angles droits, ce qui est facile par le problème précédent ; car prenant *b* pour *AG*, *c* pour *AF*, *c + z* pour *CF*, et supposant que la proportion qui est entre *d* et *e*, que je prendrai ici toujours pour celle qui mesure les réfractions du verre proposé, désigne aussi celle qui est entre les lignes *A5* et *A6* ou semblables, qui ont servi pour décrire cette ovale, ce qui donne $b - \frac{e}{d}z$ pour *CG*, on trouve que la ligne *AP* est

Démonstration
des propriétés de
ces ovals
touchant les
réflexions et
réfractions.

$$\frac{bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z},$$

ainsi qu'il a été montré ci-dessus (p. 29). De plus, du point *P* ayant tiré *PQ* à

angles droits sur la droite CF , et PN aussi à angles droits sur CG , considérons que si PQ est à PN comme d est à e , c'est-à-dire comme les lignes qui mesurent les réfractions du verre convexe AC , le rayon qui vient du point F au point C , doit tellement s'y courber en entrant dans ce verre, qu'il s'aïlle rendre après vers G , ainsi qu'il est très évident de ce qui a été dit en la Dioptrique. Puis enfin voyons par le calcul s'il est vrai que PQ soit à PN comme d est à e . Les triangles rectangles PQF et CMF sont semblables; d'où il suit que CF est à CM comme FP est à PQ , et par conséquent que PF étant multipliée par CM et divisée par CF est égale à PQ . Tout de même les triangles rectangles PNG et CMG sont semblables; d'où il suit que GP multipliée par CM et divisée par CG est égale à PN . Puis à cause que les multiplications ou divisions qui se font de deux quantités par une même ne changent point la proportion qui est entre elles, si PF multipliée par CM et divisée par CF , est à GP multipliée aussi par CM et divisée par CG , comme d est à e , en divisant l'une et l'autre de ces deux sommes par CM , puis les multipliant toutes deux par CF et derechef par CG , il reste EP multipliée par CG qui doit être à GP multipliée par CF , comme d est à e . Or par la construction FP est

$$c + \frac{bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z},$$

ou bien

$$FP = \frac{bcd^2 + c^2d^2 + bd^2z + cd^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z},$$

et CG est $b - \frac{e}{d}z$; si bien que, multipliant FP par CG , il vient

$$\frac{b^2cd^2 + bc^2d^2 + b^2d^2z + bcd^2z - bcdez - c^2dez - bdez^2 - cdez^2}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z},$$

puis GP est

$$b - \frac{bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z},$$

ou bien

$$GP = \frac{b^2de + bcde - be^2z - ce^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z},$$

et CF est $c + z$; si bien qu'en multipliant GP par CF il vient

$$\frac{b^2cde + bc^2de + b^2dez + bcdez - bce^2z - c^2e^2z - be^2z^2 - ce^2z^2}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z}.$$

Et pourceque la première de ces sommes divisée par d est la même que la seconde divisée par e , il est manifeste que FP multipliée par CG , est à GP multipliée par CF , c'est-à-dire que PQ est à PN comme d est à e , qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

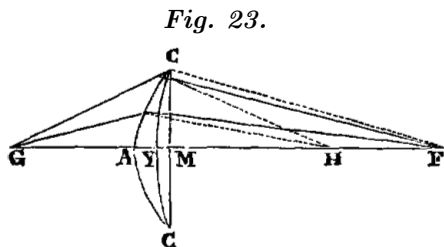
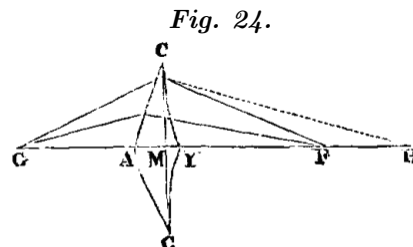
Et sachez que cette même démonstration s'étend à tout ce qui a été dit des autres réfractions ou réflexions qui se font dans les ovales proposées, sans qu'il

y faille changer aucune chose que les signes $+$ et $-$ du calcul; c'est pourquoi chacun les peut aisément examiner de soi-même, sans qu'il soit besoin que je m'y arrête.

Mais il faut maintenant que je satisfasse à ce que j'ai omis en la Dioptrique, lorsqu'après avoir remarqué qu'il peut y avoir des verres de plusieurs diverses figures qui fassent aussi bien l'un que l'autre que les rayons venant d'un même point de l'objet s'assemblent tous en un autre point après les avoir traversés; et qu'entre ces verres, ceux qui sont fort convexes d'un côté et concaves de l'autre ont plus de force pour brûler que ceux qui sont également convexes des deux côtés; au lieu que tout au contraire ces derniers sont les meilleurs pour les lunettes. Je me suis contenté d'expliquer ceux que j'ai cru être les meilleurs pour la pratique, en supposant la difficulté que les artisans peuvent avoir à les tailler. C'est pourquoi, afin qu'il ne reste rien à souhaiter touchant la théorie de cette science, je dois expliquer encore ici la figure des verres qui, ayant l'une de leurs superficies autant convexe ou concave qu'on voudra, ne laissent pas de faire que tous les rayons qui viennent vers eux d'un même point, ou parallèles, s'assemblent après en un même point; et celles des verres qui font le semblable, étant également convexes des deux côtés, ou bien la convexité de l'une de leurs superficies ayant la proportion donnée à celle de l'autre.

Posons pour le premier cas, que les points G , Y , C et F (*fig. 23 et 24*) étant donnés, les rayons qui viennent du point G ou bien qui sont parallèles à GA se doivent assembler au point F , après avoir traversé un verre si concave, que Y étant le milieu de sa superficie intérieure; l'extrémité en soit au point C , en sorte que la corde CMC et la flèche YM de l'arc CYC sont données. La question va là, que premièrement il faut considérer de laquelle des ovales expliquées la

Comment on peut faire un verre autant convexe ou concave, en l'une de ses superficies, qu'on voudra qui rassemble à un point donné tous les rayons qui viennent d'un autre point donné.



superficie du verre YC doit avoir la figure, pour faire que tous les rayons qui étant dedans tendent vers un même point, comme vers H , qui n'est pas encore connu, s'aillent rendre vers un autre, à savoir vers F , après en être sortis. Car il n'y a aucun effet touchant le rapport des rayons, changé par réflexion ou réfraction d'un point à un autre, qui ne puisse être causé par quelqu'une de ces ovales; et on voit aisément que celui-ci le peut être par la partie de la troisième ovale qui a tantôt été marquée $3A3$ (*fig. 21*), ou par celle de la même qui a été marquée $3Y3$, ou enfin par la partie de la seconde qui a été marquée $2X2$ (*fig. 19*). Et pourceque ces trois tombent ici sous même calcul, on doit, tant pour l'une que pour l'autre, prendre Y (*fig. 23 et 24*) pour leur sommet, C pour l'un des points de leur circonférence, et F pour l'un de leurs points brûlants;

après quoi il ne reste plus à chercher que le point H qui doit être l'autre point brûlant. Et on le trouve en considérant que la différence qui est entre les lignes FY et FC doit être à celle qui est entre les lignes HY et HC comme d est à e , c'est-à-dire comme la plus grande des lignes qui mesurent les réfractions du verre proposé est à la moindre, ainsi qu'on peut voir manifestement de la description de ces ovales. Et pourceque les lignes FY et FC sont données, leur différence l'est aussi, et ensuite celle qui est entre HY et HC , pourceque la proportion qui est entre ces deux différences est donnée. Et de plus, à cause que YM est donnée, la différence qui est entre MH et HC l'est aussi ; et enfin pourceque CM est donnée, il ne reste plus qu'à trouver MH le côté du triangle rectangle CMH dont on a l'autre côté CM , et on a aussi la différence qui est entre CH la base et MH le côté demandé ; d'où il est aisé de le trouver : car si on prend k pour l'excès de CH sur MH , et n pour la longueur de la ligne CM , on aura $\frac{n^2}{2k} - \frac{1}{2}k$ pour MH . Et après avoir ainsi le point H , s'il se trouve plus loin du point Y (fig. 24) que n'en est le point F , la ligne CY doit être la première partie de l'ovale du troisième genre, qui a tantôt été nommée 3 A 3 (fig. 21). Mais si HY (fig. 23) est moindre que FY : ou bien elle surpasse HF de tant, que leur différence est plus grande à raison de la toute FY que n'est e la moindre des lignes qui mesurent les réfractions comparée avec d la plus grande, c'est-à-dire que faisant $HF = c$, et $HY = c + h$, dh est plus grande que $2ce + eh$, et lors CY doit être la seconde partie de la même ovale du troisième genre, qui a tantôt été nommée 3 Y 3 (fig. 21) : ou bien dh est égale ou moindre que $2ce + eh$, et lors CY (fig. 23) doit être la seconde partie de l'ovale du second genre, qui a ci-dessus été nommée 2 X 2 (fig. 19) : et enfin si le point H (fig. 23) est le même que le point F , ce qui n'arrive que lorsque FY et FC sont égales, cette ligne YC est un cercle.

Après cela il faut chercher CAC l'autre superficie de ce verre, qui doit être une ellipse dont H soit le point brûlant, si on suppose que les rayons qui tombent dessus soient parallèles ; et lors il est aisé de la trouver. Mais si on suppose qu'ils viennent du point G , ce doit être la première partie d'une ovale du premier genre dont les deux points brûlants soient G et H , et qui passe par le point C ; d'où on trouve le point A pour le sommet de cette ovale, en considérant que GC doit être plus grande que GA d'une quantité qui soit à celle dont HA surpasse HC , comme d à e ; car ayant pris k pour la différence qui est entre CH et HM , si on suppose x pour AM , on aura $x - k$ pour la différence qui est entre AH et CH ; puis si on prend g pour celle qui est entre GC et GM qui sont données, on aura $g + x$ pour celle qui est entre GC et GA ; et pourceque cette dernière $g + x$ est à l'autre $x - k$ comme d est à e , on a

$$ge + ex = dx - dk,$$

ou bien $\frac{ge + dk}{d - e}$ pour la ligne x ou AM , par laquelle on détermine le point A qui étoit cherché.

Posons maintenant pour l'autre cas, qu'on ne donne que les points G , C et F (fig. 24), avec la proportion qui est entre les lignes AM et YM , et qu'il faille

trouver la figure du verre ACY qui fasse que tous les rayons qui viennent du point G s'assemblent au point F .

On peut derechef ici se servir de deux ovales dont l'une AC ait G et H pour ses points brûlants, et l'autre CY ait F et H pour les siens. Et pour les trouver, premièrement, supposant le point H , qui est commun à toutes deux, être connu, je cherche AM par les trois points G, C, H , en la façon tout maintenant expliquée, à savoir, prenant k pour la différence qui est entre CH et HM , et g pour celle qui est entre GC et GM , et AC étant la première partie de l'ovale du premier genre, j'ai $\frac{ge + dk}{d - e}$ pour AM ; puis je cherche aussi MY par les trois points F, C, H , en sorte que CY soit la première partie d'une ovale du troisième genre; et prenant y pour MY , et f pour la différence qui est entre CF et FM , j'ai $f + y$ pour celle qui est entre CF et FY ; puis ayant déjà k pour celle qui est entre CH et HM , j'ai $k + y$ pour celle qui est entre CH et HY , que je sais devoir être à $f + y$ comme e est à d , à cause de l'ovale du troisième genre, d'où je trouve que y ou MY est $\frac{fe - dk}{d - e}$; puis joignant ensemble les deux quantités trouvées pour AM et MY , je trouve $\frac{ge + fe}{d - e}$ pour la toute AY : d'où il suit que, de quelque côté que soit supposé le point H , cette ligne AY est toujours composée d'une quantité qui est à celle dont les deux ensemble GC et CF surpassent la toute GF , comme e , la moindre des deux lignes qui servent à mesurer les réfractions du verre proposé, est à $d - e$ la différence qui est entre ces deux lignes, ce qui est un assez beau théorème. Or, ayant ainsi la toute AY , il la faut couper selon la proportion que doivent avoir ses parties AM et MY ; au moyen de quoi, pourcequ'on a déjà le point M , on trouve aussi les points A et Y , et ensuite le point H par le problème précédent. Mais auparavant il faut regarder si la ligne AM ainsi trouvée est plus grande que $\frac{ge}{d - e}$, ou plus petite, ou égale. Car si elle est plus grande, on apprend de là que la courbe AC doit être la première partie d'une ovale du premier genre, et CY la première d'une du troisième, ainsi qu'elles ont été ici supposées; au lieu que si elle est plus petite, cela montre que c'est CY qui doit être la première partie d'une ovale du premier genre, et que AC doit être la première d'une du troisième; enfin si AM est égale à $\frac{ge}{d - e}$, les deux courbes AC et CY doivent être deux hyperboles.

On pourroit étendre ces deux problèmes à une infinité d'autres cas que je ne m'arrête pas à déduire, à cause qu'ils n'ont eu aucun usage en la dioptrique.

On pourroit aussi passer outre et dire (lorsque l'une des superficies du verre est donnée, pourvu qu'elle ne soit que toute plate, ou composée de sections coniques ou de cercles) comment on doit faire son autre superficie, afin qu'il transmette tous les rayons d'un point donné à un autre point aussi donné; car ce n'est rien de plus difficile que ce que je viens d'expliquer, ou plutôt c'est chose beaucoup plus facile à cause que le chemin en est ouvert. Mais j'aime mieux que d'autres le cherchent, afin que s'ils ont encore un peu de peine à le trouver, cela leur fasse d'autant plus estimer l'invention des choses qui sont ici démontrées.

Comment on peut faire un verre qui ait le même effet que le précédent, et que la convexité de l'une de ses superficies ait la proportion donnée avec celle de l'autre.

Au reste je n'ai parlé en tout ceci que des lignes courbes qu'on peut décrire sur une superficie plate; mais il est aisé de rapporter ce que j'en ai dit à toutes celles qu'on sauroit imaginer être formées par le mouvement régulier des points de quelque corps dans un espace qui a trois dimensions : à savoir, en tirant deux perpendiculaires de chacun des points de la ligne courbe qu'on veut considérer, sur deux plans qui s'entre-coupent à angles droits, l'une sur l'un et l'autre sur l'autre; car les extrémités de ces perpendiculaires décrivent deux autres lignes courbes, une sur chacun de ces plans, desquelles on peut en la façon ci-dessus expliquée déterminer tous les points et les rapporter à ceux de la ligne droite qui est commune à ces deux plans, au moyen de quoi ceux de la courbe qui a trois dimensions sont entièrement déterminés. Même si on veut tirer une ligne droite qui coupe cette courbe au point donné à angles droits, il faut seulement tirer deux autres lignes droites dans les deux plans, une en chacun, qui coupent à angles droits les deux lignes courbes qui y sont aux deux points où tombent les perpendiculaires qui viennent de ce point donné; car ayant élevé deux autres plans, un sur chacune de ces lignes droites, qui coupe à angles droits le plan où elle est, on aura l'intersection de ces deux plans pour la ligne droite cherchée. Et ainsi je pense n'avoir rien omis des éléments qui sont nécessaires pour la connoissance des lignes courbes.

Comment on peut appliquer ce qui a été dit ici des lignes courbes, décrites sur une superficie plate, à celles qui se décrivent dans un espace qui a trois dimensions.

LIVRE TROISIÈME

DE LA CONSTRUCTION DES PROBLÈMES QUI SONT SOLIDES OU PLUS QUE SOLIDES.

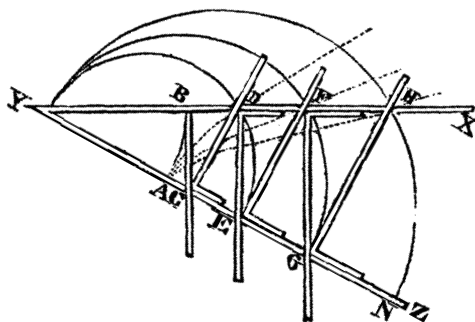
Encore que toutes les lignes courbes qui peuvent être décrites par quelque mouvement régulier doivent être reçues en la géométrie, ce n'est pas à dire qu'il soit permis de se servir indifféremment de la première qui se rencontre pour la construction de chaque problème, mais il faut avoir soin de choisir toujours la plus simple par laquelle il soit possible de le résoudre. Et même il est à remarquer que par les plus simples on ne doit pas seulement entendre celles qui peuvent le plus aisément être décrites, ni celles qui rendent la construction ou la démonstration du problème proposé plus facile, mais principalement celles qui sont du plus simple genre qui puisse servir à déterminer la quantité qui est cherchée.

Comme, par exemple, on ne sauroit pas qu'il y ait aucune façon plus facile pour

De quelles lignes courbes on peut se servir en la construction de chaque problème.

Exemple touchant l'invention de plusieurs moyennes proportionnelles.

25.



trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on veut, ni dont la démonstration soit plus évidente, que d'y employer les lignes courbes qui se décrivent par l'instrument XYZ (*fig. 25*) ci-dessus expliqué. Car, voulant trouver deux moyennes proportionnelles entre YA et YE , il ne faut que décrire un cercle dont le diamètre soit YE , et pourceque ce cercle coupe la courbe AD au point D , YD est l'une des moyennes proportionnelles cherchées, dont la démonstration se voit à l'œil par la seule application de cet instrument sur la ligne YD ; car, comme YA ou YB , qui lui est égale, est à YC , ainsi YC est à YD , et YD à YE .

Tout de même pour trouver quatre moyennes proportionnelles entre YA et YG , ou pour en trouver six entre YA et YN , il ne faut que tracer le cercle YFG qui, coupant AF au point F , détermine la ligne droite YF qui est l'une de ces quatre proportionnelles; ou YHN qui, coupant AH au point H , détermine YH l'une des six; et ainsi des autres.

Mais pourceque la ligne courbe AD est du second genre, et qu'on peut trouver deux moyennes proportionnelles par les sections coniques qui sont du

premier ; et aussi pourcequ'on peut trouver quatre ou six moyennes proportionnelles par des lignes qui ne sont pas de genres si composés que sont AF et AH , ce seroit une faute en géométrie que de les y employer. Et c'est une faute aussi, d'autre côté, de se travailler inutilement à vouloir construire quelque problème par un genre de lignes plus simple que sa nature ne permet.

Or, afin que je puisse ici donner quelques règles pour éviter l'une et l'autre de ces deux fautes, il faut que je die quelque chose en général de la nature des équations, c'est-à-dire des sommes composées de plusieurs termes partie connus et partie inconnus dont les uns sont égaux aux autres, ou plutôt qui, considérés tous ensemble, sont égaux à rien : car ce sera souvent le meilleur de les considérer en cette sorte.

De la nature des équations.

Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité ; car, par exemple, si on suppose x égale à 2, ou bien $x - 2$ égal à rien ; et derechef $x = 3$, ou bien $x - 3 = 0$; en multipliant ces deux équations

Combien il peut y avoir de racines en chaque équation.

$$x - 2 = 0, \quad \text{et} \quad x - 3 = 0,$$

l'une par l'autre, on aura

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

ou bien

$$x^2 = 5x - 6,$$

qui est une équation en laquelle la quantité x vaut 2 et tout ensemble vaut 3. Que si derechef on fait

$$x - 4 = 0,$$

et qu'on multiplie cette somme par

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

on aura

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

qui est une autre équation en laquelle x , ayant trois dimensions, a aussi trois valeurs, qui sont 2, 3 et 4.

Mais souvent il arrive que quelques unes de ces racines sont fausses ou moindres que rien ; comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité qui soit 5, on a

Quelles sont les fausses racines.

$$x + 5 = 0,$$

qui, étant multiplié par

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

fait

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois vraies qui sont 2, 3, 4, et une fausse qui est 5.

Et on voit évidemment de ceci que la somme d'une équation qui contient plusieurs racines peut toujours être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue moins la valeur de l'une des vraies racines, laquelle que ce soit, ou plus la valeur de l'une des fausses; au moyen de quoi on diminue d'autant ses dimensions.

Comment on peut diminuer le nombre des dimensions d'une équation lorsqu'on connoît quelqu'une de ses racines.

Et réciproquement que si la somme d'une équation ne peut être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue + ou - quelque autre quantité, cela témoigne que cette autre quantité n'est la valeur d'aucune de ses racines. Comme cette dernière

Comment on peut examiner si quelque quantité donnée est la valeur d'une racine.

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

peut bien être divisée par $x - 2$, et par $x - 3$, et par $x - 4$, et par $x + 5$, mais non point par $x +$ ou $-$ aucune autre quantité; ce qui montre qu'elle ne peut avoir que les quatre racines 2, 3, 4 et 5.

On connoît aussi de ceci combien il peut y avoir de vraies racines et combien de fausses en chaque équation : à savoir il y en peut avoir autant de vraies que les signes + et - s'y trouvent de fois être changés, et autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes + ou deux signes - qui s'entre-suivent. Comme en la dernière, à cause qu'après $+x^4$ il y a $-4x^3$, qui est un changement du signe + en -, et après $-19x^2$ il y a $+106x$, et après $+106x$ il y a -120 , qui sont encore deux autres changements, on connoît qu'il y a trois vraies racines; et une fausse, à cause que les deux signes - de $4x^3$ et $19x^2$ s'entre-suivent.

Combien il peut y avoir de vraies racines en chaque équation.

De plus, il est aisé de faire en une même équation que toutes les racines qui étoient fausses deviennent vraies, et par même moyen que toutes celles qui étoient vraies deviennent fausses, à savoir en changeant tous les signes + ou - qui sont en la seconde, en la quatrième, en la sixième, ou autres places qui se désignent par les nombres pairs, sans changer ceux de la première, de la troisième, de la cinquième, et semblables qui se désignent par les nombres impairs. Comme si, au lieu de

Comment on fait que les fausses racines d'une équation deviennent vraies, et les vraies fausses.

$$+x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

on écrit

$$+x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0,$$

on a une équation en laquelle il n'y a qu'une vraie racine qui est 5, et trois fausses qui sont 2, 3 et 4.

Que si, sans connoître la valeur des racines d'une équation, on la veut augmenter ou diminuer de quelque quantité connue, il ne faut qu'au lieu du terme inconnu en supposer un autre qui soit plus ou moins grand de cette même quantité, et le substituer partout en la place du premier.

Comment on peut augmenter ou diminuer les racines d'une équation sans les connoître.

Comme si on veut augmenter de 3 la racine de cette équation

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0,$$

il faut prendre y au lieu de x , et penser que cette quantité y est plus grande que x de 3, en sorte que $y - 3$ est égal à x ; et au lieu de x^2 il faut mettre le carré

de $y - 3$, qui est $y^2 - 6y + 9$; et au lieu de x^3 il faut mettre son cube qui est $y^3 - 9y^2 + 27y - 27$; et enfin au lieu de x^4 il faut mettre son carré de carré qui est $y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81$. Et ainsi, décrivant la somme précédente en substituant partout y au lieu de x , on a

$$\begin{array}{r}
 y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81 \\
 + 4y^3 - 36y^2 + 108y - 108 \\
 - 19y^2 + 114y - 171 \\
 - 106y + 318 \\
 - 120 \\
 \hline
 y^4 - 8y^3 - y^2 + 8y * (6) = 0,
 \end{array}$$

ou bien

$$y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0,$$

où la vraie racine qui étoit 5 est maintenant 8, à cause du nombre 3 qui lui est ajouté.

Que si on veut au contraire diminuer de trois la racine de cette même équation, il faut faire $y + 3 = x$, et $y^2 + 6y + 9 = x^2$ et ainsi des autres, de façon qu'au lieu de

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0,$$

on met

$$\begin{array}{r}
 y^4 + 12y^3 + 54y^2 + 108y + 81 \\
 + 4y^3 + 36y^2 + 108y + 108 \\
 - 19y^2 - 114y - 171 \\
 - 106y - 318 \\
 - 120 \\
 \hline
 y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0.
 \end{array}$$

Et il est à remarquer qu'en augmentant les vraies racines d'une équation on diminue les fausses de la même quantité, ou au contraire en diminuant les vraies on augmente les fausses; et que si on diminue, soit les unes, soit les autres, d'une quantité qui leur soit égale, elles deviennent nulles; et que si c'est d'une quantité qui les surpasse, de vraies elles deviennent fausses, ou de fausses vraies. Comme ici, en augmentant de 3 la vraie racine qui étoit 5, on a diminué de 3 chacune des fausses, en sorte que celle qui étoit 4 n'est plus que 1, et celle qui étoit 3 est nulle, et celle qui étoit 2 est devenue vraie et est 1, à cause que $-2 + 3$ fait $+1$: c'est pourquoi en cette équation

$$y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0$$

Qu'en augmentant les vraies racines on diminue les fausses, et au contraire.

(6)Descartes indique l'absence d'un terme par le signe * mis à la place de ce terme; nous l'ôterons comme inutile, de même que le facteur 1 qu'il laisse quelquefois.

il n'y a plus que trois racines, entre lesquelles il y en a deux qui sont vraies, 1 et 8, et une fausse qui est aussi 1 ; et en cette autre

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0,$$

il n'y en a qu'une vraie qui est 2, à cause que $+5 - 3$ fait $+2$, et trois fausses qui sont 5, 6 et 7.

Or par cette façon de changer la valeur des racines sans les connoître on peut faire deux choses qui auront ci-après quelque usage. La première est qu'on peut toujours ôter le second terme de l'équation qu'on examine, à savoir en diminuant les vraies racines de la quantité connue de ce second terme divisée par le nombre des dimensions du premier, si l'un de ces deux termes étant marqué du signe $+$, l'autre est marqué du signe $-$; ou bien en l'augmentant de la même quantité, s'ils ont tous deux le signe $+$ ou tous deux le signe $-$. Comme pour ôter le second terme de la dernière équation qui est

Comment on peut ôter le second terme d'une équation.

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0,$$

ayant divisé 16 par 4, à cause des quatre dimensions du terme y^4 , il vient derechef 4 ; c'est pourquoi je fais $z - 4 = y$, et j'écris

$$\begin{array}{r} z^4 - 16z^3 + 96z^2 - 256z + 256 \\ + 16z^3 - 192z^2 + 768z - 1024 \\ + 71z^2 - 568z + 1136 \\ - 4z + 16 \\ - 420 \\ \hline z^4 - 25z^2 - 60z - 36 = 0 \end{array}$$

où la vraie racine qui étoit 2 est 6, à cause qu'elle est augmentée de 4 ; et les fausses, qui étoient 5, 6 et 7, ne sont plus que 1, 2 et 3, à cause qu'elles sont diminuées chacune de 4.

Tout de même si on veut ôter le second terme de

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0,$$

pourceque divisant $2a$ par 4 il vient $\frac{1}{2}a$, il faut faire $z + \frac{1}{2}a = x$, et écrire

$$\begin{array}{r}
 z^4 + 2az^3 + \frac{3}{2}a^2z^2 + \frac{1}{2}a^3z + \frac{1}{16}a^4 \\
 - 2az^3 - 3a^2z^2 - \frac{3}{2}a^3z - \frac{1}{4}a^4 \\
 + 2a^2z^2 + 2a^3z + \frac{1}{2}a^4 \\
 - c^2z^2 - ac^2z - \frac{1}{4}a^2c^2 \\
 - 2a^3z - a^4 \\
 + a^4 \\
 \hline
 z^4 + \left(\frac{1}{2}a^2 - c^2\right)z^2 - (a^3 + ac^2)z + \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 = 0
 \end{array}$$

et si on trouve après la valeur de z , en lui ajoutant $\frac{1}{2}a$ on aura celle de x .

La seconde chose qui aura ci-après quelque usage est qu'on peut toujours, en augmentant la valeur des vraies racines d'une quantité qui soit plus grande que n'est celle d'aucune des fausses, faire qu'elles deviennent toutes vraies, en sorte qu'il n'y ait point deux signes $+$ ou deux signes $-$ qui s'entre-suivent, et outre cela que la quantité connue du troisième terme soit plus grande que le carré de la moitié de celle du second. Car encore que cela se fasse lorsque ces fausses racines sont inconnues, il est aisé néanmoins de juger à peu près de leur grandeur et de prendre une quantité qui les surpasse d'autant ou de plus qu'il n'est requis à cet effet. Comme si on a

Comment on peut faire que toutes les fausses racines d'une équation deviennent vraies sans que les vraies deviennent fausses.

$$x^6 + nx^5 - 6n^2x^4 + 36n^3x^3 - 216n^4x^2 + 1296n^5x - 7776n^6 = 0,$$

en faisant $y - 6n = x$ on trouvera

$$\begin{array}{r}
 y^6 - 36n \left\{ \begin{array}{l} y^5 + 540n^2 \\ - 30n^2 \end{array} \right\} y^4 - 4320n^3 \left\{ \begin{array}{l} y^3 + 19440n^4 \\ - 2160n^4 \end{array} \right\} y^2 - 46656n^5 \left\{ \begin{array}{l} y + 46656n^6 \\ - 7776n^6 \end{array} \right\} \\
 + n \left\{ \begin{array}{l} - 30n^2 \\ - 6n^2 \end{array} \right\} + 360n^3 \left\{ \begin{array}{l} + 144n^3 \\ + 36n^3 \end{array} \right\} - 1296n^4 \left\{ \begin{array}{l} + 5184n^5 \\ + 3888n^5 \end{array} \right\} - 7776n^6 \\
 + 1296n^5 \left\{ \begin{array}{l} - 7776n^6 \\ - 7776n^6 \end{array} \right\} \\
 \hline
 y^6 - 35ny^5 + 504n^2y^4 - 3780n^3y^3 + 15120n^4y^2 - 27216n^5y = 0.
 \end{array}$$

Où il est manifeste que $504n^2$, qui est la quantité connue du troisième terme, est plus grande que le carré de $\frac{35}{2}n$, qui est la moitié de celle du second. Et il n'y a point de cas pour lequel la quantité dont on augmente les vraies racines ait besoin à cet effet d'être plus grande, à proportion de celles qui sont données, que pour celui-ci.

Mais à cause que le dernier terme s'y trouve nul, si on ne désire pas que cela soit il faut encore augmenter tant soit peu la valeur des racines, et ce ne sauroit être de si peu que ce ne soit assez pour cet effet ; non plus que lorsqu'on veut accroître le nombre des dimensions de quelque équation, et faire que toutes les places de ces termes soient remplies, comme si, au lieu de $x^5 - b = 0$, on veut avoir une équation en laquelle la quantité inconnue ait six dimensions et dont aucun des termes ne soit nul, il faut premièrement pour

Comment on fait que toutes les places d'une équation soient remplies.

$$x^5 - b = 0$$

écrire

$$x^6 - bx = 0;$$

puis, ayant fait $y - a = x$, on aura

$$\left. \begin{array}{l} y^6 - 6ay^5 + 15a^2y^4 - 20a^3y^3 + 15a^4y^2 - 6a^5y \\ - b \end{array} \right\} \begin{array}{l} y + a^6 \\ + ab \end{array} = 0,$$

où il est manifeste que, tant petite que la quantité a soit supposée, toutes les places de l'équation ne laissent pas d'être remplies.

De plus on peut, sans connoître la valeur des vraies racines d'une équation, les multiplier ou diviser toutes par telle quantité connue qu'on veut ; ce qui se fait en supposant que la quantité inconnue étant multipliée ou divisée par celle qui doit multiplier ou diviser les racines est égale à quelque autre ; puis multipliant ou divisant la quantité connue du second terme par cette même qui doit multiplier ou diviser les racines, et par son carré celle du troisième, et par son cube celle du quatrième, et ainsi jusques au dernier. Ce qui peut servir pour réduire à des nombres entiers et rationnaux les fractions, ou souvent aussi les nombres sourds qui se trouvent dans les termes des équations. Comme si on a

Comment on peut multiplier ou diviser les racines sans les connoître.

Comment on réduit les nombres rompus d'une équation à des entiers.

$$x^3 - \sqrt{3}x^2 + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0,$$

et qu'on veuille en avoir une autre en sa place, dont tous les termes s'expriment par des nombres rationnaux, il faut supposer $y = x\sqrt{3}$, et multiplier par $\sqrt{3}$ la quantité connue du second terme qui est aussi $\sqrt{3}$, et par son carré qui est 3 celle du troisième qui est $\frac{26}{27}$, et par son cube qui est $3\sqrt{3}$ celle du dernier qui est $\frac{8}{27\sqrt{3}}$, ce qui fait

$$y^3 - 3y^2 + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0.$$

Puis si on en veut avoir encore une autre en la place de celle-ci, dont les quantités connues ne s'expriment que par des nombres entiers, il faut supposer $z = 3y$, et multipliant 3 par 3, $\frac{26}{9}$ par 9 et $\frac{8}{9}$ par 27, on trouve

$$z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0,$$

où les racines étant 2, 3 et 4, on connoît de là que celles de l'autre d'auparavant étoient $\frac{2}{3}$, 1 et $\frac{4}{3}$, et que celles de la première étoient

$$\frac{2}{9}\sqrt{3}, \quad \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \text{et} \quad \frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

Cette opération peut aussi servir pour rendre la quantité connue de quelqu'un des termes de l'équation égale à quelque autre donnée, comme si ayant

$$x^3 - b^2x + c^3 = 0,$$

on veut avoir en sa place une autre équation en laquelle la quantité connue du terme qui occupe la troisième place, à savoir celle qui est ici b^2 soit $3a^2$, il faut supposer $y = x\sqrt{\frac{3a^2}{b^2}}$, puis écrire

$$y^3 - 3a^2y + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} = 0.$$

Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine; comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci,

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0,$$

il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2, et pour les deux autres, quoiqu'on les augmente ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne saurait les rendre autres qu'imaginaires.

Or quand, pour trouver la construction de quelque problème, on vient à une équation en laquelle la quantité inconnue a trois dimensions, premièrement, si les quantités connues qui y sont contiennent quelques nombres rompus, il les faut réduire à d'autres entiers par la multiplication tantôt expliquée; et s'ils en contiennent de sourds, il faut aussi les réduire à d'autres rationnaux autant qu'il sera possible, tant par cette même multiplication que par divers autres moyens qui sont assez faciles à trouver. Puis examinant par ordre toutes les quantités qui peuvent diviser sans fraction le dernier terme, il faut voir si quelqu'une d'elles, jointe avec la quantité inconnue par le signe + ou -, peut composer un binôme qui divise toute la somme; et si cela est, le problème est plan, c'est-à-dire il peut être construit avec la règle et le compas; car, ou bien la quantité connue de ce binôme est la racine cherchée, ou bien l'équation étant divisée par lui se réduit à deux dimensions, en sorte qu'on en peut trouver après la racine par ce qui a été dit au premier livre.

Par exemple, si on a

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0,$$

Comment on rend la quantité connue de l'un des termes d'une équation égale à telle autre qu'on veut.

Que les racines tant vraies que fausses peuvent être réelles ou imaginaires.

La réduction des équations cubiques, lorsque le problème est plan.

le dernier terme qui est 64 peut être divisé sans fraction par 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ; c'est pourquoi il faut examiner par ordre si cette équation ne peut point être divisée par quelqu'un des binômes $y^2 - 1$ ou $y^2 + 1$, $y^2 - 2$ ou $y^2 + 2$, $y^2 - 4$, etc. ; et on trouve qu'elle peut l'être par $y^2 - 16$ en cette sorte :

$$\begin{array}{r}
 + y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0 \\
 - y^6 - 8y^4 - 4y^2 - 16 \\
 \hline
 0 - 16y^4 - 128y^2 \\
 - 16y^4 - 16y^2 \\
 \hline
 + y^4 + 8y^2 + 4 = 0
 \end{array}$$

Je commence par le dernier terme, et divise -64 par -16 , ce qui fait $+4$ que j'écris dans le quotient ; puis je multiplie $+4$ par $+y^2$, ce qui fait $+4y^2$; c'est pourquoi j'écris $-4y^2$ en la somme qu'il faut diviser, car il y faut toujours écrire le signe $+$ ou $-$ tout contraire à celui que produit la multiplication ; et joignant $-124y^2$ avec $-4y^2$, j'ai $-128y^2$ que je divise derechef par -16 , et j'ai $+y^4$ pour mettre dans le quotient ; et en le multipliant par y^2 , j'ai $-8y^4$ pour joindre avec le terme qu'il faut diviser, qui est aussi $-8y^4$; et ces deux ensemble font $-16y^4$ que je divise par -16 , ce qui fait $+y^4$ pour le quotient et $-y^6$ pour joindre avec $+y^6$, ce qui fait 0 et montre que la division est achevée. Mais s'il étoit resté quelque quantité, ou bien qu'on n'eût pu diviser sans fraction quelqu'un des termes précédents, ou eût par là reconnu qu'elle ne pouvoit être faite.

La façon de diviser une équation par un binôme qui contient sa racine.

Tout de même si on a

$$\left. \begin{array}{l} y^6 + a^2 \\ - 2c^2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y^4 - a^4 \\ + c^4 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y^2 - a^6 \\ - 2a^4c^2 \\ - a^2c^4 \end{array} \right\} = 0,$$

le dernier terme se peut diviser sans fraction par a , a^2 , $a^2 + c^2$, $a^3 + ac^2$, et semblables ; mais il n'y en a que deux qu'on ait besoin de considérer, à savoir a^2 et $a^2 + c^2$, car les autres, donnant plus ou moins de dimensions dans le quotient qu'il n'y en a en la quantité connue du pénultième terme, empêcheroient que la division ne s'y pût faire. Et notez que je ne compte ici les dimensions de y^6 que pour trois, à cause qu'il n'y a point de y^5 , ni de y^3 , ni de y en toute la somme. Or en examinant le binôme $y^2 - a^2 - c^2 = 0$, on trouve que la division se peut faire par lui en cette sorte :

$$\begin{array}{r}
 + y^6 + a^2 \left\} y^4 - a^4 \right\} y^2 - a^6 \\
 - y^6 - 2c^2 \left\} + c^4 \right\} - 2a^4c^2 \\
 \hline
 0 - 2a^2 \left\} y^4 - a^4 \right\} y^2 - a^2c^4 \\
 + c^2 \left\} - a^2c^2 \right\} - a^2 - c^2 \\
 \hline
 - a^2 - c^2 \quad - a^2 - c^2 \\
 \hline
 + y^4 \quad + 2a^2 \left\} y^2 + a^4 \right\} \\
 - c^2 \left\} + a^2c^2 \right\} = 0,
 \end{array}$$

Mais lorsqu'on ne trouve aucun binôme qui puisse ainsi diviser toute la somme de l'équation proposée, il est certain que le problème qui en dépend est solide ; et ce n'est pas une moindre faute après cela de tâcher à le construire sans y employer que des cercles et des lignes droites, que ce seroit d'employer des sections coniques à construire ceux auxquels on n'a besoin que de cercles : car enfin tout ce qui témoigne quelque ignorance s'appelle faute.

Quels problèmes sont solides lorsque l'équation est cubique.

Que si on a une équation dont la quantité inconnue ait quatre dimensions, il faut en même façon, après en avoir ôté les nombres sourds et rompus, s'il y en a, voir si on pourra trouver quelque binôme qui divise toute la somme en le composant de l'une des quantités qui divisent sans fraction le dernier terme. Et si on en trouve un, ou bien la quantité connue de ce binôme est la racine cherchée, ou du moins, après cette division, il ne reste en l'équation que trois dimensions, ensuite de quoi il faut derechef l'examiner en la même sorte. Mais lorsqu'il ne se trouve point de tel binôme, il faut, en augmentant ou diminuant la valeur de la racine, ôter le second terme de la somme en la façon tantôt expliquée, et après la réduire à une autre qui ne contienne que trois dimensions ; ce qui se fait en cette sorte : au lieu de

La réduction des équations qui ont quatre dimensions, lorsque le problème est plan. Et quels sont ceux qui sont solides.

$$+ x^4 \dots px^2 \dots qx \dots r = 0,$$

il faut écrire

$$+ y^6 \dots 2py^4 + (p^2 \dots 4r)y^2 - q^2 = 0.$$

Et pour les signes + ou - que j'ai omis, s'il y a eu + p en la précédente équation, il faut mettre en celle-ci + $2p$, ou s'il y a eu - p , il faut mettre - $2p$; et au contraire s'il y a eu + r , il faut mettre - $4r$, ou s'il y a eu - r , il faut mettre + $4r$; et soit qu'il y ait eu + q ou - q , il faut toujours mettre - q^2 et + p^2 , au moins si on suppose que x^4 et y^6 sont marqués du signe +, car ce seroit tout le contraire si on y supposoit le signe -.

Par exemple, si on a

$$+ x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0,$$

il faut écrire en son lieu

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0,$$

car la quantité que j'ai nommée p étant - 4, il faut mettre - $8y^4$ pour $2py^4$; et celle que j'ai nommée r étant 35, il faut mettre $(16 - 140)y^2$, c'est-à-dire - $124y^2$ au lieu de $(p^2 - 4r)y^2$; et enfin q étant 8, il faut mettre - 64 pour - q^2 .

Tout de même, au lieu de

$$+ x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0,$$

il faut écrire

$$+ y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0,$$

car 34 est double de 17, et 313 en est le carré joint au quadruple de 6, et 400 est le carré de 20.

Tout de même aussi au lieu de

$$+ z^4 + \left(\frac{1}{2}a^2 - c^2\right)z^2 - (a^3 + ac^2)z - \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 = 0,$$

il faut écrire

$$y^6 + (a^2 - 2c^2)y^4 + (c^4 - a^4)y^2 - a^6 - 2a^4c^2 - a^2c^4 = 0;$$

car p est $\frac{1}{2}a^2 - c^2$, et p^2 est $\frac{1}{4}a^4 - a^2c^2 + c^4$, et $4r$ est $-\frac{5}{4}a^4 + a^2c^2$, et enfin $-q^2$ est $-a^6 - 2a^4c^2 - a^2c^4$.

Après que l'équation est ainsi réduite à trois dimensions, il faut chercher la valeur de y^2 par la méthode déjà expliquée; et si elle ne peut être trouvée, on n'a point besoin de passer outre, car il suit de là infailliblement que le problème est solide. Mais si on la trouve, on peut diviser par son moyen la précédente équation en deux autres, en chacune desquelles la quantité inconnue n'aura que deux dimensions et dont les racines seront les mêmes que les siennes; à savoir, au lieu de

$$+ x^4 \dots px^2 \dots qx \dots r = 0,$$

il faut écrire ces deux autres

$$+ x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 \dots \frac{1}{2}p \dots \frac{q}{2y} = 0,$$

et

$$+ x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 \dots \frac{1}{2}p \dots \frac{q}{2y} = 0.$$

Et pour les signes $+$ et $-$ que j'ai omis, s'il y a $+p$ en l'équation précédente, il faut mettre $+\frac{1}{2}p$ en chacune de celles-ci, et $-\frac{1}{2}p$ s'il y a en l'autre $-p$; mais il faut mettre $+\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $-yx$, et $-\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $+yx$, lorsqu'il y a $+q$ en la première; et au contraire, s'il y a $-q$, il faut mettre $-\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $-yx$, et $+\frac{q}{2y}$ en celle où il y a $+yx$. Ensuite de quoi il est aisé de connoître toutes les racines de l'équation proposée, et par conséquent de construire le problème dont elle contient la solution, sans y employer que des cercles et des lignes droites.

Par exemple, à cause que faisant

$$y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0$$

pour

$$x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0,$$

on trouve que y^2 est 16, on doit, au lieu de cette équation

$$+ x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0,$$

écrire ces deux autres

$$+x^2 - 4x - 3 = 0,$$

et

$$+x^2 + 4x + 2 = 0,$$

car y est 4, $\frac{1}{2}y^2$ est 8, p est 17, et q est 20, de façon que

$$+\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \text{ fait } -3, \text{ et } +\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \text{ fait } +2.$$

Et tirant les racines de ces deux équations, on trouve toutes les mêmes que si on les tiroit de celle où est x^4 , à savoir, on en trouve une vraie qui est $\sqrt{7} + 2$, et trois fausses qui sont

$$\sqrt{7} - 2, \quad 2 + \sqrt{2}, \quad \text{et} \quad 2 - \sqrt{2},$$

Ainsi ayant

$$x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0,$$

pourceque la racine de

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$$

est derechef 16, il faut écrire

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

et

$$x^2 + 4x + 7 = 0.$$

Car ici

$$+\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \text{ fait } 5, \text{ et } +\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \text{ fait } 7.$$

Et pourcequ'on ne trouve aucune racine, ni vraie ni fausse, en ces deux dernières équations, on connoît de là que les quatre de l'équation dont elles procèdent sont imaginaires, et que le problème pour lequel on l'a trouvée est plan de sa nature, mais qu'il ne sauroit en aucune façon être construit, à cause que les quantités données ne peuvent se joindre.

Tout de même ayant

$$z^4 + \left(\frac{1}{2}a^2 - c^2\right)z^2 - (a^3 + ac^2)z + \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 = 0,$$

pourcequ'on trouve $a^2 + c^2$ pour y^2 , il faut écrire

$$z^2 - \sqrt{a^2 + c^2}z + \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2} = 0,$$

et

$$z^2 + \sqrt{a^2 + c^2}z + \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2} = 0,$$

car y est $\sqrt{a^2 + c^2}$, et $+\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p$ est $\frac{3}{4}a^2$, et $\frac{q}{2y}$ est $\frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}$, d'où on connoît que la valeur de z est

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{-\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}},$$

ou bien

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Et pourceque nous avons fait ci-dessus $z + \frac{1}{2}a = x$, nous apprenons que la quantité x , pour la connoissance de laquelle nous avons fait toutes ces opérations, est

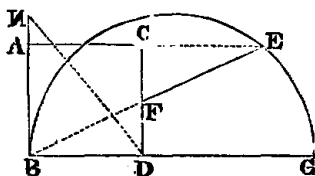
$$+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}c^2}-\sqrt{\frac{1}{4}c^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Mais afin qu'on puisse mieux connoître l'utilité de cette règle il faut que je l'applique à quelque problème.

Exemple de
l'usage de ces
réductions.

Si le carré AD (*fig. 26*) et la ligne BN étant donnés, il faut prolonger le côté AC jusques à E , en sorte que EF , tirée de E vers B , soit égale à NB : on apprend de Pappus, qu'ayant premièrement prolongé BD jusques à G , en

Fig. 26.



sorte que DG soit égale à DN , et ayant décrit un cercle dont le diamètre soit BG , si on prolonge la ligne droite AC , elle rencontrera la circonférence de ce cercle au point E qu'on demandoit. Mais pour ceux qui ne sauroient point cette construction, elle seroit assez difficile à rencontrer; et, en la cherchant par la méthode ici proposée, ils ne s'aviseroient jamais de prendre DG pour la quantité inconnue, mais plutôt CF ou FD , à cause que ce sont elles qui conduisent le plus aisément à l'équation; et lors ils en trouveroient une qui ne seroit pas facile à démêler sans la règle que je viens d'expliquer. Car posant a pour BD ou CD , et c pour EF , et x pour DF , on a $CF = a - x$, et comme CF ou $a - x$ est à FE ou c , ainsi FD ou x est à BF , qui par conséquent est $\frac{cx}{a-x}$. Puis à cause du triangle rectangle $BD F$ dont les côtés sont l'un x et l'autre a , leurs carrés, qui sont $x^2 + a^2$, sont égaux à celui de la base, qui est $\frac{c^2 x^2}{x^2 - 2ax + a^2}$; de façon que, multipliant le tout par $x^2 - 2ax + a^2$, on trouve que l'équation est

$$x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^4 = c^2x^2,$$

ou bien

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0;$$

et on connoît par les règles précédentes que sa racine, qui est la longueur de la ligne DF , est

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2} - \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Que si on posoit BF , ou CE , ou BE , pour la quantité inconnue, on viendrait derechef à une équation en laquelle il y auroit quatre dimensions, mais qui seroit plus aisée à démêler, et on y viendrait assez aisément ; au lieu que si c'étoit DG qu'on supposât, on viendrait beaucoup plus difficilement à l'équation, mais aussi elle seroit très simple. Ce que je mets ici pour vous avertir que, lorsque le problème proposé n'est point solide, si en le cherchant par un chemin on vient à une équation fort composée, on peut ordinairement venir à une plus simple en le cherchant par un autre.

Je pourrais encore ajouter diverses règles pour démêler les équations qui vont au cube ou au carré de carré, mais elles seroient superflues ; car lorsque les problèmes sont plans on en peut toujours trouver la construction par celles-ci.

Je pourrais aussi en ajouter d'autres pour les équations qui montent jusques au sursolide, ou au carré de cube, ou au-delà, mais j'aime mieux les comprendre toutes en une, et dire en général que, lorsqu'on a tâché de les réduire à même forme que celles d'autant de dimensions qui viennent de la multiplication de deux autres qui en ont moins, et qu'ayant dénombré tous les moyens par lesquels cette multiplication est possible, la chose n'a pu succéder par aucun, on doit s'assurer qu'elles ne sauroient être réduites à de plus simples ; en sorte que si la quantité inconnue a trois ou quatre dimensions, le problème pour lequel on la cherche est solide, et si elle en a cinq ou six, il est d'un degré plus composé, et ainsi des autres.

Au reste, j'ai omis ici les démonstrations de la plupart de ce que j'ai dit, à cause qu'elles m'ont semblé si faciles que, pourvu que vous preniez la peine d'examiner méthodiquement si j'ai failli, elles se présenteront à vous d'elles-mêmes ; et il sera plus utile de les apprendre en cette façon qu'en les lisant.

Or, quand on est assuré que le problème proposé est solide, soit que l'équation par laquelle on le cherche monte au carré de carré, soit qu'elle ne monte que jusques au cube, on peut toujours en trouver la racine par l'une des trois sections coniques, laquelle que ce soit, ou même par quelque partie de l'une d'elles, tant petite qu'elle puisse être, en ne se servant au reste que de lignes droites et de cercles. Mais je me contenterai ici de donner une règle générale pour les trouver toutes par le moyen d'une parabole, à cause qu'elle est en quelque façon la plus simple.

Premièrement, il faut ôter le second terme de l'équation proposée, s'il n'est déjà nul, et ainsi la réduire à telle forme

$$z^3 = \dots apz \dots a^2q,$$

Règle générale pour réduire les équations qui passent le carré de carré.

Façon générale pour construire tous les problèmes solides réduits à une équation de trois ou quatre dimensions.

Fig. 28.

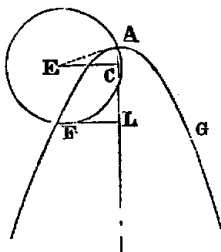
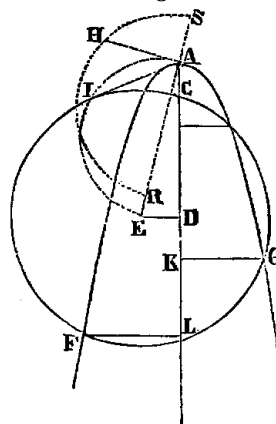


Fig. 29.



signe +, les vraies racines seront celles de ces perpendiculaires qui se trouveront du même côté de la parabole que E le centre du cercle, comme FL ; et les autres, comme GK , seront fausses. Mais au contraire, si cette quantité q est marquée du signe -, les vraies seront celles de l'autre côté, et les fausses ou moindres que rien seront du côté où est E le centre du cercle. Et enfin si ce cercle ne coupe ni ne touche la parabole en aucun point, cela témoigne qu'il n'y a aucune racine ni vraie ni fausse en l'équation, et qu'elles sont toutes imaginaires. En sorte que cette règle est la plus générale et la plus accomplie qu'il soit possible de souhaiter.

Et la démonstration en est fort aisée; car si la ligne GK (fig. 27), trouvée par cette construction, se nomme z , AK sera z^2 , à cause de la parabole en laquelle GK doit être moyenne proportionnelle entre AK et le côté droit qui est 1; puis, si de AK j'ôte AC qui est $\frac{1}{2}$, et CD qui est $\frac{1}{2}p$, il reste DK ou EM qui est $z^2 - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, dont le carré est

$$z^4 - pz^2 - z^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4};$$

et à cause que DE ou KM est $\frac{1}{2}q$, la toute GM est $z + \frac{1}{2}q$, dont le carré est

$$z^2 + qz + \frac{1}{4}q^2;$$

et assemblant ces deux carrés on a

$$z^4 - pz^2 + qz + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4},$$

pour le carré de la ligne GE , à cause qu'elle est la base du triangle rectangle EMG .

Mais à cause que cette même ligne GE est le demi-diamètre du cercle FG , elle se peut encore expliquer en d'autres termes, à savoir ED étant $\frac{1}{2}q$, et AD étant $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$, AE est

$$\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}},$$

à cause de l'angle droit ADE ; puis HA étant moyenne proportionnelle entre AS qui est 1 et AR qui est r , elle est $\sqrt{r}$; et à cause de l'angle droit EAH , le carré de HE ou EG est

$$\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r;$$

si bien qu'il y a équation entre cette somme et la précédente, ce qui est le même que

$$z^4 = pz^2 - qz + r,$$

et par conséquent la ligne trouvée GK qui a été nommée z est la racine de cette équation, ainsi qu'il falloit démontrer. Et si vous appliquez ce même calcul à tous les autres cas de cette règle en changeant les signes $+$ et $-$ selon l'occasion, vous y trouverez votre compte en même sorte, sans qu'il soit besoin que je m'y arrête.

Si on veut donc, suivant cette règle, trouver deux moyennes proportionnelles entre les lignes a et q (*fig. 28*), chacun sait que posant z pour l'une, comme a est à z , ainsi z à $\frac{z^2}{a}$, et $\frac{z^2}{a}$ à $\frac{z^3}{a^2}$; de façon qu'il y a équation entre q et $\frac{z^3}{a^2}$, c'est-à-dire

$$z^3 = a^2q.$$

L'invention de deux moyennes proportionnelles.

Et la parabole FAG étant décrite, avec la partie de son essieu AC qui est $\frac{1}{2}a$ la moitié du côté droit, il faut du point C élever la perpendiculaire CE égale à $\frac{1}{2}q$, et du centre E par A , décrivant le cercle AF , on trouve FL et LA pour les deux moyennes cherchées.

Tout de même si on veut diviser l'angle NOP (*fig. 30*), ou bien l'arc ou portion de cercle $NQPT$ en trois parties égales, faisant $NO = 1$ pour le rayon du cercle, et $NP = q$ pour la subtendue de l'arc donné, et $NQ = z$ pour la subtendue du tiers de cet arc, l'équation vient

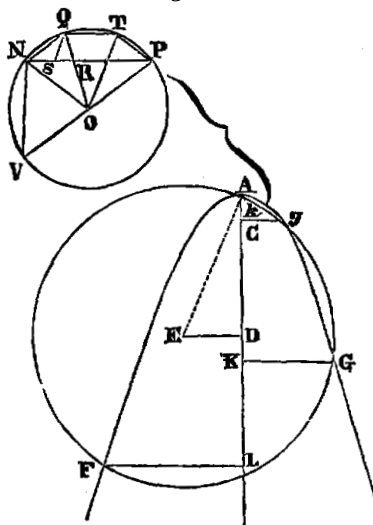
$$z^3 = 3z - q.$$

La façon de diviser un angle en trois.

Car ayant tiré les lignes NQ , OQ , OT , et faisant QS parallèle à TO , on voit que comme NO est à NQ , ainsi NQ à QR , et QR à RS ; en sorte que NO étant 1, et NQ étant z , QR est z^2 , et RS est z^3 ; et à cause qu'il s'en faut seulement RS ou z^3 que la ligne NP qui est q ne soit triple de NQ qui est z , on a

$$q = 3z - z^3,$$

Fig. 30.



ou bien

$$z^3 = 3z - q.$$

Puis la parabole FAG étant décrite, et CA la moitié de son côté droit principal étant $\frac{1}{2}$, si on prend $CD = \frac{3}{2}$, et la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$, et que du centre E par A on décrive le cercle FAG , il coupe cette parabole aux trois points F , g et G , sans compter le point A qui en est le sommet ; ce qui montre qu'il y a trois racines en cette équation, à savoir les deux GK et gk qui sont vraies, et la troisième qui est fausse, à savoir FL . Et de ces deux vraies c'est gk la plus petite qu'il faut prendre pour la ligne NQ qui étoit cherchée ; car l'autre GK est égale à NV la subtendue de la troisième partie de l'arc NVP , qui avec l'autre arc NQP achève le cercle. Et la fausse FL est égale à ces deux ensembles QN et NV , ainsi qu'il est aisé à voir par le calcul.

Il seroit superflu que je m'arrêtasse à donner ici d'autres exemples, car tous les problèmes qui ne sont que solides se peuvent réduire à tel point qu'on n'a aucun besoin de cette règle pour les construire, sinon en tant qu'elle sert à trouver deux moyennes proportionnelles, ou bien à diviser un angle en trois parties égales, ainsi que vous connoîtrez en considérant que leurs difficultés peuvent toujours être comprises en des équations qui ne montent que jusques au carré de carré ou au cube, et que toutes celles qui montent au carré de carré se réduisent au carré par le moyen de quelques autres qui ne montent que jusques au cube, et enfin qu'on peut ôter le second terme de celles-ci ; en sorte qu'il n'y

Que tous les problèmes solides se peuvent réduire à ces deux constructions.

en a point qui ne se puisse réduire à quelqu'une de ces trois formes :

$$z^3 = -pz + q,$$

$$z^3 = +pz + q,$$

$$z^3 = +pz - q.$$

Or si on a $z^3 = -pz + q$, la règle dont Cardan attribue l'invention à un nommé Scipio Ferreus nous apprend que la racine est

$$\sqrt{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}.$$

Comme aussi lorsqu'on a $z^3 = +pz + q$, et que le carré de la moitié du dernier terme est plus grand que le cube du tiers de la quantité connue du pénultième, une pareille règle nous apprend que la racine est

$$\sqrt{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C. + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}.$$

D'où il paroît qu'on peut construire tous les problèmes dont les difficultés se réduisent à l'une de ces deux formes, sans avoir besoin des sections coniques pour autre chose que pour tirer les racines cubiques de quelques quantités données, c'est-à-dire pour trouver deux moyennes proportionnelles entre ces quantités et l'unité.

Puis, si on a $z^3 = +pz + q$, et que le carré de la moitié du dernier terme ne soit point plus grand que le cube du tiers de la quantité connue du pénultième, en supposant le cercle $NQPV$ dont le demi-diamètre NO soit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, c'est-à-dire la moyenne proportionnelle entre le tiers de la quantité donnée p et l'unité, et supposant aussi la ligne NP inscrite dans ce cercle qui soit $\frac{3q}{p}$, c'est-à-dire qui soit à l'autre quantité donnée q comme l'unité est au tiers de p , il ne faut que diviser chacun des deux arcs NQP et NVP en trois parties égales, et on aura NQ la subtendue du tiers de l'un, et NV la subtendue du tiers de l'autre, qui jointes ensemble composeront la racine cherchée.

Enfin si on a $z^3 = pz - q$, en supposant d'erechef le cercle $NQPV$ dont le rayon NO soit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, et l'inscrite NP soit $\frac{3q}{p}$, NQ la subtendue du tiers de l'arc NQP sera l'une des racines cherchées, et NV la subtendue du tiers de l'autre arc sera l'autre. Au moins, si le carré de la moitié du dernier terme n'est point plus grand que le cube du tiers de la quantité connue du pénultième; car s'il étoit plus grand, la ligne NP ne pourroit être inscrite dans le cercle, à cause qu'elle seroit plus longue que son diamètre, ce qui seroit cause que les deux vraies racines de cette équation ne seroient qu'imaginaires, et qu'il n'y en

auroit de réelle que la fausse, qui, suivant la règle de Cardan, seroit

$$\sqrt{C. \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^2}} + \sqrt{C. \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^2}}.$$

Au reste, il est à remarquer que cette façon d'exprimer la valeur des racines par le rapport qu'elles ont aux côtés de certains cubes dont il n'y a que le contenu qu'on connoisse, n'est en rien plus intelligible ni plus simple que de les exprimer par le rapport qu'elles ont aux subtendues de certains arcs ou portions de cercles dont le triple est donné; en sorte que toutes celles des équations cubiques qui ne peuvent être exprimées par les règles de Cardan, le peuvent être autant ou plus clairement par la façon ici proposée.

Car si, par exemple, on pense connoître la racine de cette équation

$$z^3 = -qz + p,$$

à cause qu'on sait qu'elle est composée de deux lignes dont l'une est le côté d'un cube duquel le contenu est $\frac{1}{2}q$, ajouté au côté d'un carré duquel derechef le contenu est $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$, et l'autre est le côté d'un autre cube dont le contenu est la différence qui est entre $\frac{1}{2}q$ et le côté de ce carré dont le contenu est $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$, qui est tout ce qu'on en apprend par la règle de Cardan. Il n'y a point de doute qu'on ne connoisse autant ou plus distinctement la racine de celle-ci

$$z^3 = +qz - p,$$

en la considérant inscrite dans un cercle dont le demi-diamètre est $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, et sachant qu'elle y est la subtendue d'un arc dont le triple a pour sa subtendue $\frac{3q}{p}$. Même ces termes sont beaucoup moins embarrassés que les autres, et ils se trouveront beaucoup plus courts si on veut user de quelque chiffre particulier pour exprimer ces subtendues, ainsi qu'on fait du chiffre $\sqrt{C}$. pour exprimer le côté des cubes.

Et on peut aussi ensuite de ceci exprimer les racines de toutes les équations qui montent jusques au carré de carré par les règles ci-dessus expliquées; en sorte que je ne sache rien de plus à désirer en cette matière: car enfin la nature de ces racines ne permet pas qu'on les exprime en termes plus simples, ni qu'on les détermine par aucune construction qui soit ensemble plus générale et plus facile.

Il est vrai que je n'ai pas encore dit sur quelles raisons je me fonde pour oser ainsi assurer si une chose est possible ou ne l'est pas. Mais si on prend garde comment, par la méthode dont je me sers, tout ce qui tombe sous la considération des géomètres se réduit à un même genre de problèmes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque équation, on jugera bien qu'il n'est pas

La façon d'exprimer la valeur de toutes les racines des cubiques, et ensuite de toutes celles qui ne montent que jusques au carré de carré.

malaisé de faire un dénombrement de toutes les voies par lesquelles on les peut trouver, qui soit suffisant pour démontrer qu'on a choisi la plus générale et la plus simple. Et particulièrement pour ce qui est des problèmes solides, que j'ai dit ne pouvoir être construits sans qu'on y emploie quelque ligne plus composée que la circulaire, c'est chose qu'on peut assez trouver de ce qu'ils se réduisent tous à deux constructions, en l'une desquelles il faut avoir tout ensemble les deux points qui déterminent deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, et en l'autre les deux points qui divisent en trois parties égales un arc donné ; car d'autant que la courbure du cercle ne dépend que d'un simple rapport de toutes ses parties au point qui en est le centre, on ne peut aussi s'en servir qu'à déterminer un seul point entre deux extrêmes, comme à trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites données, ou diviser en deux un arc donné ; au lieu que la courbure des sections coniques, dépendant toujours de deux diverses choses, peut aussi servir à déterminer deux points différents.

Mais pour cette même raison il est impossible qu'aucun des problèmes qui sont d'un degré plus composés que les solides, et qui présupposent l'invention de quatre moyennes proportionnelles, ou la division d'un angle en cinq parties égales, puissent être construits par aucune des sections coniques. C'est pourquoi je croirai faire en ceci tout le mieux qui se puisse, si je donne une règle générale pour les construire, en y employant la ligne courbe qui se décrit par l'intersection d'une parabole et d'une ligne droite en la façon ci-dessus expliquée ; car j'ose assurer qu'il n'y en a point de plus simple en la nature qui puisse servir à ce même effet, et vous avez vu comme elle suit immédiatement les sections coniques en cette question tant cherchée par les anciens, dont la solution enseigne par ordre toutes les lignes courbes qui doivent être reçues en géométrie.

Vous savez déjà comment, lorsqu'on cherche les quantités qui sont requises pour la construction de ces problèmes, on les peut toujours réduire à quelque équation qui ne monte que jusques au carré de cube ou au sursolide. Puis vous savez aussi comment, en augmentant la valeur des racines de cette équation, on peut toujours faire qu'elles deviennent toutes vraies, et avec cela que la quantité connue du troisième terme soit plus grande que le carré de la moitié de celle du second ; et enfin comment, si elle ne monte que jusques au sursolide, on la peut hausser jusques au carré de cube, et faire que la place d'aucun de ces termes ne manque d'être remplie. Or, afin que toutes les difficultés dont il est ici question puissent être résolues par une même règle, je désire qu'on fasse toutes ces choses, et par ce moyen qu'on les réduise toujours à une équation de telle forme,

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + u = 0,$$

et en laquelle la quantité nommée q soit plus grande que le carré de la moitié de celle qui est nommée p . Puis ayant fait la ligne BK (*fig. 31*) indéfiniment longue des deux côtés, et du point B ayant tiré la perpendiculaire AB dont la longueur soit $\frac{1}{2}p$, il faut dans un plan séparé décrire une parabole, comme

Pourquoi les problèmes solides ne peuvent être construits sans les sections coniques, ni ceux qui sont plus composés sans quelques autres lignes plus composées.

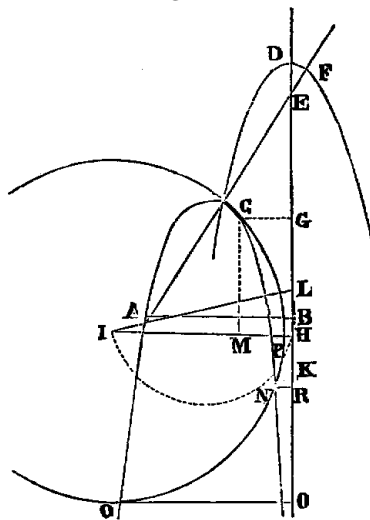
Façon générale pour construire tous les problèmes réduits à une équation qui n'a point plus de six dimensions.

$C D F$, dont le côté droit principal soit

$$\sqrt{\frac{t}{\sqrt{u}} + q - \frac{1}{4}p^2},$$

que je nommerai n pour abrégé. Après cela, il faut poser le plan dans lequel est

Fig. 31.

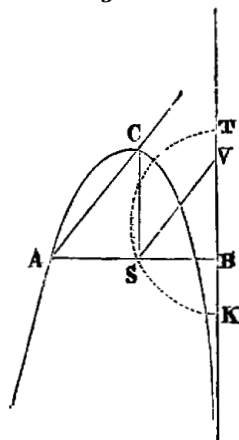


cette parabole sur celui où sont les lignes AB et BK , en sorte que son essieu DE se rencontre justement au-dessus de la ligne droite BK ; et ayant pris la partie de cet essieu qui est entre les points E et D égale à $\frac{2\sqrt{u}}{pn}$, il faut appliquer sur ce point E une longue règle en telle façon qu'étant aussi appliquée sur le point A du plan de dessous, elle demeure toujours jointe à ces deux points pendant qu'on haussera ou baissera la parabole tout le long de la ligne BK sur laquelle son essieu est appliqué; au moyen de quoi l'intersection de cette parabole et de cette règle, qui se fera au point C , décrira la ligne courbe ACN , qui est celle dont nous avons besoin de nous servir pour la construction du problème proposé. Car après qu'elle est ainsi décrite, si on prend le point L en la ligne BK , du côté vers lequel est tourné le sommet de la parabole, et qu'on fasse BL égale à DE , c'est-à-dire à $\frac{2\sqrt{u}}{pn}$; puis du point L vers B qu'on prenne en la même ligne BK la ligne LH égale à $\frac{t}{2n\sqrt{u}}$, et que du point H ainsi trouvé on tire à angles droits du côté qu'est la courbe ACN la ligne HI dont la longueur soit $\frac{r}{2n^2} + \frac{\sqrt{u}}{n^2} + \frac{pt}{4n^2\sqrt{u}}$, qui pour abrégé sera nommé $\frac{m}{n^2}$; et après, ayant joint les points L et I , qu'on décrive le cercle LPI dont LI soit le diamètre, et

qu'on inscrive en ce cercle la ligne LP dont la longueur soit $\sqrt{\frac{s+p\sqrt{u}}{n^2}}$; puis enfin du centre I , par le point P ainsi trouvé, qu'on décrive le cercle PCN . Ce cercle coupera ou touchera la ligne courbe ACN en autant de points qu'il y aura de racines en l'équation, en sorte que les perpendiculaires tirées de ces points sur la ligne BK , comme CG , NR , QO , et semblables, seront les racines cherchées, sans qu'il y ait aucune exception ni aucun défaut en cette règle. Car si la quantité s étoit si grande à proportion des autres p , q , r , t , et u , que la ligne LP se trouvât plus grande que le diamètre du cercle LI , en sorte qu'elle n'y pût être inscrite, il n'y auroit aucune racine en l'équation proposée qui ne fût imaginaire ; non plus que si le cercle IP étoit si petit qu'il ne coupât la courbe ACN en aucun point. Et il la peut couper en six différents, ainsi qu'il peut y avoir six diverses racines en l'équation. Mais lorsqu'il la coupe en moins, cela témoigne qu'il y a quelques-unes de ces racines qui sont égales entre elles, ou bien qui ne sont qu'imaginaires.

Que si la façon de tracer la ligne ACN par le mouvement d'une parabole vous semble incommode, il est aisé de trouver plusieurs autres moyens pour la décrire : comme si, ayant les mêmes quantités que devant pour AB et BL (*fig. 32*), et la même pour BK qu'on avoit posée pour le côté droit principal de la parabole, on décrit le demi-cercle KST dont le centre soit pris à discrétion dans la ligne BK , en sorte qu'il coupe quelque part la ligne AB comme au point S ; et que du point T où il finit on prenne vers K la ligne TV égale à BL ; puis ayant tiré la ligne SV , qu'on en tire une autre qui lui soit parallèle par le

Fig. 32.



point A , comme AC , et qu'on en tire aussi une autre par S qui soit parallèle à BK , comme SC , le point C où ces deux parallèles se rencontrent sera l'un de ceux de la ligne courbe cherchée. Et on en peut trouver en même sorte autant d'autres qu'on en désire.

Or la démonstration de tout ceci est assez facile ; car, appliquant la règle AE (*fig. 31*) avec la parabole FD sur le point C , comme il est certain qu'elles

peuvent y être appliquées ensemble, puisque ce point C est en la courbe ACN qui est décrite par leur intersection, si CG se nomme y , GD sera $\frac{y^2}{n}$, à cause que le côté droit qui est n est à CG comme CG à GD ; et ôtant DE qui est $\frac{2\sqrt{u}}{pn}$, de GD , on a $\frac{y^2}{n} - \frac{2\sqrt{u}}{pn}$ pour GE . Puis, à cause que AB est à BE comme CE est à GE , AB étant $\frac{1}{2}p$, BE est $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{u}}{ny}$.

Et tout de même en supposant que le point C (fig. 32) de la courbe a été trouvé par l'intersection des lignes droites SC parallèle à BK , et AC parallèle à SV , SB qui est égale à CG est y ; et BK étant égale au côté droit de la parabole que j'ai nommé n , BT est $\frac{y^2}{n}$, car comme KB est à BS , ainsi BS est à BT . Et TV étant la même que BL , c'est-à-dire $\frac{2\sqrt{u}}{pn}$, BV est $\frac{y^2}{n} - \frac{2\sqrt{u}}{pn}$; et comme SB est à BV , ainsi AB est à BE , qui est par conséquent $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{u}}{ny}$ comme devant, d'où on voit que c'est une même ligne courbe qui se décrit en ces deux façons.

Après cela, pourceque BL et DE (fig. 31) sont égales, DL et BE le sont aussi; de façon qu'ajoutant LH qui est $\frac{t}{2n\sqrt{u}}$, à DL qui est $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{u}}{ny}$, on a la toute DH qui est

$$\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{u}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{u}};$$

et en ôtant GD qui est $\frac{y^2}{n}$, on a GH qui est

$$\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{u}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{u}} - \frac{y^2}{n},$$

ce que j'écris par ordre en cette sorte,

$$GH = \frac{-y^3 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{ty}{2\sqrt{u}} - \sqrt{u}}{ny},$$

et le carré de GH est

$$\frac{y^6 - py^5 + \left(\frac{1}{4}p^2 - \frac{t}{\sqrt{u}}\right)y^4 + \left(2\sqrt{u} + \frac{pt}{2\sqrt{u}}\right)y^3 + \left(\frac{t^2}{4u} - p\sqrt{u}\right)y^2 - ty + u}{n^2y^2}.$$

Et en quelque autre endroit de cette ligne courbe qu'on veuille imaginer le point C , comme vers N ou vers Q , on trouvera toujours que le carré de la ligne droite qui est entre le point H et celui où tombe la perpendiculaire du point C sur BH , peut être exprimé en ces mêmes termes et avec les mêmes signes + et -.

De plus, HI étant $\frac{m}{n^2}$, et LH étant $\frac{t}{2n\sqrt{u}}$, IL est

$$\sqrt{\frac{m^2}{n^4} + \frac{t^2}{4n^2u}},$$

à cause de l'angle droit HLI ; et LP étant

$$\sqrt{\frac{s}{n^2} + \frac{p\sqrt{u}}{n^2}},$$

IP ou IC est

$$\sqrt{\frac{m^2}{n^4} + \frac{t^2}{4n^2u} - \frac{s}{n^2} - \frac{p\sqrt{u}}{n^2}},$$

à cause aussi de l'angle droit IPL . Puis ayant fait CM perpendiculaire sur IH , IM est la différence qui est entre HI et HM ou CG , c'est-à-dire entre $\frac{m}{n^2}$ et y , en sorte que son carré est toujours

$$\frac{m^2}{n^4} - \frac{2my}{n^2} + y^2,$$

qui étant ôté du carré de IC , il reste

$$\frac{t^2}{4n^2u} - \frac{s}{n^2} - \frac{p\sqrt{u}}{n^2} + \frac{2my}{n^2} - y^2$$

pour le carré de CM , qui est égal au carré de GH déjà trouvé. Ou bien en faisant que cette somme soit divisée comme l'autre par n^2y^2 , on a

$$\frac{-n^2y^4 + 2my^3 - p\sqrt{u}y^2 - sy^2 + \frac{t^2}{4u}y^2}{n^2y^2};$$

puis remettant $\frac{t}{\sqrt{u}}y^4 + qy^4 - \frac{1}{4}p^2y^4$ pour n^2y^4 , et $ry^3 + 2\sqrt{u}y^3 + \frac{pt}{2\sqrt{u}}y^3$ pour $2my^3$; et multipliant l'une et l'autre somme par n^2y^2 on a

$$y^6 - py^5 + \left(\frac{1}{4}p^2 - \frac{t}{\sqrt{u}}\right)y^4 + \left(2\sqrt{u} + \frac{pt}{2\sqrt{u}}\right)y^3 + \left(\frac{t^2}{4u} - p\sqrt{u}\right)y^2 - ty + u$$

égal à

$$\left(\frac{1}{4}p^2 - q - \frac{t}{\sqrt{u}}\right)y^4 + \left(r + 2\sqrt{u} + \frac{pt}{2\sqrt{u}}\right)y^3 + \left(\frac{t^2}{4u} - s - p\sqrt{u}\right)y^2,$$

c'est-à-dire qu'on a

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + u = 0.$$

D'où il paroît que les lignes CG , NR , QO , et semblables, sont les racines de cette équation, qui est ce qu'il falloit démontrer.

Ainsi donc si on veut trouver quatre moyennes proportionnelles entre les lignes a et b , ayant posé x pour la première, l'équation est

L'invention de quatre moyennes proportionnelles.

$$x^5 - a^4b = 0, \quad \text{ou bien} \quad x^6 - a^4bx = 0.$$

Et faisant $y - a = x$, il vient

$$y^6 - 6ay^5 + 15a^2y^4 - 20a^3y^3 + 15a^4y^2 - (6a^5 + a^4b)y + a^6 + a^5b = 0;$$

c'est pourquoi il faut prendre $3a$ pour la ligne AB , et

$$\sqrt{\frac{6a^3 + a^2b}{\sqrt{a^2 + ab}}} + 6a^2$$

pour BK ou le côté droit de la parabole, que j'ai nommé n , et $\frac{a}{3n}\sqrt{a^2 + ab}$ pour DE ou BL . Et après avoir décrit la ligne courbe ACN sur la mesure de ces trois, il faut faire

$$LH = \frac{6a^3 + a^2b}{2n\sqrt{a^2 + ab}}$$

et

$$HI = \frac{10a^3}{n^2} + \frac{a^2}{n^2}\sqrt{a^2 + ab} + \frac{18a^4 + 3a^3b}{2n^2\sqrt{a^2 + ab}},$$

et

$$LP = \frac{a}{n}\sqrt{15a^2 + 6a\sqrt{a^2 + ab}};$$

car le cercle, qui ayant son centre au point I passera par le point P ainsi trouvé, coupera la courbe aux deux points C et N , desquels ayant tiré les perpendiculaires NR et CG , si la moindre NR est ôtée de la plus grande CG , le reste sera x , la première des quatre moyennes proportionnelles cherchées.

Il est aisé en même façon de diviser un angle en cinq parties égales, et d'inscrire une figure de onze ou treize côtés égaux dans un cercle, et de trouver une infinité d'autres exemples de cette règle.

Toutefois il est à remarquer qu'en plusieurs de ces exemples il peut arriver que le cercle coupe si obliquement la parabole du second genre, que le point de leur intersection soit difficile à reconnoître, et ainsi que cette construction ne soit pas commode pour la pratique; à quoi il seroit aisé de remédier en composant d'autres règles à l'imitation de celle-ci, comme on en peut composer de mille sortes.

Mais mon dessein n'est pas de faire un gros livre, et je tâche plutôt de comprendre beaucoup en peu de mots, comme on jugera peut-être que j'ai fait, si on considère qu'ayant réduit à une même construction tous les problèmes d'un même genre, j'ai tout ensemble donné la façon de les réduire à une infinité d'autres diverses, et ainsi de résoudre chacun d'eux en une infinité de façons;

puis outre cela, qu'ayant construit tous ceux qui sont plans en coupant d'un cercle une ligne droite, et tous ceux qui sont solides en coupant aussi d'un cercle une parabole, et enfin tous ceux qui sont d'un degré plus composés en coupant tout de même d'un cercle une ligne qui n'est que d'un degré plus composée que la parabole, il ne faut que suivre la même voie pour construire tous ceux qui sont plus composés à l'infini : car, en matière de progressions mathématiques, lorsqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'est pas malaisé de trouver les autres. Et j'espère que nos neveux me sauront gré, non seulement des choses que j'ai ici expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontairement, afin de leur laisser le plaisir de les inventer.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE PREMIER

DES PROBLÈMES QU'ON PEUT CONSTRUIRE SANS Y EMPLOYER QUE DES CERCLES ET DES LIGNES DROITES.

Comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie	1
Comment se font géométriquement la multiplication, la division et l'ex- traction de la racine carrée	1
Comment on peut user de chiffres en géométrie	2
Comment il faut venir aux équations qui servent à résoudre les problèmes	3
Quels sont les problèmes plans, et comment ils se résolvent	4
Exemple tiré de Pappus	5
Réponse à la question de Pappus	7
Comment on doit poser les termes pour venir à l'équation en cet exemple	8
Comment on trouve que ce problème est plan lorsqu'il n'est point pro- posé en plus de cinq lignes	10

LIVRE SECOND

DE LA NATURE DES LIGNES COURBES.

Quelles sont les lignes courbes qu'on peut recevoir en géométrie.....	11
La façon de distinguer toutes ces lignes courbes en certains genres, et de connoître le rapport qu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites	13
Suite de l'explication de la question de Pappus mise au livre précédent	15
Solution de cette question quand elle n'est proposée qu'en trois ou quatre lignes	15
Démonstration de cette solution	19
Quels sont les lieux plans et solides, et la façon de les trouver tous....	21
Quelle est la première et la plus simple de toutes les lignes courbes qui servent à la question des anciens quand elle est proposée en cinq lignes	21
Quelles sont les lignes courbes qu'on décrit en trouvant plusieurs de leurs points qui peuvent être reçus en géométrie	23
Quelles sont aussi celles qu'on décrit avec une corde qui peuvent y être reçues.....	23
Que, pour trouver toutes les propriétés des lignes courbes, il suffit de savoir le rapport qu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites ; et la façon de tirer d'autres lignes qui les coupent en tous ces points à angles droits	23
Façon générale pour trouver des lignes droites qui coupent les courbes données ou leurs contingentes à angles droits	24
Exemple de cette opération en une ellipse et en une parabole du second genre	24
Autre exemple en un ovale du second genre.....	25
Exemple de la construction de ce problème en la conchoïde	30
Explication de quatre nouveaux genres d'ovales qui servent à l'optique	30
Les propriétés de ces ovales touchant les réflexions et les réfractions...	33
Démonstration de ces propriétés.....	34
Comment on peut faire un verre autant convexe ou concave en l'une de ses superficies qu'on voudra, qui rassemble à un point donné tous les rayons qui viennent d'un autre point donné.....	36
Comment on en peut faire un qui fasse le même, et que la convexité de l'une de ses superficies ait la proportion donnée avec la convexité ou concavité de l'autre	38
Comment on peut rapporter tout ce qui a été dit des lignes courbes décrites sur une superficie plate, à celles qui se décrivent dans un espace qui a trois dimensions, ou bien sur une superficie courbe.....	39

LIVRE TROISIÈME

DE LA CONSTRUCTION DES PROBLÈMES SOLIDES OU PLUS QUE SOLIDES.

De quelles lignes courbes on peut se servir en la construction de chaque problème.....	40
Exemple touchant l'invention de plusieurs moyennes proportionnelles .	40
De la nature des équations	41
Combien il peut y avoir de racines en chaque équation	41
Quelles sont les fausses racines.....	41
Comment on peut diminuer le nombre des dimensions d'une équation, lorsqu'on connoît quelqu'une de ses racines	42
Comment on peut examiner si quelque quantité donnée est la valeur d'une racine.....	42
Combien il peut y avoir de vraies racines dans chaque équation	42
Comment on fait que les fausses racines deviennent vraies, et les vraies fausses	42
Comment on peut augmenter ou diminuer les racines d'une équation..	42
Qu'en augmentant ainsi les vraies racines on diminue les fausses, ou au contraire	43
Comment on peut ôter le second terme d'une équation.....	44
Comment on fait que les fausses racines deviennent vraies sans que les vraies deviennent fausses	45
Comment on fait que toutes les places d'une équation soient remplies .	46
Comment on peut multiplier ou diviser les racines d'une équation.....	46
Comment on ôte les nombres rompus d'une équation.....	46
Comment on rend la quantité connue de l'un des termes d'une équation égale à telle autre qu'on veut	47
Que les racines, tant vraies que fausses, peuvent être réelles ou imaginaires	47
La réduction des équations cubiques lorsque le problème est plan	47
La façon de diviser une équation par un binôme qui contient sa racine	48
Quels problèmes sont solides lorsque l'équation est cubique	49
La réduction des équations qui ont quatre dimensions lorsque le problème est plan; et quels sont ceux qui sont solides.....	49
Exemple de l'usage de ces réductions	52
Règle générale pour réduire toutes les équations qui passent le carré de carré.....	53
Façon générale pour construire tous les problèmes solides réduits à une équation de trois ou quatre dimensions	53
L'invention de deux moyennes proportionnelles	56

La division de l'angle en trois.....	56
Que tous les problèmes solides se peuvent réduire à ces deux constructions.....	57
La façon d'exprimer la valeur de toutes les racines des équations cubiques, et ensuite de toutes celles qui ne montent que jusques au carré de carré.....	59
Pourquoi les problèmes solides ne peuvent être construits sans les sections coniques, ni ceux qui sont plus composés sans quelques autres lignes plus composées.....	60
Façon générale pour construire tous les problèmes réduits à une équation qui n'a point plus de six dimensions.....	60
L'invention de quatre moyennes proportionnelles.....	65

FIN DE LA TABLE.

TYPOGRAPHICAL ERRORS CORRECTED
IN PROJECT GUTENBERG EDITION

p. 42 the last factor “et par $x - 5$ ” in original, amended to “et par $x + 5$ ” to match the preceding and following discussion.

p. 61 “entre les points E et D égle à $\frac{2\sqrt{u}}{pn}$ ” in original, amended to “égale”.

End of the Project Gutenberg EBook of La géométrie, by René Descartes

*** END OF THIS PROJECT GUTENBERG EBOOK LA GÉOMÉTRIE ***

***** This file should be named 26400-pdf.pdf or 26400-pdf.zip *****
This and all associated files of various formats will be found in:
<http://www.gutenberg.org/2/6/4/0/26400/>

Produced by K.F. Greiner, Joshua Hutchinson, Keith Edkins
and the Online Distributed Proofreading Team at
<http://www.pgdp.net> (This file was produced from images
generously made available by Cornell University Digital
Collections)

Updated editions will replace the previous one--the old editions
will be renamed.

Creating the works from public domain print editions means that no
one owns a United States copyright in these works, so the Foundation
(and you!) can copy and distribute it in the United States without
permission and without paying copyright royalties. Special rules,
set forth in the General Terms of Use part of this license, apply to
copying and distributing Project Gutenberg-tm electronic works to
protect the PROJECT GUTENBERG-tm concept and trademark. Project
Gutenberg is a registered trademark, and may not be used if you
charge for the eBooks, unless you receive specific permission. If you
do not charge anything for copies of this eBook, complying with the
rules is very easy. You may use this eBook for nearly any purpose
such as creation of derivative works, reports, performances and
research. They may be modified and printed and given away--you may do
practically ANYTHING with public domain eBooks. Redistribution is
subject to the trademark license, especially commercial
redistribution.

*** START: FULL LICENSE ***

THE FULL PROJECT GUTENBERG LICENSE
PLEASE READ THIS BEFORE YOU DISTRIBUTE OR USE THIS WORK

To protect the Project Gutenberg-tm mission of promoting the free
distribution of electronic works, by using or distributing this work
(or any other work associated in any way with the phrase "Project
Gutenberg"), you agree to comply with all the terms of the Full Project
Gutenberg-tm License (available with this file or online at
<http://gutenberg.org/license>).

Section 1. General Terms of Use and Redistributing Project Gutenberg-tm electronic works

1.A. By reading or using any part of this Project Gutenberg-tm electronic work, you indicate that you have read, understand, agree to and accept all the terms of this license and intellectual property (trademark/copyright) agreement. If you do not agree to abide by all the terms of this agreement, you must cease using and return or destroy all copies of Project Gutenberg-tm electronic works in your possession. If you paid a fee for obtaining a copy of or access to a Project Gutenberg-tm electronic work and you do not agree to be bound by the terms of this agreement, you may obtain a refund from the person or entity to whom you paid the fee as set forth in paragraph 1.E.8.

1.B. "Project Gutenberg" is a registered trademark. It may only be used on or associated in any way with an electronic work by people who agree to be bound by the terms of this agreement. There are a few things that you can do with most Project Gutenberg-tm electronic works even without complying with the full terms of this agreement. See paragraph 1.C below. There are a lot of things you can do with Project Gutenberg-tm electronic works if you follow the terms of this agreement and help preserve free future access to Project Gutenberg-tm electronic works. See paragraph 1.E below.

1.C. The Project Gutenberg Literary Archive Foundation ("the Foundation" or PGLAF), owns a compilation copyright in the collection of Project Gutenberg-tm electronic works. Nearly all the individual works in the collection are in the public domain in the United States. If an individual work is in the public domain in the United States and you are located in the United States, we do not claim a right to prevent you from copying, distributing, performing, displaying or creating derivative works based on the work as long as all references to Project Gutenberg are removed. Of course, we hope that you will support the Project Gutenberg-tm mission of promoting free access to electronic works by freely sharing Project Gutenberg-tm works in compliance with the terms of this agreement for keeping the Project Gutenberg-tm name associated with the work. You can easily comply with the terms of this agreement by keeping this work in the same format with its attached full Project Gutenberg-tm License when you share it without charge with others.

1.D. The copyright laws of the place where you are located also govern what you can do with this work. Copyright laws in most countries are in a constant state of change. If you are outside the United States, check the laws of your country in addition to the terms of this agreement before downloading, copying, displaying, performing, distributing or creating derivative works based on this work or any other Project Gutenberg-tm work. The Foundation makes no representations concerning the copyright status of any work in any country outside the United States.

1.E. Unless you have removed all references to Project Gutenberg:

1.E.1. The following sentence, with active links to, or other immediate access to, the full Project Gutenberg-tm License must appear prominently whenever any copy of a Project Gutenberg-tm work (any work on which the phrase "Project Gutenberg" appears, or with which the phrase "Project Gutenberg" is associated) is accessed, displayed, performed, viewed, copied or distributed:

This eBook is for the use of anyone anywhere at no cost and with almost no restrictions whatsoever. You may copy it, give it away or re-use it under the terms of the Project Gutenberg License included with this eBook or online at www.gutenberg.org

1.E.2. If an individual Project Gutenberg-tm electronic work is derived from the public domain (does not contain a notice indicating that it is posted with permission of the copyright holder), the work can be copied and distributed to anyone in the United States without paying any fees or charges. If you are redistributing or providing access to a work with the phrase "Project Gutenberg" associated with or appearing on the work, you must comply either with the requirements of paragraphs 1.E.1 through 1.E.7 or obtain permission for the use of the work and the Project Gutenberg-tm trademark as set forth in paragraphs 1.E.8 or 1.E.9.

1.E.3. If an individual Project Gutenberg-tm electronic work is posted with the permission of the copyright holder, your use and distribution must comply with both paragraphs 1.E.1 through 1.E.7 and any additional terms imposed by the copyright holder. Additional terms will be linked to the Project Gutenberg-tm License for all works posted with the permission of the copyright holder found at the beginning of this work.

1.E.4. Do not unlink or detach or remove the full Project Gutenberg-tm License terms from this work, or any files containing a part of this work or any other work associated with Project Gutenberg-tm.

1.E.5. Do not copy, display, perform, distribute or redistribute this electronic work, or any part of this electronic work, without prominently displaying the sentence set forth in paragraph 1.E.1 with active links or immediate access to the full terms of the Project Gutenberg-tm License.

1.E.6. You may convert to and distribute this work in any binary, compressed, marked up, nonproprietary or proprietary form, including any word processing or hypertext form. However, if you provide access to or distribute copies of a Project Gutenberg-tm work in a format other than "Plain Vanilla ASCII" or other format used in the official version posted on the official Project Gutenberg-tm web site (www.gutenberg.org), you must, at no additional cost, fee or expense to the user, provide a copy, a means of exporting a copy, or a means of obtaining a copy upon

request, of the work in its original "Plain Vanilla ASCII" or other form. Any alternate format must include the full Project Gutenberg-tm License as specified in paragraph 1.E.1.

1.E.7. Do not charge a fee for access to, viewing, displaying, performing, copying or distributing any Project Gutenberg-tm works unless you comply with paragraph 1.E.8 or 1.E.9.

1.E.8. You may charge a reasonable fee for copies of or providing access to or distributing Project Gutenberg-tm electronic works provided that

- You pay a royalty fee of 20% of the gross profits you derive from the use of Project Gutenberg-tm works calculated using the method you already use to calculate your applicable taxes. The fee is owed to the owner of the Project Gutenberg-tm trademark, but he has agreed to donate royalties under this paragraph to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation. Royalty payments must be paid within 60 days following each date on which you prepare (or are legally required to prepare) your periodic tax returns. Royalty payments should be clearly marked as such and sent to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation at the address specified in Section 4, "Information about donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation."
- You provide a full refund of any money paid by a user who notifies you in writing (or by e-mail) within 30 days of receipt that s/he does not agree to the terms of the full Project Gutenberg-tm License. You must require such a user to return or destroy all copies of the works possessed in a physical medium and discontinue all use of and all access to other copies of Project Gutenberg-tm works.
- You provide, in accordance with paragraph 1.F.3, a full refund of any money paid for a work or a replacement copy, if a defect in the electronic work is discovered and reported to you within 90 days of receipt of the work.
- You comply with all other terms of this agreement for free distribution of Project Gutenberg-tm works.

1.E.9. If you wish to charge a fee or distribute a Project Gutenberg-tm electronic work or group of works on different terms than are set forth in this agreement, you must obtain permission in writing from both the Project Gutenberg Literary Archive Foundation and Michael Hart, the owner of the Project Gutenberg-tm trademark. Contact the Foundation as set forth in Section 3 below.

1.F.

1.F.1. Project Gutenberg volunteers and employees expend considerable effort to identify, do copyright research on, transcribe and proofread public domain works in creating the Project Gutenberg-tm collection. Despite these efforts, Project Gutenberg-tm electronic works, and the medium on which they may be stored, may contain "Defects," such as, but not limited to, incomplete, inaccurate or corrupt data, transcription errors, a copyright or other intellectual property infringement, a defective or damaged disk or other medium, a computer virus, or computer codes that damage or cannot be read by your equipment.

1.F.2. LIMITED WARRANTY, DISCLAIMER OF DAMAGES - Except for the "Right of Replacement or Refund" described in paragraph 1.F.3, the Project Gutenberg Literary Archive Foundation, the owner of the Project Gutenberg-tm trademark, and any other party distributing a Project Gutenberg-tm electronic work under this agreement, disclaim all liability to you for damages, costs and expenses, including legal fees. YOU AGREE THAT YOU HAVE NO REMEDIES FOR NEGLIGENCE, STRICT LIABILITY, BREACH OF WARRANTY OR BREACH OF CONTRACT EXCEPT THOSE PROVIDED IN PARAGRAPH F3. YOU AGREE THAT THE FOUNDATION, THE TRADEMARK OWNER, AND ANY DISTRIBUTOR UNDER THIS AGREEMENT WILL NOT BE LIABLE TO YOU FOR ACTUAL, DIRECT, INDIRECT, CONSEQUENTIAL, PUNITIVE OR INCIDENTAL DAMAGES EVEN IF YOU GIVE NOTICE OF THE POSSIBILITY OF SUCH DAMAGE.

1.F.3. LIMITED RIGHT OF REPLACEMENT OR REFUND - If you discover a defect in this electronic work within 90 days of receiving it, you can receive a refund of the money (if any) you paid for it by sending a written explanation to the person you received the work from. If you received the work on a physical medium, you must return the medium with your written explanation. The person or entity that provided you with the defective work may elect to provide a replacement copy in lieu of a refund. If you received the work electronically, the person or entity providing it to you may choose to give you a second opportunity to receive the work electronically in lieu of a refund. If the second copy is also defective, you may demand a refund in writing without further opportunities to fix the problem.

1.F.4. Except for the limited right of replacement or refund set forth in paragraph 1.F.3, this work is provided to you 'AS-IS' WITH NO OTHER WARRANTIES OF ANY KIND, EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO WARRANTIES OF MERCHANTABILITY OR FITNESS FOR ANY PURPOSE.

1.F.5. Some states do not allow disclaimers of certain implied warranties or the exclusion or limitation of certain types of damages. If any disclaimer or limitation set forth in this agreement violates the law of the state applicable to this agreement, the agreement shall be interpreted to make the maximum disclaimer or limitation permitted by the applicable state law. The invalidity or unenforceability of any provision of this agreement shall not void the remaining provisions.

1.F.6. INDEMNITY - You agree to indemnify and hold the Foundation, the trademark owner, any agent or employee of the Foundation, anyone providing copies of Project Gutenberg-tm electronic works in accordance with this agreement, and any volunteers associated with the production, promotion and distribution of Project Gutenberg-tm electronic works, harmless from all liability, costs and expenses, including legal fees, that arise directly or indirectly from any of the following which you do or cause to occur: (a) distribution of this or any Project Gutenberg-tm work, (b) alteration, modification, or additions or deletions to any Project Gutenberg-tm work, and (c) any Defect you cause.

Section 2. Information about the Mission of Project Gutenberg-tm

Project Gutenberg-tm is synonymous with the free distribution of electronic works in formats readable by the widest variety of computers including obsolete, old, middle-aged and new computers. It exists because of the efforts of hundreds of volunteers and donations from people in all walks of life.

Volunteers and financial support to provide volunteers with the assistance they need, is critical to reaching Project Gutenberg-tm's goals and ensuring that the Project Gutenberg-tm collection will remain freely available for generations to come. In 2001, the Project Gutenberg Literary Archive Foundation was created to provide a secure and permanent future for Project Gutenberg-tm and future generations. To learn more about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation and how your efforts and donations can help, see Sections 3 and 4 and the Foundation web page at <http://www.pglaaf.org>.

Section 3. Information about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation

The Project Gutenberg Literary Archive Foundation is a non profit 501(c)(3) educational corporation organized under the laws of the state of Mississippi and granted tax exempt status by the Internal Revenue Service. The Foundation's EIN or federal tax identification number is 64-6221541. Its 501(c)(3) letter is posted at <http://pglaaf.org/fundraising>. Contributions to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation are tax deductible to the full extent permitted by U.S. federal laws and your state's laws.

The Foundation's principal office is located at 4557 Melan Dr. S. Fairbanks, AK, 99712., but its volunteers and employees are scattered throughout numerous locations. Its business office is located at 809 North 1500 West, Salt Lake City, UT 84116, (801) 596-1887, email business@pglaaf.org. Email contact links and up to date contact information can be found at the Foundation's web site and official

page at <http://pglaf.org>

For additional contact information:

Dr. Gregory B. Newby
Chief Executive and Director
gnewby@pglaf.org

Section 4. Information about Donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation

Project Gutenberg-tm depends upon and cannot survive without wide spread public support and donations to carry out its mission of increasing the number of public domain and licensed works that can be freely distributed in machine readable form accessible by the widest array of equipment including outdated equipment. Many small donations (\$1 to \$5,000) are particularly important to maintaining tax exempt status with the IRS.

The Foundation is committed to complying with the laws regulating charities and charitable donations in all 50 states of the United States. Compliance requirements are not uniform and it takes a considerable effort, much paperwork and many fees to meet and keep up with these requirements. We do not solicit donations in locations where we have not received written confirmation of compliance. To SEND DONATIONS or determine the status of compliance for any particular state visit <http://pglaf.org>

While we cannot and do not solicit contributions from states where we have not met the solicitation requirements, we know of no prohibition against accepting unsolicited donations from donors in such states who approach us with offers to donate.

International donations are gratefully accepted, but we cannot make any statements concerning tax treatment of donations received from outside the United States. U.S. laws alone swamp our small staff.

Please check the Project Gutenberg Web pages for current donation methods and addresses. Donations are accepted in a number of other ways including checks, online payments and credit card donations. To donate, please visit: <http://pglaf.org/donate>

Section 5. General Information About Project Gutenberg-tm electronic works.

Professor Michael S. Hart is the originator of the Project Gutenberg-tm concept of a library of electronic works that could be freely shared with anyone. For thirty years, he produced and distributed Project Gutenberg-tm eBooks with only a loose network of volunteer support.

Project Gutenberg-tm eBooks are often created from several printed editions, all of which are confirmed as Public Domain in the U.S. unless a copyright notice is included. Thus, we do not necessarily keep eBooks in compliance with any particular paper edition.

Most people start at our Web site which has the main PG search facility:

<http://www.gutenberg.org>

This Web site includes information about Project Gutenberg-tm, including how to make donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation, how to help produce our new eBooks, and how to subscribe to our email newsletter to hear about new eBooks.

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES

Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos.

Descartes. *La Geometría* (G.AT.VI.369).

Descartes mediante un nuevo método hizo pasar de las tinieblas a la luz cuanto en las Matemáticas había permanecido inaccesible a los antiguos y todo cuanto los contemporáneos habían sido incapaces de descubrir; luego puso los cimientos inquebrantables de la Filosofía sobre los cuales es posible asentar la mayor parte de las verdades en el orden y con la certidumbre de las Matemáticas.

Spinoza. *Los Principios de la Filosofía cartesiana*.

Lo que ha immortalizado el nombre de Descartes es la aplicación que ha sabido hacer del Álgebra a la Geometría, una idea de las más vastas y felices que haya tenido el espíritu humano, y que será siempre la llave de los más profundos descubrimientos no solamente en la Geometría, sino en todas las ciencias físico-matemáticas.

D'Alembert. *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie* (Orbis, 1984, pp.84–85).

La Geometría analítica, mucho más que cualquiera de sus especulaciones metafísicas, immortaliza el nombre de Descartes y constituye el máximo paso hecho en el progreso de las ciencias exactas.

J. Stuart Mill. (citado por E.Bell en *Les grands mathématiciens*. Payot, París, 1950. Cap.3. p.46).

Introducción.

Del Álgebra Geométrica griega a la Geometría Analítica Cartesiana.

El Álgebra Geométrica del Libro II de *Los Elementos* de Euclides.

Coordenadas en *Las Cónicas* de Apolonio.

El Análisis Geométrico griego y la Geometría Analítica.

La Geometría de Descartes.

La formación de Descartes en La Flèche.

Citas memorables de Descartes.

Citas memorables sobre Descartes.

Los sueños de Descartes y los orígenes de *La Geometría*.

Las Regulae, El Discurso del Método y La Geometría.

La percepción de Descartes sobre el eco científico de *La Geometría*.

El contenido de *La Geometría*.

La construcción geométrico-algebraica de las operaciones aritméticas.

La notación matemática cartesiana.

Análisis y Síntesis: planteamiento y resolución de las ecuaciones.

Sistemas de referencia. *El Problema de Pappus*.

Las rectas normales a una curva. *El Método del círculo*.

La Geometría de Descartes y la Geometría Analítica.

La proyección histórica de la Geometría Analítica cartesiana.

Bibliografía.



Introducción:

Del Álgebra Geométrica griega a la Geometría Analítica Cartesiana

La Geometría Analítica es un poderoso instrumento de ataque de los problemas geométricos que utiliza como herramienta básica el Álgebra. La esencia de su aplicación en el plano es el establecimiento de una correspondencia entre los puntos del plano y pares ordenados de números reales, es decir, un sistema de coordenadas, lo que posibilita una asociación entre curvas del plano y ecuaciones en dos variables, de modo que cada curva del plano tiene asociada una ecuación $f(x,y)=0$ y, recíprocamente, para cada ecuación en dos variables está definida una curva que determina un conjunto de puntos en el plano, siempre respecto de un sistema de coordenadas. En particular queda establecida una asociación entre rectas del plano y ecuaciones de primer grado de la forma $Ax+By+C=0$. La Geometría Analítica es, pues, una especie de diccionario entre el Álgebra y la Geometría que asocia pares de números a puntos y ecuaciones a curvas. Pero esta asociación va más allá de lo gramatical ya que vincula también las sintaxis del Álgebra y de la Geometría, es decir, las relaciones, vínculos y operaciones entre los elementos de ambas. Así pues, para hallar geoméricamente la intersección de dos curvas $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ –problema geométrico– habría que resolver algebraicamente el sistema formado por ambas ecuaciones –problema algebraico–. Además, para cada curva $f(x,y)=0$, la Geometría Analítica establece también una correspondencia entre las propiedades algebraicas y analíticas de la ecuación $f(x,y)=0$ y las propiedades geométricas de la curva asociada. De hecho, estas propiedades geométricas son el trasunto geométrico de la estructura algebraica de la expresión $f(x,y)=0$ y se establecen mediante el cálculo literal que permite el Álgebra. En particular la tarea de probar un teorema o resolver un problema en Geometría se traslada de forma muy eficiente a probarlo o resolverlo en Álgebra utilizando el cálculo analítico.

Es indiscutible que Fermat y Descartes son los verdaderos artífices de la Geometría Analítica. Descartes publica en 1637 *La Geometría*, junto con *La Dióptrica* y *Los Meteoros* como apéndices de su *Discurso del Método* o éste como prólogo de aquellos opúsculos. El mismo año, Fermat envía al Padre Mersenne sus investigaciones de alrededor de 1629 contenidas en la memoria *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos (Ad Locos Planos et Solidos Isagoge)*. Las obras citadas de Descartes y Fermat contienen los fundamentos de la llamada más tarde Geometría Analítica.

Hay una gran unanimidad en considerar a *La Geometría* de Descartes como una de las obras más importantes en la historia del pensamiento matemático. Al utilizar el Álgebra simbólica como herramienta algorítmica básica, Descartes realiza una nueva lectura de la Geometría griega, que supera sus limitaciones y rebasa sus conquistas geométricas. A base de elaborar una excelente herramienta para enfrentar y resolver problemas geométricos antiguos y modernos, Descartes libera a la Geometría de la dependencia a la estructura geométrica de las figuras e introduce una forma de solución de los problemas basada en la aplicación del Análisis mediante la intervención del Álgebra.

El Análisis Geométrico griego utilizaba un equivalente de las coordenadas pero sólo empleaba Álgebra Geométrica. El *Arte Analítica* de Vieta desarrolla el Álgebra simbólica pero no usa coordenadas. Al aunar ambos instrumentos, coordenadas y Álgebra literal, Descartes alumbró la Geometría Analítica que establece un puente para transitar entre la Geometría y el Álgebra, al permitir asociar curvas y ecuaciones, a base de aplicar el Análisis algebraico de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus, definidos, en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas. La Geometría Analítica resultante, dotada del simbolismo literal, con toda la potencia algorítmica de la mecánica operatoria del cálculo, manipulación y simplificación que permite el Álgebra, sustituye las ingeniosas construcciones geométricas de la rígida y retórica *Álgebra Geométrica* de los griegos por sistemáticas operaciones algebraicas y se convierte en una poderosa herramienta de investigación, mediante la cual Descartes resuelve de forma brillante y asombrosa, numerosos problemas geométricos, clásicos y modernos, algunos realmente difíciles, como el trazado de normales a las curvas, el *Problema de Apolonio* y otros que se habían resistido a lo largo de la Historia como el famoso *Problema de Pappus*.

Aquí vamos a realizar un estudio crítico de la obra de Descartes, *La Geometría*. Para valorar la trascendencia de esta obra en la Historia de la Matemática, haremos una breve descripción de los métodos de la Geometría griega, no sólo porque por comparación podremos ponderar la eficiencia de los métodos cartesianos sino porque la motivación y el origen de la obra cartesiana arranca de su lectura por parte de Descartes y la crítica de sus limitaciones. También conviene remontarse a la Geometría griega para rastrear ciertos vestigios analíticos, entre ellos el uso rudimentario de coordenadas en Apolonio y la naturaleza del Análisis Geométrico griego como instrumento de investigación, ya que ambos elementos son primigenios antecedentes de la Geometría Analítica cartesiana.

La Geometría Analítica de Descartes es un salto revolucionario sin precedentes en la Historia de la Matemática. Para valorar en su justo valor el nuevo instrumento científico, así como para comprender cómo tuvo lugar su gestación es imprescindible conocer la naturaleza de la Geometría griega, condicionada por el veto al infinito que trajo la aparición de los inconmensurables, con la consiguiente estructuración rígida de la Matemática griega elemental en la enciclopédica obra de *Los Elementos* de Euclides, que establece de forma paradigmática un estilo sintético de exposición que oculta la vía heurística del descubrimiento, impulsa la Geometría al margen de la Aritmética, impide el desarrollo de un Álgebra en sentido algorítmico y simbólico y limita la introducción de nuevas curvas a su construcción mediante intersección de superficies o lugares geométricos definidos a través de relaciones de áreas o longitudes, en forma de proporción, y no por medio de ecuaciones.

La estructura que adopta esta Matemática se llama el *Álgebra Geométrica* de los griegos. Se trata de una especie de Geometría algebraica, resultado de la geometrización de los métodos algebraicos mesopotámicos, en la que los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo, mediante construcciones geométricas que obligan a mantener escrupulosamente la homogeneidad de los términos. Esta teoría constituye una potente técnica de resolución de ecuaciones –muy rigurosa aunque un tanto onerosa para nosotros–, que se llama el método de *Aplicación de las Áreas*. Mediante una sofisticada aplicación de este método, Apolonio construye con un inefable virtuosismo su famosa obra *Las Cónicas*, donde aparece una aplicación muy incipiente de las coordenadas. De todas estas cuestiones –que interesan al origen de la Geometría Analítica– se habla en los capítulos introductorios. Y también del método de *Análisis* de los griegos, del que la Geometría Analítica recibirá no sólo su nombre sino sobre todo sus procedimientos. Se trata en particular el concepto que sobre él tenían Platón y Pappus y la visión de Descartes sobre el mismo en las *Reglas para la dirección del espíritu*.

El objetivo fundamental de este trabajo es desentrañar las raíces de la Geometría Analítica en el pensamiento filosófico y matemático cartesianos. Por eso se ha dedicado una generosa extensión a la importante cuestión del anclaje de *La Geometría* de Descartes en su obra filosófica y en particular en *El Discurso del Método* y en las *Reglas para la dirección del espíritu*, obras donde se sitúa la metodología cartesiana, en particular los preceptos del *Análisis* y la *Síntesis* que Descartes aplicará de forma constante en *La Geometría*. Así pues, se analizan de forma exhaustiva los textos de esas obras de Descartes, que son esenciales para entender como se va fraguando la motivación y la estructuración de la metodología cartesiana de *La Geometría*.

Se estudia en un capítulo, de forma sucinta, el contenido general de *La Geometría*, pero en los siguientes capítulos se concretan, con gran extensión, los aspectos de la obra cartesiana que interesan a los orígenes de la Geometría Analítica: La construcción geométrico-algebraica de las operaciones aritméticas, la notación matemática cartesiana, la aplicación del Análisis y la Síntesis en el planteamiento y resolución de las ecuaciones, los sistemas de referencia en el estudio del *Problema de Pappus* y la construcción de las rectas normales a una curva mediante el método del círculo.

La Geometría Analítica es mucho más que una mera combinación de Álgebra y Geometría. Para poder circular del Álgebra a la Geometría y de la Geometría al Álgebra se necesita como ingredientes ineludibles no sólo el carácter algorítmico operatorio del Álgebra simbólica sino también la aplicación de las coordenadas. Una aproximación al uso de éstas ya tuvo lugar en la Geometría griega con Apolonio y Pappus, pero el Álgebra simbólica no

se desarrolla de forma satisfactoria hasta los trabajos de Vieta. Al vincular ambos elementos en los desarrollos de Descartes, emerge la Geometría Analítica de forma inexorable. Pero como en cualquier creación humana, la de Descartes es tributaria de importantes desarrollos matemáticos anteriores. Por eso, a lo largo de este estudio acerca origen de la Geometría Analítica en La Geometría de Descartes intentamos clarificar la influencia de los diversos hitos históricos –geométricos y algebraicos– sobre el hallazgo cartesiano. Esta es la razón por la cual hemos incluido aspectos de la Historia de la Geometría griega y de la evolución del Álgebra sin los cuales no se entendería la obra de Descartes y su enorme incidencia en la Historia de la Matemática.

A fin de concretar el significado de los términos, digamos que entendemos por Geometría Analítica lo que hemos descrito más arriba como su esencia y que ahora sintetizamos:

«La aplicación del Álgebra simbólica al estudio de problemas geométricos mediante la asociación de curvas y ecuaciones indeterminadas en un sistema de coordenadas.»

Esta definición es la que nos ha guiado para entresacar de toda la obra cartesiana los elementos que se refieren a lo que dos siglos después de Descartes se llamó Geometría Analítica. Así pues, se empieza por la descripción de los preliminares geométrico-algebraicos que Descartes estudia con la denominación *«Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de geometría»*, de una gran importancia, porque en este apartado Descartes soslaya el problema de la inconmensurabilidad, al asignar longitudes a los segmentos, previa la adopción de un segmento unidad a discreción, tras lo cual construye de forma efectiva las operaciones aritméticas dándoles significado geométrico. De esta forma Descartes elimina la limitación pitagórica de la inconmensurabilidad.

El siguiente punto esencial es la simplificación de la notación algebraica, una cuestión intrínsecamente vinculada a los métodos de la Geometría Analítica. Tanto es así, que en todo estudio histórico sobre la Geometría Analítica una parte importante la ocupa la evolución histórica del simbolismo, que alcanza su clímax en los aportes del propio Descartes a la notación algebraica, ingrediente esencial del descubrimiento cartesiano, que aparece primero en las *Regulae* y después en *La Geometría*. En el apartado de ésta titulado *«Cómo pueden emplearse letras en geometría»*, Descartes considera un segmento de recta tanto como magnitud geométrica continua como una medida numérica, pero establece que la potencia de un segmento sigue siendo un segmento, de modo que cuadrado y cubo ya no son magnitudes planas o espaciales, sino la segunda o tercera potencia de un número. De este modo, las operaciones aritméticas quedan incluidas en un terreno estrictamente algebraico. Con ello Descartes elimina otra limitación, la euclídea de la homogeneidad.

Continúa el trabajo cartesiano con la aplicación de la metodología cartesiana del Análisis y la Síntesis en el planteamiento y resolución de ecuaciones que corresponden a los *problemas planos*, donde se desarrolla todo un protocolo de actuación –suponer el problema resuelto; dar nombre a todos los segmentos que parecen necesarios para representar los datos del problema, tanto los conocidos como los desconocidos; determinar la ecuación entre las longitudes conocidas y las desconocidas; resolver la ecuación resultante; construir geométricamente la solución–. Se trata de un verdadero método de resolución de problemas geométricos donde se transita de forma reversible de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría. En particular, Descartes exhibe de forma ostentosa eficientes métodos de resolución de ecuaciones y de construcción geométrica de las soluciones, que contrastan con la farragosidad del Álgebra Geométrica de *Los Elementos* de Euclides. Realmente aquí vemos la magnificencia y simplicidad de los métodos de *La Geometría* de Descartes en contraposición a la prolijidad y precariedad de la Geometría griega.

Sigue a continuación un tratamiento exhaustivo del histórico *Problema de Pappus* donde Descartes introduce el primer sistema de coordenadas de *La Geometría*. Este problema fue un indicador fehaciente, ante el público científico coetáneo, de la novedad y de la inusitada potencialidad del método analítico cartesiano en Geometría en un asunto geométrico que desbordó a lo largo de los siglos las posibilidades del Análisis geométrico griego.

Finalmente se considera el problema más querido y anhelado para Descartes, según sus propias palabras, la determinación de las rectas normales a una curva, donde se resuelve

de forma prodigiosa el problema de normales y tangentes, pero sobre todo se apunta a la asociación de curvas y ecuaciones que instaura los dos principios fundamentales de la llamada Geometría Analítica:

- La relación entre las coordenadas de los puntos de una curva –la ecuación de la curva– establece una correspondencia entre las propiedades algebraicas de la expresión de la ecuación y las propiedades geométricas de la curva asociada.
- La intersección de curvas –que es un problema geométrico– se reconduce a la resolución de sistemas de ecuaciones – que es un problema algebraico–.

La Geometría de Descartes traslada de la Geometría al Álgebra la resolución de los problemas geométricos y además convierte al Álgebra en un magnífico instrumento de exploración e investigación geométrica. Por ejemplo, la realización de ciertos cálculos y en particular la resolución de algunas ecuaciones vinculadas a la expresión de la curva, permiten la obtención de los elementos geométricos notables de la misma, es decir, diámetros, ejes, asíntotas, centros, etc. Incluso Descartes habla de su aplicación «a la medida del espacio que abarcan», queriendo indicar, tal vez, las cuadraturas.

Y más todavía, la propia expresión analítica de la ecuación de una curva es una incipiente aproximación al concepto de función.

Como una manifestación de la trascendencia de *La Geometría* de Descartes en la Historia de la Matemática, nos ha parecido conveniente describir la decisiva influencia de la obra cartesiana en el descubrimiento y desarrollo del Cálculo Infinitesimal.

Hacia el final se relaciona de forma muy sucinta la rápida evolución de la Geometría Analítica poscartesiana, hasta situarnos en el umbral de la Geometría Analítica moderna, la que se imparte hoy académicamente, salvo en lo que se refiere al instrumento vectorial.

Acabamos con unas reflexiones sobre la proyección histórica de la Geometría Analítica cartesiana, una potente herramienta que domina el pensamiento matemático desde la época de Descartes, que al aportar simplificación, generalización, mecanización, unificación, flexibilidad, versatilidad, claridad, economía, brevedad y difusión, se convierte en el lenguaje universal de las ciencias. La Geometría Analítica cambió el rostro de las Matemáticas y el semblante de la Educación matemática.

Además de la consulta a diversos textos de Historia de la Matemática, Historia de la Filosofía, Filosofía de la Ciencia y de la Matemática, artículos de revistas científicas, etc., el manantial bibliográfico fundamental utilizado ha sido, por una parte, Obras originales de los principales matemáticos griegos (Euclides, Apolonio, Diofanto y Pappus), y por otra de Vieta y Descartes. En concreto, dignas son de mención las ediciones de Blanchard, en francés, de Paul Ver Eecke de *Las Cónicas* de Apolonio, *La Aritmética* de Diofanto y *La Colección Matemática* de Pappus; y las mismas obras en ediciones en español de F.Vera incluidas en *Científicos griegos* (Aguilar, Madrid, 1970).

Los argumentos de los diversos capítulos se sustentan de forma esencial en los textos originales de Descartes. Aparte de diversas ediciones, en español, de *El Discurso del Método* y de las *Reglas para la dirección del espíritu*, la referencia esencial ha sido *Oeuvres de Descartes*, Publicadas por C.Adam et P.Tannery (Librairie philosophique J.Vrin, París, 1964-74), sobre todo el volumen VI que contiene *El Discours de la Méthode* y *La Géométrie* y el volumen X que contiene las *Regulae ad directionem ingenii*. Han sido también de una gran utilidad las ediciones de *La Geometría*, en español (Espasa-Calpe y Alfaguara), inglés (Dover) y en especial la magnífica edición en catalán del Institut d'Estudis Catalans (Barcelona, 1999) con introducción y notas de J. Pla y P. Viader.

La referencia concreta a un texto de Descartes se hará respecto a *Oeuvres de Descartes*, indicando la página a continuación de la partícula DM.AT.VI., G.AT.VI., o R.AT.X. respectivamente, según se trate de *El Discurso del Método*, *La Geometría* o las *Regulae*. Por ejemplo (G.AT,VI,372) indicará que el texto al que se hace alusión se encuentra en la página 372 del sexto tomo de las *Oeuvres* de Descartes, que contiene *La Geometría*.

El Álgebra Geométrica del Libro II de *Los Elementos* de Euclides

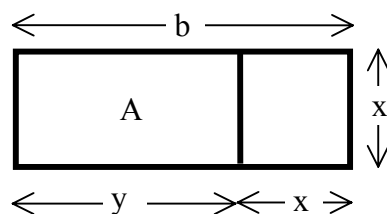
Como consecuencia de la aparición de las magnitudes inconmensurables, los griegos no podían reconocer la existencia de números irracionales, lo que les dificultaba el tratamiento numérico de longitudes, áreas, volúmenes y ángulos. Esta limitación operacional junto a un deficiente sistema de numeración que utilizaba las letras del alfabeto para representar los números enteros, con la consiguiente dificultad para realizar las operaciones, impedía asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes, áreas y volúmenes y por tanto los griegos tenían que tratar directamente con las figuras a modo de magnitudes. El abismo infranqueable que se había abierto entre número y magnitud continua impedía someter las magnitudes geométricas a manipulaciones algebraicas, como se hace con los números, lo que determinó la transformación del Álgebra oriental que los pitagóricos habían heredado de los babilonios en el *Álgebra Geométrica* del Libro II de *Los Elementos* de Euclides que juega un papel fundamental en la Geometría griega. Con gran habilidad en la práctica geométrica, los griegos hicieron de su *Álgebra Geométrica* un poderoso instrumento para la resolución de ecuaciones, mediante el método de la *Aplicación de las Áreas*, teoría que según Proclo sería de ascendencia pitagórica.

El *Álgebra Geométrica*, denominación acuñada por el historiador de la Matemática H.G. Zeuthen hacia 1886, viene a ser una geometrización de los métodos algebraicos practicados por los babilónicos, una especie de Geometría algebraica, en la que los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo mediante construcciones geométricas –respetando escrupulosamente la homogeneidad de los términos– de la siguiente forma:

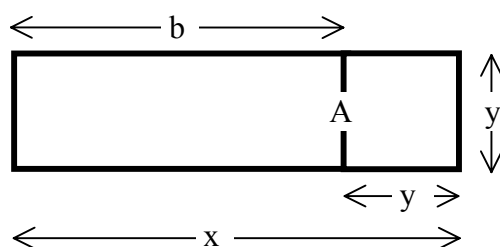
- La suma de dos números se obtiene prolongando sobre el primero un segmento igual al segundo.
- La diferencia de dos números se obtiene recortando del primero un segmento igual al segundo.
- El producto de dos números es el área del rectángulo cuyos lados tienen como longitudes esos números.
- El cociente de dos números es la razón de los segmentos que los representan (según los principios del libro V de *Los Elementos* de Euclides).
- La suma y la diferencia de productos se reemplaza por la adición y sustracción de rectángulos.
- La extracción de una raíz cuadrada se establece mediante la construcción de un cuadrado de área equivalente a la de un rectángulo dado (*Euclides* II.14).

Por ejemplo, el viejo problema mesopotámico en el que dada la suma o diferencia y el producto de los lados de un rectángulo, $x \cdot y = A$, $x \pm y = b$, se pedía hallar dichos lados, se interpretaba geométricamente de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot y = A \\ x + y = b \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = b - x, x \cdot (b - x) = A, bx - x^2 = A \end{array}$$

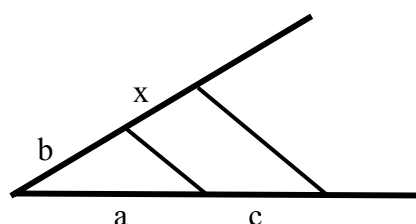


$$\left. \begin{array}{l} x \cdot y = A \\ x - y = b \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = b + y, y \cdot (b + y) = A, by + y^2 = A \end{array}$$



La solución geométrica lleva a la construcción sobre un segmento b de un rectángulo cuya altura desconocida x debe ser tal que el área del rectángulo en cuestión exceda del área dada A (en el caso de signo positivo) en el cuadrado de lado x ; o difiera del área dada (en el caso de signo negativo) en el cuadrado de lado y .

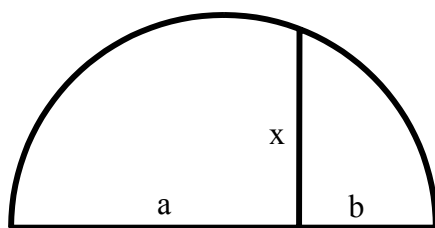
En su *Álgebra Geométrica* los griegos utilizaron principalmente dos métodos para resolver cierto tipo de ecuaciones, el método de las proporciones y el método de *Aplicación de las Áreas*. El método de las proporciones permite construir exactamente, como se hace hoy, un segmento de línea x dado por:



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}, \quad a \cdot x = b \cdot c$$

Se aplica la cuarta proporcional (*Euclides VI.12*)

o bien:



$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}, \quad x^2 = a \cdot b$$

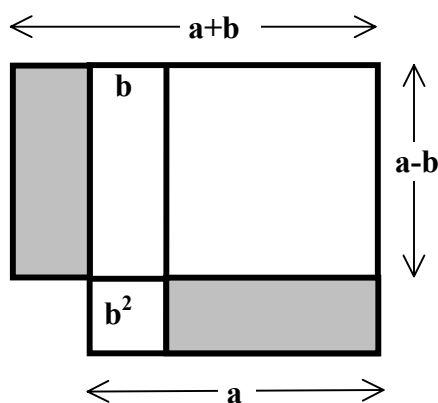
Se aplica la media proporcional (*Euclides VI.13*)

No obstante la inseguridad provocada en la Matemática griega por las magnitudes inconmensurables, conducía a evitar a toda costa el uso de razones en la Geometría elemental. Por eso el tratamiento de ecuaciones tan sencillas como $a \cdot x = bc$ y $x^2 = ab$, en forma de proporción, tiene lugar en el Libro VI de *Los Elementos* de Euclides, es decir, se retrasa hasta después de desarrollar la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo en el libro V.

La parte más importante del *Álgebra Geométrica* de los griegos se encuentra en el Libro II de *Los Elementos* de Euclides. En la actualidad su contenido no juega ningún papel fundamental en los libros de texto modernos. Sin embargo en la Geometría griega ejerce una función primordial. La discrepancia radical entre los puntos de vista griego y moderno estriba en que hoy nosotros podemos disponer de un *Álgebra* simbólica y una Trigonometría, que han sustituido completamente a sus equivalentes geométricos clásicos, precisamente gracias a *La Geometría* de Descartes, que al aplicar la naturaleza algorítmica del *Álgebra* a los problemas geométricos alumbró su Geometría Analítica.

Mientras nosotros representamos las magnitudes con letras que se sobreentiende son números conocidos o desconocidos, con las cuales operamos mediante las reglas algorítmicas del *Álgebra*, los griegos representaban las magnitudes rectilíneas mediante segmentos de línea recta que debían obedecer a los axiomas y teoremas de la Geometría. Con estos elementos los griegos disponían de un *Álgebra –Geométrica–* que cumplía a todos los efectos las mismas funciones que nuestra moderna *Álgebra* simbólica. Ciertamente es que el *Álgebra* moderna con su cálculo literal facilita de forma considerable la manipulación de las operaciones y las relaciones entre magnitudes geométricas, pero no es menos cierto que con su *Álgebra Geométrica* los griegos eran mucho más hábiles que nosotros en la práctica geométrica. Y es que el *Álgebra Geométrica* griega sorprende al estudioso moderno por ser bastante difícil y artificiosa, pero los griegos la utilizaron con soltura y para ellos debió ser una herramienta de utilización necesaria, básica y cómoda.

Así por ejemplo la Proposición II.5 de *Los Elementos* de Euclides:



Euclides II.5
 $(a+b)(a-b) + b^2 = a^2$

«Si se divide una recta en partes iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta entera, más el cuadrado de la diferencia entre las dos partes, es equivalente al cuadrado de la mitad de la recta dada»

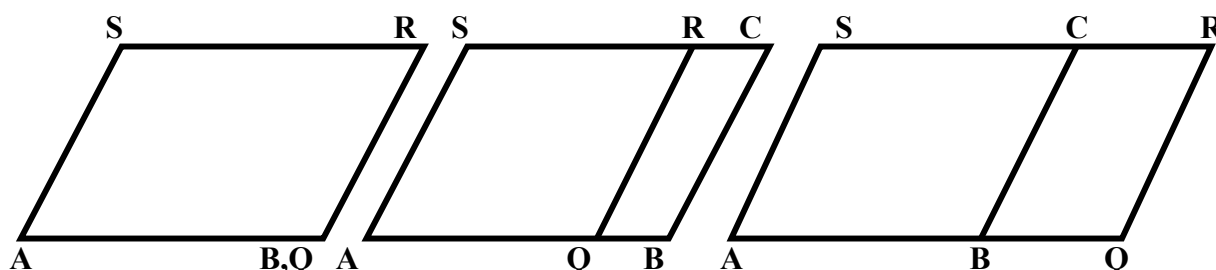
equivale –a pesar del circunloquio retórico– a la identidad algebraica:

$$(a + b) \cdot (a - b) + b^2 = a^2 \quad \text{ó} \quad (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2,$$

y no es más que la formulación geométrica de una de las leyes fundamentales de la Aritmética –suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados–.

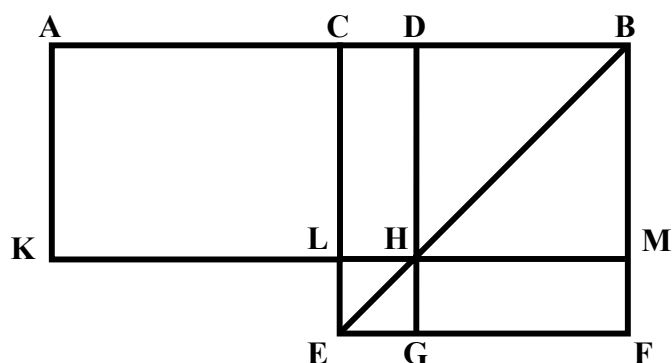
La evidencia visual del teorema aludido para un estudioso griego es muy superior a su contrapartida algebraica actual. Claro está que la demostración rigurosa de Euclides de esta proposición puede ocupar más de una página.

Para explicar de forma más efectiva el método de la aplicación de las áreas, consideremos un segmento de línea AB y un paralelogramo AQRS cuyo lado AQ está a lo largo de AB:



1. Cuando Q coincide con B, se dice que «el paralelogramo AQRS se ha aplicado sobre el segmento AB».
2. Cuando Q está entre A y B, se dice que «el paralelogramo AQRS se ha aplicado sobre el segmento AB de forma elíptica o con defecto el paralelogramo QBCR».
3. Cuando Q está en la prolongación de AB, se dice que «el paralelogramo AQRS se ha aplicado sobre el segmento AB de forma hiperbólica o con exceso el paralelogramo QBCR».

Volviendo a la Proposición II.5 de *Los Elementos* de Euclides, para su demostración consideremos la figura siguiente:



Sea AB el segmento de línea recta dado, dividido de forma igual por C y de forma desigual por D, la proposición establece que: $AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$.

Tomando $AB=2a$, $AC=a$, $CD=b$, resulta la identidad algebraica:

$$(a + b) \cdot (a - b) + b^2 = a^2.$$

Simplificando el lenguaje retórico de Euclides tenemos:

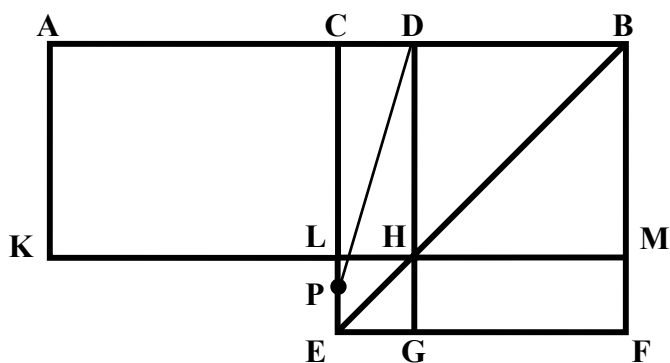
$$AD \cdot DB + CD^2 = AKHD + LEGH = AKLC + CLHD + LEGH = CLMB + CLHD + LEGH = CLMB + HGFM + LEGH = CB^2.$$

Digamos que más importante que la demostración exhibida, es el diagrama que utiliza Euclides en esta demostración porque es un esquema gráfico que jugarían un papel fundamental en la resolución geométrica de ecuaciones cuadráticas.

En efecto: sea resolver en la Geometría griega la ecuación $ax - x^2 = b^2$, es decir, encontrar un segmento de línea x que cumpla la condición expresada por la ecuación $ax - x^2 = b^2$, donde a, b son segmentos tales que $a > 2b$.

Sea ahora $AB = a$, y sea C el punto medio de AB , levantemos por C una perpendicular CP de longitud igual a b . Con centro en P y radio $a/2$ tracemos una circunferencia que corte a AB en el punto D .

Construyamos sobre AB un rectángulo $ABMK$ de anchura $BM = BD$ y completemos el cuadrado $BDHM$. Este cuadrado es el área x^2 que cumple la condición expresada por la ecuación cuadrática. En lenguaje griego de la *Aplicación de las Áreas* se ha aplicado de *forma elíptica* al segmento $AB = a$ un rectángulo AH de área $(a - x) \cdot x$, es decir $ax - x^2$, que es igual a un cuadrado dado b^2 , y que es deficiente del rectángulo AM en un cuadrado DM . La demostración de este hecho viene dada por la Proposición Euclides II.5, según la cual el rectángulo $ADHK$ es igual al polígono cóncavo $CBFGHL$, es decir, difiere de $(a/2)^2$ en el cuadrado $LHGE$ cuyo lado es por construcción $CD = \left[\sqrt{(a/2)^2 - b^2} \right]$.



Sintetizando los cálculos geométricos:

$AB = a$, $AC = CB$

$CP = b$, $PD = a/2$, $LH = CD = \left[\sqrt{(a/2)^2 - b^2} \right]$.

Rectángulo $ABMK$ ($BM = BD$)

Cuadrado $BDHM = x^2$.

Euclides II.5: $AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$.

$ADHK + LHGE = CBFE$,

$ADHK = ABMK - BDHM$,

$ADHK = CBFE - LHGE$,

$ABMK - BDHM = CBFE - LHGE$

$$ax - x^2 = (a/2)^2 - \left[\sqrt{(a/2)^2 - b^2} \right]^2 = b^2.$$

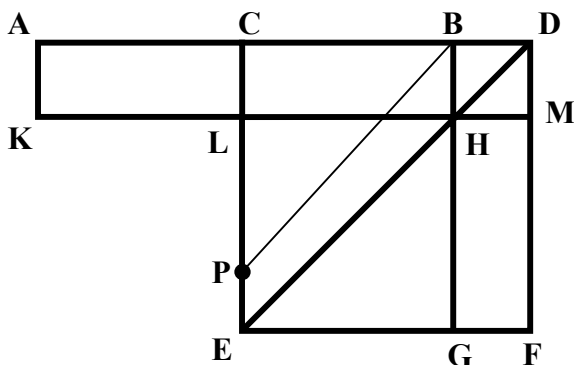
De manera similar se resuelve la ecuación cuadrática $ax + x^2 = b^2$ mediante la Proposición II.6 de *Los Elementos* de Euclides:

«Si se divide una recta en dos partes iguales y se prolonga, el rectángulo comprendido por la recta entera, más la prolongación, y por la prolongación, junto con el cuadrado de la recta mitad, es equivalente al cuadrado de la recta formada por la recta mitad y la prolongación.»

En este caso se trata de aplicar *de forma hiperbólica* a una línea recta dada $AB = a$, un rectángulo $AM = ax + x^2$, que sea igual a un cuadrado dado b^2 y que exceda al rectángulo AH en un cuadrado x^2 .

Sea C el punto medio de AB , levantemos por C una perpendicular CP de longitud igual a b . Con centro en C y radio PB tracemos una circunferencia que corte a AB en el punto D .

Esta vez la distancia es $CD = PB = \sqrt{(a/2)^2 + b^2}$, y como por la proposición se sabe que el rectángulo $AM = ax + x^2$ más el cuadrado $LG = (a/2)^2$ es igual al cuadrado $CF = (a/2)^2 + b^2$, se verifica la condición de la ecuación $ax + x^2 = b^2$.



Sintetizando los cálculos geométricos:

$$AB=a, AC=CB, CP=b, CD=PB=\left[\sqrt{(a/2)^2 + b^2}\right].$$

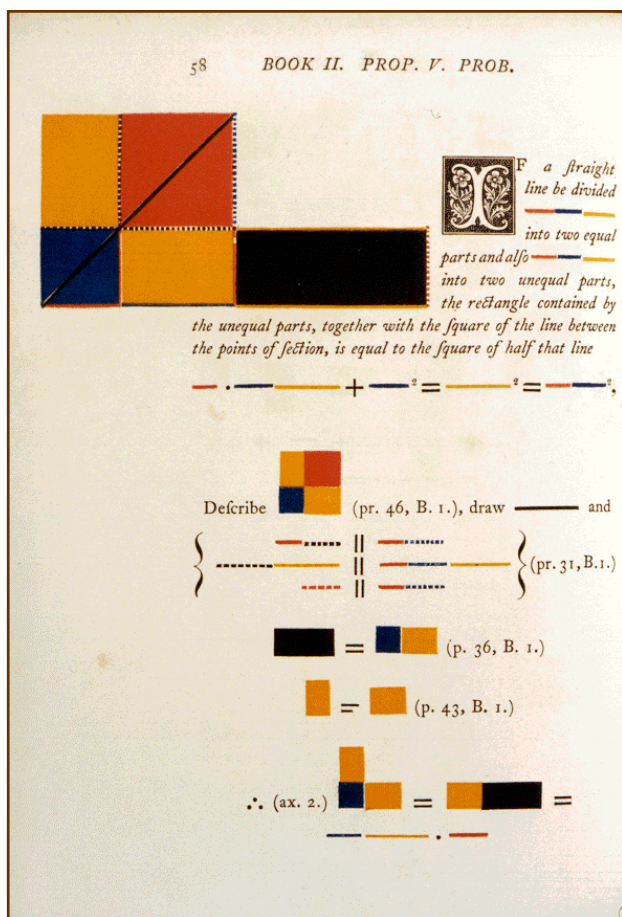
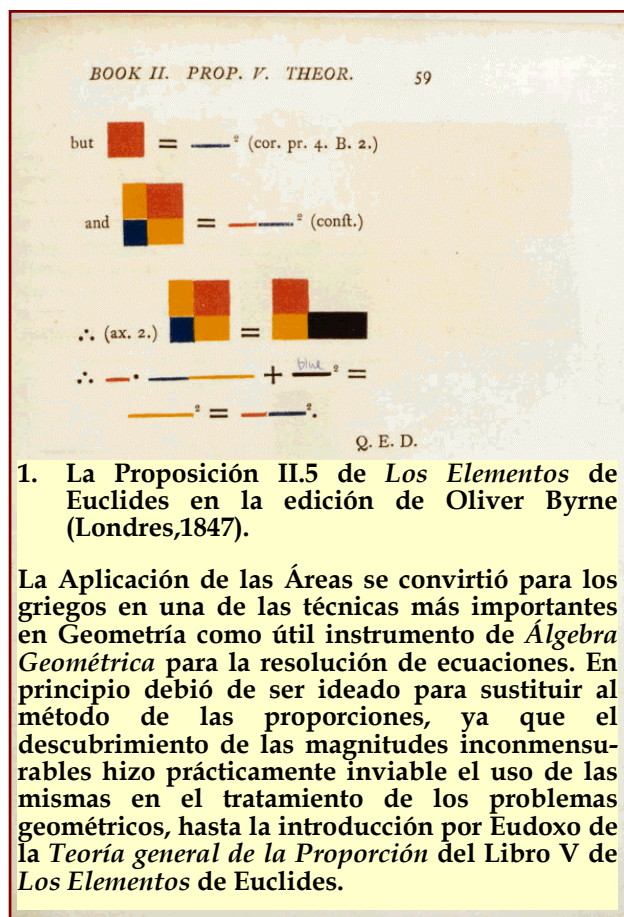
Rectángulo ADMK (BM=BD), Cuadrado BDHM = x^2 .

Euclides II.6: ADMK + LHGE = CDFE.

ADMK = CDFE – LHGE, ADMK = ABHK + BDMH, ABHK + BDMH = CDFE – LHGE

$$ax + x^2 = \left[\sqrt{(a/2)^2 + b^2}\right]^2 - (a/2)^2 = b^2.$$

EL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA Y LA APLICACIÓN DE LAS ÁREAS EN EL LIBRO II DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES



Las bases firmes de *Teoría de la Proporción* permiten a Euclides en las Proposiciones 27, 28 y 29 del Libro VI dar una generalización del método de *Aplicación de las Áreas*, donde el libre uso del concepto de semejanza facilita la sustitución de los rectángulos del Libro II por paralelogramos, permitiendo aplicar a un segmento dado un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda o sea deficiente en un paralelogramo semejante a otro dado. Las construcciones correspondientes como las de las Proposiciones II.5, II.6 son en la práctica soluciones geométricas de las ecuaciones cuadráticas $ax \pm x^2 = bx$, sometidas a la restricción geométrica equivalente a que el discriminante sea no negativo, es decir, las aludidas Proposiciones VI.27, VI.28 y VI.29 son una especie de contrapartida geométrica de la forma algebraica más generalizada de ecuaciones cuadráticas con raíz real y positiva.

Además, desde el punto de vista histórico la *Aplicación de las Áreas* está en el punto de partida de la teoría de Apolonio (hacia 200 a.C.) de las secciones cónicas. De hecho los tres nombres acuñados por Apolonio para las cónicas no degeneradas provienen de la denominación de los tres tipos de aplicación de las áreas: *elíptico* (dado un segmento construir sobre una parte de él o sobre él mismo extendido, un paralelogramo igual en área a una figura rectilínea dada y resultando deficiente en un paralelogramo semejante a uno dado), *hiperbólico* (idem. resultando excedente) y *parabólico* (idem. resultando igual).

Coordenadas en *Las Cónicas* de Apolonio

Las Cónicas de Apolonio es una de las obras más importantes de toda la Geometría griega. En ella quedan acuñadas, con significado, para la posteridad, los nombres de *elipse*, *parábola* e *hipérbola*, procedentes del lenguaje pitagórico de la *Aplicación de las Áreas*. En el cambio de denominación de las cónicas por Apolonio subyace un cambio conceptual, toda vez que una vez construidas a través del cono, Apolonio maneja las cónicas mediante relaciones de áreas y longitudes, que expresan en cada caso la propiedad característica de definición de la curva de la que se obtienen sus propiedades intrínsecas. Apolonio fue capaz de vincular los aspectos estereométricos y planos de las cónicas, al mostrar que las secciones de los conos tenían importantes propiedades como lugares planos, traducibles en básicas expresiones geométricas –equivalentes a nuestras *ecuaciones*–, que permitían deducir, a su vez, otras innumerables propiedades de las cónicas. Es bajo esta visión sobre el trabajo de Apolonio que algunos historiadores modernos (Zeuthen, Coolidge, Loria y Heath) reclaman para los griegos, y empezando por Apolonio, la paternidad de la Geometría Analítica, al establecer como la esencia de esta rama de la Matemática el estudio de los lugares por medio de *ecuaciones*.

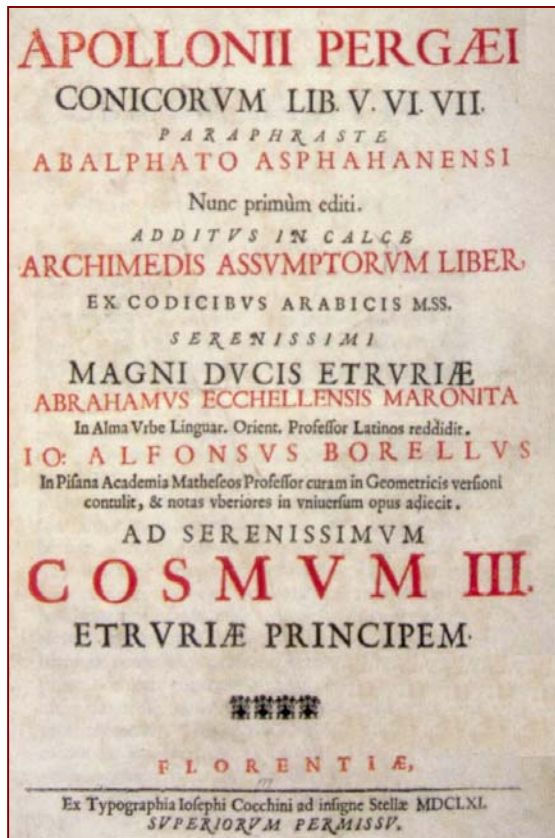
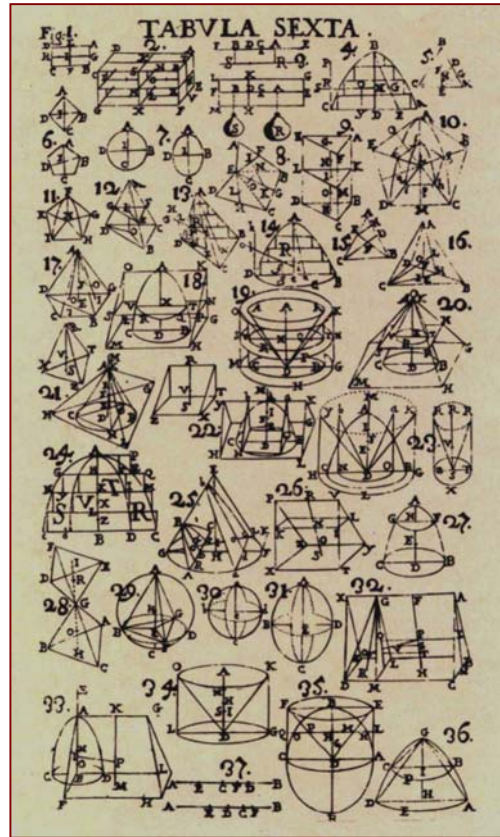
En el estudio de las cónicas, Apolonio considera ciertas *líneas de referencia* –diámetros conjugados o diámetro-tangente–, que juegan un papel de *coordenadas*. En el segundo caso al tomar un diámetro y una tangente en uno de sus extremos como rectas de referencia, las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia son las *abscisas* y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, son las *ordenadas*. Para cada cónica, la conocida relación de áreas y longitudes en forma de proporción en el lenguaje del Álgebra Geométrica –propiedad geométrica de la curva equivalente a su definición como lugar geométrico– se traduce en una relación entre las *abscisas* y las correspondientes *ordenadas*, que Apolonio llamaba el *symptoma* de la curva y que no es sino la expresión retórica de la ecuación analítica de la curva, que en su evolución histórica daría lugar a la llamada *ecuación característica*. El lenguaje de Apolonio es sintético, utilizando con una pericia increíble la técnica pitagórica de la *Aplicación de las Áreas*, pero sus «*métodos de coordenadas*» guardan una gran similitud con los de la Geometría Analítica.

Debemos aquilatar, no obstante, ciertas afirmaciones sobre elementos precursores de la Geometría Analítica, porque al señalar tales atribuciones, más o menos fundadas o infundadas, siempre nos encontraremos con las serias limitaciones impuestas por el carácter geométrico-sintético de la Geometría griega y por la ausencia de un Álgebra simbólica en sentido algorítmico, que es un componente ineludible de una verdadera Geometría Analítica general, y que a fin de cuentas es lo que permite la real y mutua correspondencia entre curvas y ecuaciones.

Esto fue realmente lo que se plantearon y resolvieron Fermat y Descartes con el concurso del *Arte Analítica* de Vieta, al establecer que una ecuación arbitraria en dos cantidades indeterminadas determina, con respecto a un sistema dado de coordenadas, una curva.

Al analizar la posición histórica de Apolonio en el camino hacia la Geometría Analítica digamos que, a pesar de los conceptos y elementos geométricos introducidos, que parecen emular la presencia de *sistemas de referencia con coordenadas* –*abscisas* y *ordenadas*– que permiten expresar las *ecuaciones* de las cónicas, estos *sistemas de coordenadas* aparecían siempre superpuestos *a posteriori* a las curvas para estudiar sus propiedades. En la Geometría griega, las *coordenadas*, *variables* y *ecuaciones* no eran elementos de partida, sino conceptos subsidiarios derivados de situaciones geométricas concretas de curvas que determinan las *ecuaciones* sin que se dé la situación inversa, es decir, que las ecuaciones determinen las curvas, ya que éstas siempre se producían mediante una construcción estereométrica como secciones de un sólido –tal es el caso de las propias cónicas de Apolonio– o de forma cinemática como composición de movimientos –tal es el caso de la Espiral de Arquímedes o la cuadratriz de Dinostrato–, de forma que el conjunto de curvas manejadas por los griegos fue necesariamente muy limitado.

LAS CÓNICAS DE APOLONIO Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA



Portada y página con ilustraciones de figuras geométricas de *Apollonii Pergaei Conicorum Lib. V, VI, VII*. Edición de Borelli. Florencia 1661. Biblioteca de la Universidad de Pavia.

Las *Cónicas* de Apolonio contienen muchos aspectos que anticipan elementos de la Geometría Analítica. Como Descartes, Apolonio considera, ciertas *líneas de referencia* –diámetros conjugados o diámetro-tangente– que al jugar un papel de *coordenadas*, son asociados a la cónica dada, de modo que mediante Álgebra retórica son expresadas en función de esas líneas las propiedades geométricas de la curva equivalentes a su definición como lugares geométricos.

C. Boyer escribe sobre Apolonio y la Geometría Analítica (en *Historia de las Matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid, 1986, cap. 17, p. 208):

«El hecho de que Apolonio, uno de los más grandes geómetras de la antigüedad, no consiguiese desarrollar de una manera efectiva la Geometría Analítica, se debe probablemente más a una pobreza en el número de curvas que de pensamiento; los métodos generales no son ni muy necesarios ni muy útiles cuando los problemas se refieren siempre a un número limitado de casos particulares. Por otra parte, es bien cierto que los primeros inventores de la Geometría Analítica tenían a su disposición todo el álgebra renacentista [el Álgebra de los cosistas italianos y el Álgebra simbólica de Vieta], mientras que Apolonio tuvo que trabajar con las herramientas del Álgebra Geométrica, mucho más rigurosa pero a la vez mucho más incómoda de manejar».

Hay que ponderar la magnífica obra de Apolonio, primer estadio en la Historia de la Matemática sobre la aplicación de coordenadas al estudio de las propiedades de las curvas; y aunque el discurso retórico sustituye al simbolismo y la construcción geométrica a las técnicas algebraicas, las relaciones de áreas y longitudes mediante las que Apolonio expresa las propiedades intrínsecas de la curva se traducen con gran facilidad al ulterior lenguaje del Álgebra simbólica de ecuaciones que permitirá la asociación de curvas y ecuaciones, esencia de la Geometría Analítica. Así pues, el trabajo de Apolonio inicia la singladura histórica hacia el desarrollo de la Geometría Analítica de Descartes.

Además, dos problemas históricos importantes de gran incidencia sobre la Geometría Analítica de Descartes tienen su origen en los trabajos de Apolonio:

1. El Problema de Apolonio («Dados tres elementos, punto, recta o circunferencia, trácese una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres»)
2. El Problema de Pappus o «lugar geométrico determinado por tres o cuatro rectas»: «Dadas tres (resp. cuatro) rectas en un plano, encuéntrase el lugar geométrico de un punto que se mueve de forma que el cuadrado de la distancia a una de las tres rectas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos (resp. el producto de las distancias a dos de ellas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos), si las distancias se miden en direcciones tales que formen ángulos dados con las líneas correspondientes».

El Análisis Geométrico griego y la Geometría Analítica

Los *Elementos* de Euclides establecieron en la Geometría griega un severo modelo de exposición y demostración que oculta el camino de la investigación hacia el descubrimiento. Surge de forma natural la pregunta acerca de cómo los geómetras griegos encontraban sus impresionantes resultados que después plasmaban en sus obras con un rigor impecable. Pues bien, es aquí donde interviene el *Análisis* como un procedimiento metodológico capital para el progreso de la Matemática, del que la Geometría Analítica heredaré no sólo su nombre sino sobre todo sus procedimientos.

Proclo (411-485 d.C.) en sus *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides* atribuye a Hipócrates de Quíos (hacia 450 a.C.) la invención del *Método Analítico* cuando lo define:

«La apagogé es una reducción de un problema o de un teorema a otro, que si es conocido o determinado, conduce a la solución de la cuestión propuesta».

Pero siempre se ha imputado su paternidad a Platón –según ciertos pasajes del *Menón* (86e–87a), la *República* (510c) y la *Ética a Nicómaco* de Aristóteles (1095a)–, que lo formularía como un método pedagógicamente conveniente, viniendo a decir que cuando una cadena de razonamientos desde unas premisas a una conclusión no es obvia, se puede invertir el proceso; uno puede empezar por la proposición que ha de probarse y deducir de ella una conclusión que es conocida. Si entonces podemos invertir los pasos en esta cadena de razonamientos, el resultado (*Síntesis*) es una prueba legítima de la proposición. Es decir, mediante el *Análisis* se asume como cierto aquello que hay que probar y se razona con base en esta asunción hasta llegar a algo que forma parte de los principios o alcanzar un resultado cierto por haber sido previamente establecido. Si entonces podemos invertir la secuencia de los pasos anteriores se obtiene una demostración del teorema que había que probar. Así pues, el *Análisis* viene a ser un procedimiento sistemático de descubrir «condiciones necesarias» para que un teorema sea cierto, de modo que si por medio de la *Síntesis* se muestra que estas condiciones son también *suficientes*, se obtiene una demostración correcta de la proposición.

Conviene explicar un poco en qué medida la Geometría Analítica recibe su nombre precisamente del método de *Análisis* de los griegos. Como se ha dicho, el *Análisis* empieza «asumiendo como cierto aquello que hay que probar». Esto es precisamente un principio que aplica Descartes desde el comienzo de *La Geometría*. Por ejemplo en el segundo epígrafe del Libro I, titulado: «Cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas», Descartes escribe (G.AT,VI,372):

«Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya resuelto,[...]»

Descartes no sólo realizará una aplicación directa de los procedimientos del *Análisis* y la *Síntesis* de los griegos sino que reformulados serán las dos reglas intermedias de las cuatro reglas del *El Discurso del Método* (DM.AT,VI,17-18). Una y otra vez en la multiplicidad de problemas que resuelve en *La Geometría*, Descartes empezará por suponer el problema resuelto. En concreto en dos de los problemas más importantes que trata, Descartes escribe literalmente:

«Primeramente yo supongo la cosa como ya hecha, ...» (Problema de Pappus [G.AT,VI, 382]).

«Supongamos que la cosa está hecha, ...» (rectas normales a una curva [G.AT,VI, 413]).

Naturalmente hay una diferencia notable entre la aplicación que del método de *Análisis* y *Síntesis* hacen los griegos y lo que realiza Descartes en lo que se ha llamado su Geometría Analítica. Éste es el asunto que queremos estudiar: a partir de algunos de los principios

metodológicos de la Geometría griega tiene lugar el nacimiento de algo completamente nuevo y revolucionario –*La Geometría* de Descartes– que consigue clausurar, en gran parte, el punto de partida – la propia Geometría griega–.

¿Qué poderoso instrumento utilizará y Descartes para alcanzar tal hazaña matemática? El Álgebra, una herramienta que no pudo disfrutar la Geometría griega porque la aparición súbita de los inconmensurables desvió la influencia de la Matemática babilónica, bien versada en Aritmética y en incipientes técnicas algebraicas, hacia la Geometría Sintética y el Álgebra Geométrica. Cuando Descartes, bajo la inspiración de Vieta (1540-1603), aplique todo el potencial algorítmico del Álgebra árabe, renacentista y del propio Vieta, el *Análisis* alcanzará su máximo poder heurístico para la resolución de los problemas geométricos – incluso los que se habían resistido de forma reiterada a los métodos clásicos, como el *Problema de Pappus* y el *Problema de Apolonio*–, a base de complementar el estudio analítico con la síntesis algebraica, lo que le permitirá mediante las ecuaciones pasar de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría.

La forma más esmerada del *Análisis* y la *Síntesis* la aplica Pappus en el *Tesoro del Análisis*, describiendo como para comprobar la validez y encontrar la prueba de un teorema o resolver un problema –en general de construcción– se procede analíticamente, asumiendo por el momento que el teorema en cuestión es válido o que el problema está resuelto. Siguiendo entonces las implicaciones lógicas del teorema o la solución del problema, se llega a alcanzar una solución conocida que es verdadera o falsa. Si se trata de un teorema, de una falsa conclusión resulta la invalidez del teorema, y entonces del mismo *Análisis* resulta la refutación del teorema por reducción al absurdo; pero, si la conclusión obtenida a través del *Análisis* es verdadera, nada se puede decir de la validez del teorema. Es decir, el método de *Análisis* produce una cadena de inferencias que lleva de una premisa de valor verdadero desconocido a una conclusión de valor verdadero conocido; la falsedad de la conclusión implica la de la premisa, pero la verdad de la conclusión no dice nada acerca de la de la premisa, a menos que, como señalaba Platón, uno pueda dar la vuelta a la inferencia. La eficiencia del *Análisis* es doble, por una parte abundan los teoremas geométricos que tienen un recíproco válido, y por otra, cuando el recíproco de un teorema no es válido puede llegar a serlo añadiendo ciertas condiciones suplementarias, que eran llamadas por los griegos «*diorismos*». Gran parte de la investigación geométrica consistía en la búsqueda del *diorismo* adecuado para poder invertir una inferencia. Una vez que se ha hallado el *diorismo*, la inferencia invertida constituye una *Síntesis*, es decir la rigurosa demostración del teorema. Las considerables dificultades inherentes a la inversión de inferencias propiciaron que los grandes matemáticos griegos se expresaran en sus obras mediante formales demostraciones sintéticas de los resultados que habían obtenido aplicando el método de *Análisis*. Es decir, el *Análisis* geométrico griego era una fecunda heurística geométrica, el instrumento fundamental de investigación y creación matemática; pero, alcanzada tras el *Análisis*, la *Síntesis*, en presencia de la demostración sintética cualquier análisis era superfluo y como tal se suprimía de los grandes tratados. De esta forma, los griegos ocultaban la forma y el camino utilizados en la obtención de sus magníficos resultados matemáticos.

Cuando a partir del Renacimiento tiene lugar la recuperación, reconstrucción y divulgación del legado clásico griego, los matemáticos lo acogen con entusiasmo, pero preocupados porque el estilo sintético y apodíctico de exposición de la Geometría griega, y en particular de las obras de Euclides, Arquímedes y Apolonio, privaba a los investigadores de la forma en que habían sido descubiertos los resultados, manifiestan junto a su admiración, una cierta perplejidad y extrañeza. Incluso algunos (Torricelli, Barrow, Wallis,...) sospechaban sin fundamento que los griegos disponían de algún instrumento (¿el Álgebra?), un determinado tipo de *Análisis* Geométrico, pero que lo habían ocultado de forma tan perfecta que a los modernos matemáticos les había resultado más fácil inventar un nuevo *Análisis* –la Geometría Analítica– que recuperar el antiguo. Quizá es Descartes quien con mayor claridad muestra – en la Regla IV de las *Regulae*– la insatisfacción de una curiosidad frustrada por la ocultación de los métodos de descubrimiento de la Geometría griega.

ANÁLISIS Y ÁLGEBRA EN LA REGLA IV (AT.X.373-377) DE LAS REGLAS PARA LA DIRECCIÓN DEL ESPÍRITU DE DESCARTES



Retrato caricaturesco de Descartes escribiendo un libro y con el pie apoyado en una obra de Aristóteles. Grabado de C.Hellemans. Biblioteca Nacional. París.

Descartes subraya en la regla IV (*Regulae ad directionem ingenii*) que los antiguos geómetras utilizaban cierto *Análisis* para la resolución de todos los problemas geométricos –como se advierte en Pappus y Diofanto–, pero privaron de él a la posteridad con la expresión sintética que oculta los métodos de descubrimiento, y merecen por ello –al impedir la divulgación de los métodos de trabajo– la más acerba de las críticas.

Descartes elogia, en cambio, a «hombres de gran talento» (¿Vieta?), que han recuperado el *Análisis Geométrico* de los antiguos y lo han desarrollado con los nuevos instrumentos del Álgebra –un arte que clarificado y liberado de su actual farragosidad podría cumplir una función similar a la del *Análisis* de los antiguos–. Con base en estos analistas Descartes destilará un auténtico *Análisis Algebraico*, que históricamente se desarrollará en la línea de una verdadera Geometría Analítica.

«[...] En las más fáciles de las ciencias, la Aritmética y la Geometría, vemos con toda claridad que los antiguos geómetras se han servido de cierto *Análisis*, que extendían a la resolución de todos los problemas, si bien privaron de él a la posteridad. Y ahora florece cierta clase de Aritmética que llaman Álgebra, para realizar sobre los números lo que los antiguos hacían sobre las figuras [...] Cuando por primera vez me dediqué a las disciplinas Matemáticas, de inmediato leí por completo la mayor parte de lo que suelen enseñar sus autores, y cultivé preferentemente la Aritmética y la Geometría, porque se las tenía por las más simples y como un camino para las demás. Pero no caían en mis manos autores que me satisficieran plenamente: leía cosas acerca de los números que yo comprobaba, habiendo hecho cálculos, ser verdaderas; y lo mismo respecto de las figuras; [...] Pero por qué esto era así, y cómo eran halladas, no parecían mostrarlo suficientemente a la mente, [...] Pero como después pensase por qué sucedía que antiguamente los primeros creadores de la Filosofía no quisieran admitir para el estudio de la sabiduría a nadie que no supiese *Mathesis*, [...], tuve la sospecha de que ellos conocían cierta *Mathesis* muy diferente de la Matemática vulgar de nuestro tiempo [...] Y ciertamente me parece que vestigios de esta verdadera *Mathesis* aparecen en Pappus y Diofanto, [...] Y fácilmente creería que después fue ocultada por cierta audacia perniciosa por los mismos escritores; pues así como es cierto que lo han hecho muchos artistas con sus inventos, así ellos temieron quizá que, siendo tan fácil y sencilla, se envileciese después de divulgada; y para que les admirásemos prefirieron presentarnos en su lugar, como productos de su método, algunas verdades estériles deducidas con sutileza, en vez de enseñarnos el método mismo que hubiera hecho desaparecer por completo la admiración. Ha habido, finalmente, algunos hombres de gran talento que se han esforzado en este siglo por resucitarla; pues aquel arte no parece ser otra cosa, que lo que con nombre extranjero llaman Álgebra, con tal que pueda zafarse de las múltiples cifras e inexplicables figuras de que está recargado a fin de que no falte ya aquella claridad y facilidad suma que suponemos debe haber en la verdadera *Mathesis* [...]».

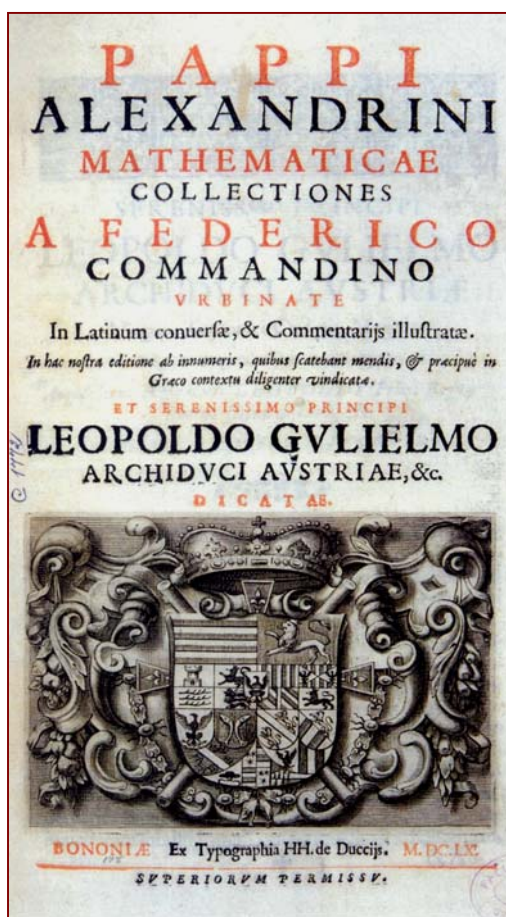
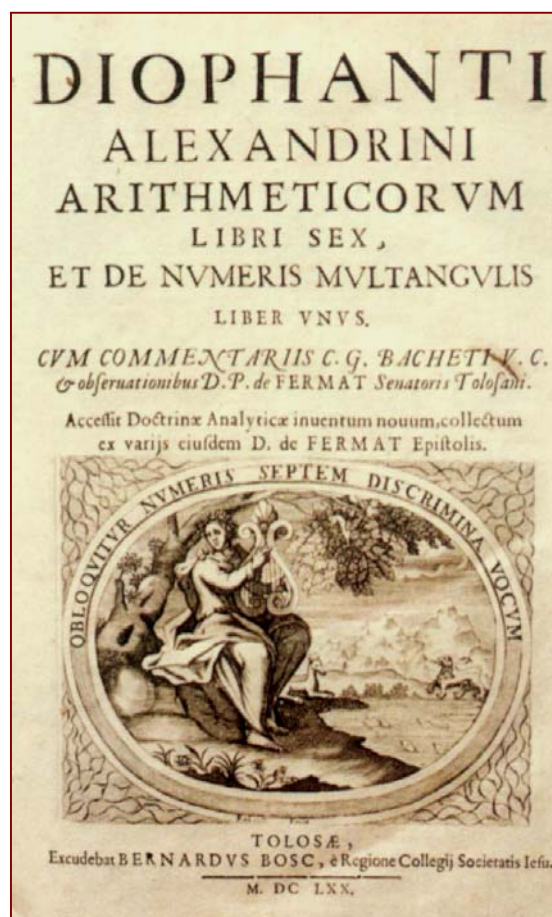
El texto de la IV Regla de Descartes es fundamental para poder entender la actitud mental de Descartes sobre su magno proyecto de reforma de la Filosofía, la Ciencia, y sobre todo de la Matemática de donde surgen las fuentes de su Geometría Analítica.

Descartes habla de la *Mathesis* como si se tratara de un saber aún más universal que la propia Matemática, y aplicable a todas las ciencias. En puridad, la *Mathesis* no se identifica, por tanto, con la Matemática, pero surge del espíritu, de la naturaleza, de los rasgos, del estilo, del modo, del proceder, de los métodos, etc., de las ciencias matemáticas –de la Geometría (Pappus), de la Aritmética (Diofanto) y del Álgebra (Vieta, uno «*de los hombres de gran talento*» que han resucitado la *Mathesis*)–. Precisamente uno de los instrumentos más potentes que se ha desarrollado en toda la Historia del Pensamiento matemático –la Geometría Analítica Cartesiana–, sin duda íntimamente vinculada a la *Mathesis*, surge de la aplicación del Álgebra simbólica de Vieta al estudio de los problemas del Análisis Geométrico de Pappus mediante ecuaciones indeterminadas, cuyo origen remoto, así como las raíces de la esencial simplificación de la notación cartesiana están en *La Aritmética* de Diofanto. Por eso Descartes rinde claro homenaje a los matemáticos griegos, Pappus y Diofanto, y de forma implícita también a Vieta, al atribuirles vestigios de la *Mathesis*.

Como señala Descartes, en la pléyade de geómetras griegos, Pappus fue una excepción, porque desarrolló una singular metodología en la forma de exposición, codificando todo un cuerpo de tratados analíticos de solución de problemas en el llamado *Tesoro del Análisis* del Libro VII de *La Colección Matemática*. En estos tratados queda patente el camino que sigue la investigación matemática ya que se procede a la reducción de un problema dado a un problema equivalente cuya solución era ya conocida. Encontramos en la obra de Pappus, además de infinidad de teoremas y problemas sobre Geometría superior –no incluida en *Los Elementos* de Euclides–, un gran número de cuestiones que debemos situar en las raíces históricas de la Geometría Analítica como son la más elaborada exposición sobre los métodos de *Análisis* y *Síntesis*, numerosas soluciones a los problemas clásicos –sobre todo la duplicación del cubo y la trisección del ángulo–, nuevos estudios y extensiones de propiedades de las secciones cónicas como lugares geométricos y la clasificación definitiva de los problemas geométricos en planos, sólidos y lineales –según sean resolubles, respectivamente, con rectas y circunferencias, cónicas u otras curvas superiores–, que perseguía la idea de ajustar la envergadura de los instrumentos geométricos a utilizar a la enjundia de los problemas geométricos a resolver, en la línea de aplicar siempre los medios más simples posibles, lo que será no sólo un rasgo distintivo de la Geometría Analítica de Descartes, sino un componente general de la mejor Matemática, que siempre exige elegancia y economía en el razonamiento.

Pero quizá el asunto más importante sea el tratamiento general del llamado *Problema de Pappus* o *lugar geométrico de n rectas*, que en su formulación más sencilla, para tres o cuatro rectas ya era conocido por Apolonio, siendo la solución una cónica, y que ha tenido un valor emblemático para la Historia de la Geometría Analítica. Pappus realiza un estudio exhaustivo del problema, propone la generalización a más de cuatro rectas y reconoce que independientemente del número de rectas involucradas en el problema, queda determinada una curva concreta. He aquí la observación más general sobre lugares geométricos de toda la Geometría griega, lo que implica, además, la consideración de infinitos tipos nuevos de curvas planas, algo esencial en un mundo geométrico tan limitado en cuanto a curvas planas. Pappus vacila a la hora de considerar el problema para más de seis líneas porque: «*no hay nada contenido en más de tres dimensiones*». De haber seguido en esa dirección, se habría dado un paso muy importante de anticipación de la Geometría Analítica, toda vez que ello hubiera propiciado un necesario tratamiento algebraico y no geométrico de los productos de líneas involucradas en el problema. Naturalmente los métodos sintéticos le desbordan a Pappus en el abordaje del problema. Cuando el nuevo Álgebra Simbólica de Vieta actúe sobre el Análisis Geométrico de los griegos aparecerá la Geometría Analítica cartesiana como poderoso instrumento algorítmico de ataque de los problemas geométricos difíciles como el propio *Problema de Pappus*, que fue la prueba de fuego que tuvo que pasar *La Geometría* de Descartes par demostrar la potencia de los nuevos métodos de la Geometría Analítica.

PAPPUS Y DIOFANTO Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA



1. La Colección Matemática de Pappus. Edición de F. Commandino. (Bolonía, 1670).
2. La Aritmética de Diofanto. Edición de 1670 de S. de Fermat con las observaciones de su padre P. de Fermat.

La Colección Matemática de Pappus tiene un gran valor histórico y didáctico. Pappus realiza una encomiable labor de compilación, comentario, restauración, organización, clasificación y generalización del conocimiento matemático superior de la antigüedad. La obra describe una multitud de trabajos matemáticos perdidos que constituyen lo que se llama *Tesoro del Análisis*. Además, Pappus nos relata las vías que seguía la investigación geométrica, oculta en los grandes tratados clásicos debido a su estilo sintético, es decir, lo que los antiguos geómetras entendían por *Análisis* y *Síntesis*.

La obra de Pappus contiene soluciones nuevas a numerosos problemas clásicos, la clasificación definitiva de los problemas geométricos en planos, sólidos y lineales, estudios definitivos de las cónicas como lugares geométricos y una visión más general del famoso *Problema de Pappus*, todas ellas cuestiones de trascendental influencia sobre la evolución del Álgebra Geométrica y el Análisis Geométrico griegos hacia la Geometría Analítica de Descartes.

Diofanto es el responsable, con su obra *La Aritmética*, de los primeros escarceos del Álgebra simbólica –el Álgebra sincopada–. A base de adoptar ciertas letras o expresiones como abreviaturas para las cantidades indeterminadas y sus potencias y para las operaciones más habituales, fragua un incipiente simbolismo antecedente de la notación algebraica que en su evolución a lo largo de los siglos, culminará con la simplificación notacional poderosamente definitiva que acuñará Descartes en *La Geometría* y que se convertirá en el alfabeto de la Matemática. Al ser el Álgebra simbólica un instrumento algorítmico ineludible de la Geometría Analítica, y Diofanto el primer iniciador de esta utilidad, debemos situar su obra, en una dirección conveniente hacia la generación de la Geometría Analítica.

La Geometría de Descartes

La formación de Descartes en La Flèche

Descartes instaure una nueva época en la Matemática, la Ciencia y la Filosofía sin parangón en la Historia de la Cultura, donde el conocimiento cierto y seguro de la Matemática ejerce un poder y adquiere una universalidad, que se convierte en la base racional del pensamiento cartesiano y revoluciona todas las ciencias. Con sus fundamentales aportaciones en los campos de la Filosofía, la Geometría, la Óptica, la Mecánica y otros, Descartes da un aliento unitario y orgánico al pensamiento científico, construye una visión global del conocimiento y marca un nuevo rumbo en la Filosofía.

René Descartes nace en La Haye, en Touraine, el 31 de marzo de 1596. Su formación tiene lugar con gran autosatisfacción en el Colegio jesuita de La Flèche entre 1606 y 1616. Descartes siempre tuvo la conciencia de haber sido instruido en una de las mejores escuelas de Europa, como manifiesta en *El Discurso del Método* (DM.AT,VI,5).

Descartes había alcanzado en La Flèche un soberbio conocimiento de la Cultura clásica, que incluía un gran dominio del latín –incluso como lengua viva, en la que podía hablar y escribir–, griego e italiano, y había desarrollado una irrefrenable afición a la lectura como demuestran ciertos pasajes de *El Discurso del Método* (DM.AT,VI,5).

En cuanto a la Filosofía aprendida, siempre se mostró un tanto displicente (DM.AT,VI,6):

«[...] Mientras las Matemáticas me han hecho disfrutar he visto la Filosofía como un medio para hablar de manera superficialmente convincente de cualquier cosa y ganar la admiración de los menos cultos.»

Es más, a juzgar por *El Discurso del Método*, parece que la Filosofía inicialmente no le interesara (DM.AT,VI,17):

«La Lógica, sus silogismos y la mayor parte de sus otras reglas sirven más bien para explicar a otro lo que uno sabe más que para aprenderlo.»

En cuanto a su formación matemática el joven Descartes confiesa que quedó cautivado por la parte del curso de Filosofía referente a las Matemáticas que impartía el padre François, que atendía no sólo a los aspectos teóricos de las Matemáticas, sino también a las artes mecánicas, los autómatas, la Óptica, la magia y la Astrología.

La propia *Ratio Studiorum* de los Jesuitas de 1586 establece:

«La Enseñanza de las Matemáticas conviene a los fines de la Orden, no sólo por el prestigio que dan a toda Academia, sino también en razón de su utilidad en todas las profesiones.»

También en el folio 183 de los Archivos romanos de la Compañía de Jesús consta:

«La Enseñanza de las Matemáticas es de las más útiles no sólo porque contribuye a la precisión del razonamiento sino también porque procura conocimientos infinitamente ventajosos para el bien de la sociedad.»

La enseñanza matemática de los Jesuitas tenía una orientación eminentemente práctica. Además del *Cuadrivium* pitagórico añadía nociones de Mecánica, Óptica, Acústica, Topografía, Perspectiva, Hidráulica y Balística, según el cuadro general de la Matemática práctica renacentista, y con una orientación hacia la ingeniería civil y militar, de interés para los jóvenes nobles que ocuparían cargos en la administración y en el ejército. Por eso cuando un Descartes ya maduro mira retrospectivamente, en el autobiográfico *Discurso del Método*, hacia sus años de formación comenta (DM.AT,VI,16):

«Las Matemáticas tienen invenciones muy sutiles y pueden utilizarse tanto para contentar a los curiosos como para facilitar todas las Artes y disminuir el trabajo de los hombres.»

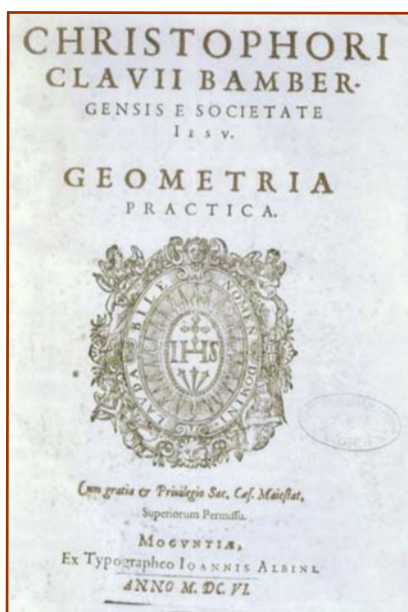
LA INFLUENCIA DE C.CLAVIUS SOBRE DESCARTES



El jesuita alemán C.Clavius, profesor de Matemáticas en el Colegio Romano de Roma, fue el gran inspirador de la Enseñanza de la Matemática en la época de Descartes que incluía *La Ratio Studiorum* de los Jesuitas.

Clavius organizó un verdadero seminario de jóvenes matemáticos, destinados a proveer de profesores de Matemáticas a los colegios jesuitas.

Aparte de excelente profesor, Clavius se reveló como un magnífico escritor de libros de texto. Publicó en 1574 una célebre edición de *Los Elementos de Euclides*, que tuvo reediciones en 1589, 1591, 1603, 1607, 1612 y 1674, lo que da idea de su valor. También escribió magníficos manuales de *Aritmética Práctica* (1583), *Geometría Práctica* (1604), *Álgebra* (1608), una edición comentada de la *Sphera* de Sacrobosco (1591), un compendio de Trigonometría y Astronomía ampliamente utilizado y muy encomiado por Kepler y tuvo una importante intervención en la reforma gregoriana del calendario.



Ediciones de Clavius de *Los Elementos de Euclides* (Colonia 1591), *Geometría Práctica* (Maguncia, 1606) y *Aritmética Práctica* (Venecia, 1738)

Ya que la enseñanza en el Colegio de *La Flèche* estaba inspirada en la *Ratio Studiorum* de los Jesuitas, es de suponer que la doctrina Matemática recibida por Descartes en sus años de Formación se basaría en las primeras ediciones de estos manuales de Clavius. Pero su proyecto de reforma de la Geometría tuvo que partir necesariamente de un profundo conocimiento de las grandes obras de la Matemática Griega de Euclides, Apolonio, Diofanto y Pappus.

Con toda seguridad los Jesuitas usaban los manuales del más famoso de sus matemáticos C.Clavius, llamado «*El nuevo Euclides*» por sus coetáneos, quien con su enseñanza de Matemáticas en el Colegio Romano, la más prestigiosa institución docente de los Jesuitas, y sus publicaciones, contribuyó más que nadie, a dignificar y extender el papel de la Matemática en el Currículum general de la Enseñanza. Sus trabajos fueron recopilados en su famosa *Opera Mathematica*, publicada en cinco volúmenes en 1611. En esta obra, Clavius realiza una apasionada apología de la Matemática, contrastando la firmeza y la unanimidad de las opiniones de los matemáticos con la multiplicidad de visiones diferentes, y por tanto de incertidumbre, que habita en la mente de los filósofos, sensación que manifestará claramente Descartes en *El Discurso del Método* (DM.AT,VI, 7-8):

«Me complacía especialmente [en mi juventud] en las Matemáticas por la certeza y la evidencia de sus razonamientos, [...] De la Filosofía sólo diré que, habiendo sido cultivada por los espíritus más excelentes, y que sin embargo aún no hay nada de lo que no se discuta, [...] , y considerando cuantas opiniones diversas pueden haber acerca de un mismo tema, [...].»

EL JOVEN DESCARTES



Descartes joven. Supuesto retrato del filósofo. Escuela Francesa del siglo XVII. Museo de los Agustinos de Toulouse.

A través de una irresistible pasión por la lectura, la actividad intelectual adolescente de Descartes iba fraguando su pensamiento filosófico y matemático.

La sólida formación en las humanidades del mundo clásico y la consiguiente afición de Descartes a la Cultura griega, se extendía a los grandes tratados de la Matemática griega: *Los Elementos de Euclides*, las Obras de Arquímedes, *La Aritmética* de Diofanto y sobre todo *Las Cónicas* de Apolonio y *La Colección Matemática* de Pappus, obras que conocía en profundidad. Asimismo, Descartes debía estar al corriente de los desarrollos del Álgebra de los matemáticos italianos, Tartaglia, Cardano y Ferrari, y aunque confiesa que desconocía la obra de Vieta antes de escribir *El Discurso del Método*, es inconcebible que así fuera, ya que hay una manifiesta continuidad en la línea de pensamiento geométrico entre la obra de Vieta y *La Geometría* de Descartes.

Descartes sale de La Flèche con el mejor bagaje cultural para emprender su aventura intelectual. El dominio del latín y del griego le abren las puertas al saber de los clásicos y a toda la erudición renacentista; las Humanidades y la Retórica animaron una conversación interesante y el don de gentes; situándose en las mejores condiciones de integrarse en la agitada vida social y pública de su época y dedicarse al conocimiento del mundo, como manifiesta en *El Discurso del Método* (D.M.AT,VI, 9):

« [...] , gracias a Dios, no me encontraba en la situación de verme obligado a hacer de la Ciencia un oficio para alivio de mi fortuna, [...] Empleé el resto de mi juventud en viajar, en ver cortes y ejércitos, [...], en recoger experiencias diversas, en probarme a mí mismo, en reflexionar sobre lo que me ocurriera, [...].»

Hegel en su *Lecturas sobre la Historia de la Filosofía* describe al joven Descartes como un ser vivaz e inquieto, con insaciable afán de conocimiento en todos los sistemas y formas de pensamiento, de modo que tres experiencias juveniles sucesivas jalonarían la forja de su espíritu: sus amplios estudios de juventud en La Flèche; su buceo en el gran libro del mundo, con otros hombres y otros pueblos; y el encanto o hechizo de las Matemáticas, cuya esencia impregnará todo su pensamiento. Tres experiencias que señalan tres caminos o vías en la búsqueda incesante de la verdad.

CITAS MEMORABLES DE DESCARTES

REGLAS PARA LA DIRECCIÓN DEL ESPÍRITU. (R.AT.X. 359–468)

1. Sólo la Aritmética y la Geometría están libres de todo defecto de falsedad e incertidumbre. [RII. 364].
2. Los que buscan el camino recto de la verdad no deben ocuparse de ningún objeto sobre el que no puedan tener una certidumbre semejante a las demostraciones de la Aritmética y de la Geometría. [RII. 366].
3. Es mucho más acertado no pensar jamás en buscar la verdad de las cosas que hacerlo sin método. [RIV. 371].
4. Ninguna ciencia puede obtenerse, sino mediante la intuición de la mente o la deducción. [RIV. 372].
5. Cultivé [en mi juventud] preferentemente la Aritmética y la Geometría, porque se las tenía por las ciencias más simples y como un camino para las demás. [RIV. 374].
6. El silogismo es completamente inútil para los que desean investigar la verdad de las cosas y sólo puede aprovechar , a veces, para exponer con mayor facilidad a los otros las razones ya conocidas. [RX. 406].

EL DISCURSO DEL MÉTODO (DM.AT.VI. 1–78)

1. Las Matemáticas tienen invenciones muy sutiles y pueden utilizarse tanto para contentar a los curiosos como para facilitar todas las Artes y disminuir el trabajo de los hombres. [6]
2. Mientras las Matemáticas me han hecho disfrutar he visto la Filosofía como un medio para hablar de manera superficialmente convincente de cualquier cosa y ganar la admiración de los menos cultos. [6]
3. Gustaba, sobre todo de las Matemáticas por la certeza y evidencia de sus razones. [7].
4. La Lógica, sus silogismos y la mayor parte de sus otras reglas sirven más bien para explicar a otro lo que uno sabe más que para aprenderlo. [17].
5. Esas largas cadenas trabadas de razones muy simples y fáciles, que los geómetras acostumbran a emplear para llegar a sus más difíciles demostraciones, me habían dado ocasión para imaginar que todas las cosas que entran en la esfera del conocimiento humano se encadenan de la misma manera. [19].
6. Entre todos los que han buscado la verdad en las ciencias, sólo los matemáticos han podido hallar algunas demostraciones, esto es, algunas razones ciertas y evidentes. [19].
7. No esperaba sacar de las demostraciones matemáticas más utilidad que acostumbrar mi espíritu a saciarse de verdades y a no contentarse con falsas razones. [19].

LA GEOMETRÍA (G.AT.VI. 369–485)

1. Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos. [369].
2. Pero no me detengo a explicar esto con más detalle para no privar a cada uno del placer de aprenderlo por sí mismo, ni impedir el cultivo útil del propio espíritu ejercitándolo, que es, a mi parecer, la principal utilidad que puede obtenerse de esta ciencia [374].
3. Se pueden construir todos los problemas de la geometría ordinaria sin hacer más que lo poco que está comprendido en las cuatro figuras que he explicado. [376]
4. Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, [...] y conocer la manera de trazar otras líneas que las corten en todos esos puntos en ángulo recto. [...] Y me atrevo a decir que éste es el problema más útil y más general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría. [412–413].
5. Y yo espero que nuestros descendientes me estarán agradecidos no sólo por las cosas que aquí he explicado, sino también por aquellas que he omitido voluntariamente a fin de dejarles el placer de descubrirlas. [485].

CITAS MEMORABLES SOBRE DESCARTES

1. A Descartes le fue revelada en sueños la clave mágica que le abría el acceso al tesoro de la naturaleza y que le colocaba en situación de poseer los verdaderos fundamentos de todas las ciencias. A.Baillet. *La Vie de Monsieur Des-Cartes*.
2. Acudiendo a la cita con su ejército, en la calma del invierno, combinaba en su mente los misterios de la naturaleza con las leyes de las Matemáticas, aspirando a desvelar los secretos de ambas. Epitafio de Descartes por H. Pierre Chanot, 1650.
3. Su alma siempre con sabiduría fecunda, hacia ver a los espíritus lo que se esconde a los ojos. Después de haber explicado el modelo del mundo reveló el misterio de los cielos. Epitafio de Descartes por C. Huygens, 1650.
4. Descartes mediante un nuevo método hizo pasar de las tinieblas a la luz cuanto en las Matemáticas había permanecido inaccesible a los antiguos y todo cuanto los contemporáneos habían sido incapaces de descubrir; luego puso los cimientos inquebrantables de la Filosofía sobre los cuales es posible asentar la mayor parte de las verdades en el orden y con la certidumbre de las Matemáticas. Spinoza. *Los Principios de la Filosofía cartesiana*.
5. Lo que ha inmortalizado el nombre de este gran hombre, es la aplicación que ha sabido hacer del Álgebra a la Geometría, una idea de las más vastas y felices que haya tenido el espíritu humano, y que será siempre la llave de los más profundos descubrimientos no solamente en la Geometría, sino en todas las ciencias físico-matemáticas. D'Alembert. *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie* (Orbis, 1984, pp.84,85).
6. La *Dióptrica* de Descartes es la más grande y la más bella aplicación que se haya hecho hasta ahora de la Geometría a la Física. D'Alembert. *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie* (Orbis, 1984, p.85):
7. Descartes se caracterizaba por su espíritu vivaz e inquieto, que buscaba con insaciable afán todas las ramas del conocimiento humano, buceando en todos los sistemas y formas de pensamiento. Hegel. *Lecturas sobre la Historia de la Filosofía*.
8. Sólo quien haya pensado real y detenidamente este escrito [*Las Reglas para la dirección del espíritu*], radicalmente parco, hasta en sus rincones más recónditos y fríos, está en condiciones de tener una idea de lo que pasa en la ciencia moderna. M.Heidegger. *Die Frage nach dem Ding*.
9. El cartesianismo no debe nada esencial a ninguna doctrina de la antigüedad. H.Bergson. *La Filosofía*.
10. No hay una Matemática, hay muchas Matemáticas. [...]. El espíritu antiguo creó su Matemática casi de la nada. El espíritu occidental, histórico, había aprendido la Matemática antigua, y la poseía, aunque sólo exteriormente y sin incorporarla a su intimidad; hubo, pues, de crear la suya modificando y mejorando, al parecer, pero en realidad aniquilando la Matemática euclidiana, que no le era adecuada. Pitágoras llevó acabo lo primero; Descartes lo segundo. Pero los dos actos son, en lo profundo, idénticos. O.Spengler. *El sentido de los números. (La decadencia de Occidente, p.144)*.
11. La Geometría analítica, mucho más que cualquiera de sus especulaciones metafísicas, inmortaliza el nombre de Descartes y constituye el máximo paso hecho en el progreso de las ciencias exactas. J. Stuart Mill. (citado por E.Bell en *Les grands mathématiciens*. Payot, París, 1950. Cap.3. p.46).
12. La Geometría Analítica de Descartes ha afectado probablemente a la vida humana más profundamente, aunque menos violentamente, que la máquina de vapor o el aeroplano. L.Hull. *Historia y Filosofía de la Ciencia*, 1981, p.268.
13. La Geometría Analítica de Descartes cambió la faz de las Matemáticas. M.Kline. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, 1992. vol.1, p.425.

Los sueños de Descartes y los orígenes de *La Geometría*

El 10 de noviembre de 1618 ocurrió un evento de trascendental importancia en la vida de Descartes, el encuentro con Beeckman, un intelectual amante de la Física y la Matemática. Vagando por Breda, Descartes se tropezó con una gente que miraba un anuncio en el que un matemático retaba a que se resolviese un problema, cosa muy propia de la época. Como Descartes todavía no dominaba el holandés, suplicó a quien estaba al lado que se lo tradujese al latín o al francés. Resultó ser Beeckman, quien hablándole en latín, le explicó en qué consistía el problema: «*¿Cuán lejos caerá una piedra en una hora si se sabe cuán lejos cae en dos?*», y le dio su tarjeta de visita. Beeckman se quedó atónito cuando al día siguiente el joven francés se presentó en su casa, sin anunciarse, con la solución del problema, lo que inició una fructífera amistad, mantenida sobre todo de forma epistolar, plena de gratitud recíproca, como muestran sendas cartas de Descartes a Beeckman, donde se explaya en palabras de agradecimiento hacia él por ser el catalizador de la empresa intelectual de ordenamiento de sus reflexiones y concepciones científicas.

«Podéis estar seguro que antes olvidaría a las musas que a vos, [...], ellas me han atado a vos con lazos de afecto» (24/1/1619, AT,X, 162-163).

«[...] Vos habéis sido el instigador, el motor primero de mis investigaciones, [...], vos me sacudisteis la desidia, apartándome de la erudición inútil, conduciendo mi espíritu, que vagaba en ocupaciones ociosas, a otras mejores, [...]» (23/4/1619).

Influido por Beeckman, Descartes emprende una serie de estudios matemáticos en relación con la trisección del ángulo y las ecuaciones cúbicas, y es consciente, tras los contactos con la literatura rosacruziana alemana, de que los aspectos algebraicos, en especial el simbolismo que apuntaba a convertirse en el lenguaje universal que permitiría el conocimiento y el dominio global de la realidad, entroncan con la tradición hermética y cabalística del arte luliano en íntima relación con la idea del saber universal.

EN UNA MANO LA PLUMA Y EN LA OTRA LA ESPADA



Descartes en las calles de París, por Chartan.

S. de Sacy, en su biografía de Descartes de 1956, refleja la imagen del filósofo como lo hace esta ilustración, describiendo «*al hombre izado entre una generación de aventureros, [...], un mosquetero del alma, [...] en vagabundeo metódico, [...]».*

En el gran teatro del mundo, apareciendo como desherado y marginal de las clases sociales dominantes, desligado de la tradición y del marco familiar, Descartes «*sostiene en una mano la pluma y en la otra la espada*», en un continuo vaivén entre el afán de retiro y el estudio y su curiosidad por la vida mundana, alistándose en ejércitos, dedicado a la vida militar, como aventurero y rebelde, junto a los mercenarios de las guerras de Religión que asolaban Europa.

Provisto del bagaje intelectual del Renacimiento, dotado de una prodigiosa erudición alcanzada en *La Flèche* y de una brillante retórica, con una incontenible afición a la Matemática, transmitida por el padre François y por Beeckman, Descartes viaja y conoce mundo «*pues es casi lo mismo conversar con gentes de otros siglos que viajar*» (DM.AT,VI,6) y se convierte en el filósofo enmascarado que persigue la sabiduría universal que anunciaban sus curiosas lecturas de adolescencia, de raíces lulianas, dentro de la tradición hermético-cabalística.

El interés por los rosacruces, que presumían de tener la clave de la sabiduría universal, impele a Descartes a abandonar Holanda hacia mayo de 1619 camino de Alemania, donde asiste a la coronación de Fernando II y se enrola en las tropas del Duque de Baviera.

A la llegada del invierno, Descartes se retira a alguno de los refugios militares, quizá en Ulm, donde vivía el matemático Faulhaber. En un ambiente propicio para la meditación, Descartes se plantea algunos problemas geométricos y la solución lograda le induce a buscar un método general para resolver cualquier problema de Geometría que se le presentase. Pero enseguida extrapola sus ideas y amplía tan ambicioso plan para concebir la posibilidad de encontrar un método para el descubrimiento de la verdad en cualquier rama de la ciencia. Así que en la mente de Descartes fue tomando cuerpo el ideal de un conocimiento integral, unificado sobre la totalidad global de las ciencias, que al tratar de lo divino y de lo humano, reuniría todas las ciencias con un simbolismo adecuado, intuyendo que el Álgebra y la Geometría, adecuadamente interpretadas e insertas en un simbolismo superior, podían convertirse o al menos apuntar hacia el tan proclamado saber universal.

Con estas ideas fijas en la mente, en la noche del 10 de noviembre de 1619, primer aniversario del encuentro con Beeckman, Descartes tuvo una concatenación de sueños que le dejaron una profunda impresión marcando un hito en su ulterior evolución espiritual.

La profunda experiencia visionaria fue plasmada por Descartes en un manuscrito de 1620, en latín, con el nombre de *Olympica*, ahora perdido, que parece ser fue ojeado por Leibniz en su estancia en París en 1675 y que fue traducido por Baillet, el biógrafo de Descartes (AT.X, 181-188). En una minuciosa descripción de los sueños y su interpretación, Descartes relata un itinerario simbólico en sus tres sueños: siente angustia en el primero, luces prometedoras en el segundo, hasta alcanzar la revelación de la verdad en el tercero, en el cual el espíritu de la Verdad quería «*abrirle los tesoros de todas las ciencias*».

Los *Olympica* comienza con estas palabras:

«X Novembris 1619, cum plenus forem Enthousiasmo et mirabilis scientiae fundamenta reperirem ...»

«X de noviembre de 1619, cuando, lleno de entusiasmo, descubrí los fundamentos de una ciencia admirable.»

En la interpretación mística que hace Descartes de sus sueños, a él se le ha revelado la unidad de la ciencia, ha sido ungido de un sagrado entusiasmo místico que le ha liberado de una crisis espiritual y le ha cargado de una gran responsabilidad en el alumbramiento de la verdad al tomar conciencia de una misión:

¿Será ésta emprender la magna empresa de reforma de la Filosofía y consecuentemente de la Matemática?

El espíritu de la verdad ha conducido a Descartes a una exaltación intelectual para alcanzar «*la visión de una ciencia nueva y admirable*», que tal vez debía de ser el conocimiento de todas las cosas de las que el espíritu humano es capaz, y que sus fundamentos consistirían en un método general —extraído de los procedimientos del pensamiento matemático— donde se experimenta la certeza y evidencia inherentes al verdadero saber.

Al año siguiente, el mismo día 10 de Noviembre, aniversario del encuentro con Beeckman y de los sueños, Descartes vuelve a tener una visión que le ilumina, escribiendo al margen del manuscrito de Los *Olympica* (AT.X.179):

«X Novembris 1620. Coepi intelligere fundamentum inventi mirabilis.»

«10 Noviembre 1620. He empezado a entender el fundamento de un admirable descubrimiento.»

LOS SUEÑOS DE DESCARTES Y LA GEOMETRÍA



Descartes representado como Fausto. *Opuscula posthuma, physica et mathematica*. J. Blaeu. Amsterdam, 1701.

Los sueños de Descartes, de gran significado freudiano, marcaron una impronta inmarcesible en la orientación de su pensamiento. El raptó místico habría de servir a Descartes de cimiento de un sólido edificio racionalista, presidido por la «unidad» como emblema para entender el mundo: unidad de la Matemática a través de la fusión del Álgebra y la Geometría; unidad entre Física y Matemática; unidad de todas la ciencias; presidida por la unidad de método y criterio «para bien conducir la razón y buscar la verdad en las ciencias», que así subtitulará precisamente a su principal obra filosófica y científica: *El Discurso del Método*; en suma, unidad de todo el saber radicada en el espíritu proclamada con carácter de primariedad desde el comienzo de su último escrito de juventud: *Las Reglas para la dirección del espíritu* (*Regulae ad directionem ingenii*)

La importancia que *La Geometría* de Descartes tiene en la Historia de la Matemática, ha propiciado, a veces, la sublimación de la intuición de sus raíces en la mente de Descartes, de modo que algunos historiadores le atribuyen un origen casi legendario, según el cual el 10 de Noviembre de 1619, en su delirio onírico Descartes habría adivinado la unión del Álgebra y la Geometría en un solo cuerpo de doctrina: *La Geometría Analítica* –aunque más bien habría que hablar de Geometría Algebraica– y ante «la visión de una ciencia nueva y admirable» se habría sentido predestinado para construir un nuevo sistema filosófico, donde la Matemática ocuparía una situación privilegiada como llave del conocimiento y la sabiduría universal e instrumento de explicación racional de los fenómenos naturales, de modo que la iluminación de Descartes le procuraría una explicación global de la naturaleza física, es decir una Filosofía natural –una Física en sentido actual– basada en la Matemática. Así se explicarían los tres ensayos que al acompañar a *El Discurso del Método* justificarían de forma verdadera y global el método cartesiano.

La noche del domingo del 10 al 11 de noviembre de 1619, en un descanso en los cuarteles de invierno de los ejércitos de Maximiliano de Baviera, Descartes enfrebrecido sufre alucinaciones. Sintiendo una iluminación interior asiste «lleno de entusiasmo» a la revelación de «los fundamentos de una ciencia admirable». Descartes tiene tres sueños que le hacen tomar conciencia de su vocación filosófica. En palabras de su primer biógrafo A. Baillet (*La Vie de Monsieur Des-Cartes*):

«[...] Le fue revelada la clave mágica que le abría el acceso al tesoro de la naturaleza y que le colocaba en situación de poseer los verdaderos fundamentos de todas la ciencias».

La descripción de los sueños de Descartes en los *Olympica* pudo ser un pretexto literario o un artificio poético-filosófico para explicar que se sentía predestinado a la búsqueda de la sabiduría universal. En todo caso la experiencia onírica de Descartes fue una intensa vivencia personal, un auténtico Pentecostés, que marcó su porvenir. A raíz de los sueños, Descartes, imbuido de entusiasmo y satisfacción, decidió ir en peregrinación al santuario de Santa María de Loreto y aunque cambió de residencia muchas veces entre 1619 y 1650, jamás se separó del manuscrito de sus sueños.

Las Regulae, El Discurso del Método y La Geometría

La lectura de las *Regulae* y *El Discurso del Método* es un preliminar necesario, o al menos aconsejable, para entender la motivación y los presupuestos intelectuales de Descartes acerca de la Ciencia, de la universalización del razonamiento matemático como base del conocimiento racional y en particular de los orígenes y objetivos de *La Geometría*. Como señala Víctor Gómez Pin (Congreso de Ontología, 24/3–31/3 de 1996, San Sebastián-Barcelona):

«El Discurso del Método es tan sólo el prólogo añadido por Descartes a sus escritos científicos [los tres ensayos la Dióptrica, los Meteoros y la Geometría], a fin de mostrar lo estéril que sería abordar éstos sin el hilo conductor de la problemática común, es decir, sin referencia a la unidad de la razón que tales escritos despliegan.»

Descartes había estudiado las Matemáticas con gran fruición en su adolescencia y desde el primer momento apreció su indudable condición de certeza, pero sólo más tarde llegó a reparar en lo que él llama su verdadero uso hacia la gestación y desarrollo del *Método*. Es en los sueños de 1619 y cuando escribe, en 1620, en los *Olympica*, sobre «*los fundamentos de una ciencia admirable*», cuando empieza un primer estadio en la intuición del *Método*; el segundo estadio de puesta a punto del *Método* tiene lugar con las *Reglas para la dirección del espíritu* de 1628 (*Las Regulae*) y el tercero, de codificación, con *El Discurso del Método* de 1637.

Descartes busca un fundamento absoluto e inmovible de la verdad en que basar el conocimiento científico sobre el que cimentar la vida y la acción. Pero ello no es posible alcanzarlo sin método. La Regla IV de las *Regulae* se titula precisamente: «*El método es necesario para la investigación de la verdad de las cosas*» (RIV.AT.X.371), y en ella Descartes alude de forma reiterada sobre el asunto:

«[...] Es mucho más acertado no pensar jamás en buscar la verdad de las cosas que hacerlo sin método» (RIV.AT.X.371).

«[...] Entiendo por método reglas ciertas y fáciles, mediante las cuales el que las observe exactamente no tomará nunca nada falso por verdadero, y, no empleando inútilmente ningún esfuerzo de la mente, sino aumentando siempre su ciencia, llegará al conocimiento verdadero de todo aquello de que es capaz» (RIV.AT.X.371–372).

«El método explica rectamente de qué modo ha de usarse la intuición de la mente para no caer en el error contrario a la verdad y cómo han de ser hechas las deducciones para llegar al conocimiento de todas las cosas, [...] ninguna ciencia puede obtenerse, sino mediante la intuición de la mente o la deducción» (RIV.AT.X.372).

Así pues, las reglas del método se remiten al saber de la razón, pero de los textos cartesianos hay que colegir, como veremos, que en principio se trata de la razón matemática y que en origen las reglas del método lo son primariamente del saber matemático.

En el cultivo de las Matemáticas desde su juventud, Descartes atribuye a las verdades matemáticas una naturaleza esencialmente diferente a la de las verdades basadas en la experiencia. Según Descartes las proposiciones matemáticas no deben su verdad a la experiencia y no pueden ser desmentidas por ésta, es decir son «*verdades de razón*» con una validez universal y absoluta. Es el ámbito de la razón, sobre el que descansa la Matemática, al que acudirá Descartes para fundamentar su método que impone la certeza como condición epistemológica ineludible que excluye los conocimientos tan sólo probables. Así tiene lugar en la Regla II de las *Regulae* titulada (RII.AT.X.361):

«Conviene ocuparse tan sólo de aquellos objetos, sobre los que nuestros espíritus parezcan ser suficientes para obtener un conocimiento cierto e indudable.»

La exigencia cartesiana de encontrar un conocimiento cierto y evidente que alcance y rija con seguridad la unidad del saber, hace recalar a Descartes en el modo del pensar matemático, elaborando el *Método* con base en su larga experiencia en las ciencias geométricas y aritméticas. Así se advierte de forma palmaria a lo largo de las *Regulae*:

«[...] Cuando por primera vez me dediqué a las disciplinas Matemáticas, de inmediato leí por completo la mayor parte de lo que suelen enseñar sus autores, y cultivé preferentemente la Aritmética y la Geometría, porque se las tenía por las más simples y como un camino para las demás» (RIV.AT.X.374–375).

La Aritmética y la Geometría deben, pues, ejercer para Descartes una función propedéutica e indicativa porque en ellas se experimenta la certeza y evidencia requeridas para el verdadero saber; a ellas hay que reducirse, pues sólo ellas están libres de incertidumbre y falsedad, de modo que (RII.AT.X.363,364):

«[...] Si calculamos bien, de las ciencias ya descubiertas sólo quedan la Aritmética y la Geometría, a las que la observación de esta regla [Regla II] nos reduce.»

«[...] Sólo la Aritmética y la Geometría están libres de todo defecto de falsedad e incertidumbre.»

En el Colegio de La Flèche Descartes habría recibido una sólida formación matemática, pero más allá de esta ciencia, habría captado el espíritu mismo del saber matemático, que al aunarlo con su notable y peculiar penetración filosófica, alcanzaría la visión de las Matemáticas, por la certeza y evidencia de sus razones, como instrumento clave del descubrimiento de una técnica puramente especulativa —el *Método*— que sitúa al espíritu en posesión de la verdad y en posesión de sí mismo, experimentando lo que deviene el conocimiento humano cuando se le ahorma según el patrón de la evidencia matemática. Descartes se propone con *El Discurso del Método* y *La Geometría* una magna empresa de reforma de la Filosofía y de la Matemática, tomando esta ciencia como principio básico del fundamento de la sabiduría universal. Descartes adopta la demostración matemática frente al recurso a la autoridad y pondera la firmeza y certeza de la Matemática *versus* la incertidumbre de la Filosofía. Pero no todo es panegírico respecto de las Matemáticas, ya que Descartes se queja tanto del uso restringido que se hacía de la Matemática como de la forma misma de enseñarla y pone en un plano secundario el valor técnico de las Matemáticas como mera herramienta para las artes y los oficios mecánicos. En efecto, al aludir a su etapa de formación, Descartes escribe, en el *Discurso del Método*, respecto de las Matemáticas (DM.AT,VI,7):

Gustaba [en mi juventud], sobre todo, de las Matemáticas por la certeza y evidencia de sus razonamientos, pero no había entendido todavía su verdadero uso y, pensando que sólo servían para las artes mecánicas, me sorprendía de que, siendo tan firmes sus fundamentos, no se hubiera construido sobre ellas nada más relevante.»

Más adelante, en la segunda parte de la obra, Descartes continúa diciendo (DM.AT,VI,17):

«Había estudiado entre las partes de la Filosofía, la Lógica, y de las Matemáticas, el Análisis de los géómetras y el Álgebra, tres Artes o Ciencias, que debían, al parecer, contribuir algo a mi propósito. [...] Respecto al Análisis de los antiguos y el Álgebra de los modernos, aparte de que no se refieren sino a muy abstractas materias que no parecen ser de ningún uso, el primero está siempre tan constreñido a considerar las figuras, que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación, y en la última hay que sujetarse tanto a ciertas reglas y cifras, que se ha hecho un arte confuso y oscuro, bueno para enredar el espíritu, en lugar de una ciencia que lo cultive. Esto fue causa de que pensase que era necesario buscar algún otro método que, reuniendo las ventajas de estos tres, estuviese libre de sus defectos.»

A juzgar por este texto, el valor propedéutico y pedagógico de la Aritmética y la Geometría en la concepción del *Método*, es asumido por Descartes una vez se hayan corregido las deficiencias y limitaciones de estas ciencias, es decir, una vez que Descartes haya transformado los antiguos instrumentos de la Geometría griega –el Álgebra Geométrica y el Análisis Geométrico– en lo que hoy llamamos la Geometría Analítica cartesiana, mediante la intervención del Álgebra literal y simbólica de Vieta sobre la Geometría, tras la drástica reforma y simplificación de la notación algebraica que el propio Descartes realizará, primero de forma provisional en la Regla XVI de las *Regulae* (RXVI.AT.X.455) y ya de forma definitiva en *La Geometría* (G.AT,VI,371). Efectivamente, uno de los atributos más importantes de la Geometría Analítica es que libera al investigador de la dependencia a ultranza de las figuras geométricas al reemplazar las ingeniosas construcciones geométricas de la Geometría griega por sistemáticas operaciones algebraicas, es decir, permite «*ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación*» (DM.AT,VI,17). Así concibe Descartes una ciencia matemática que se convierte en un saber más fácil y simple, y generalizable y válido para todo el ámbito de la cantidad. Pero no sólo esto, porque el modo de proceder y el espíritu de esta verdadera Matemática, experimentado y cultivado en el quehacer y en la investigación matemáticos, es lo que inspira las reglas del *Método* y el *Método* mismo.

Según Descartes, sólo la Aritmética y la Geometría no ofrecen dudas ni conocimientos probables. Pero esto no significa que sólo haya que aprender y ocuparse de estas ciencias sino que la certeza y los rasgos que encontramos en ellas es lo que debemos requerir en la búsqueda del camino que nos conduce a la verdad en general (RII.AT.X.366):

«[...] Mas de todo esto se ha de concluir no ciertamente que se han de aprender sólo la Aritmética y la Geometría, sino únicamente que aquellos que buscan el recto camino de la verdad no deben ocuparse de ningún objeto del que no puedan tener una certeza semejante a la de las demostraciones de la Aritmética y de la Geometría.»

Aún más esclarecedor es el texto que sigue a las famosas cuatro reglas en el que Descartes reconoce el proceder de los geómetras en la inspiración de su método (DM.AT,VI,19):

«*Esas largas cadenas trabadas de razones muy simples y fáciles, que los geómetras acostumbran a emplear para llegar a sus más difíciles demostraciones, me habían dado ocasión para imaginar que todas las cosas que entran en la esfera del conocimiento humano se encadenan de la misma manera, [...], y considerando que entre todos los que antes han buscado la verdad en las ciencias, sólo los matemáticos han podido hallar algunas demostraciones, esto es, algunas razones ciertas y evidentes, no dudé de que debía comenzar por las mismas que ellos han examinado.*»

He aquí un texto muy significativo de la importancia del método matemático en el fundamento del pensamiento cartesiano, sobre todo el método seguido por los geómetras, que parten de las cosas más sencillas y fáciles de conocer para elevarse mediante «*largas cadenas de trabadas razones*» hasta alcanzar las cuestiones más difíciles y complejas. Descartes concebía que las entidades del conocimiento se encadenan como las proposiciones geométricas, que son, junto con las aritméticas, las únicas que gozan de certeza y evidencia, por tanto por ellas había que empezar como guía hacia el *Método*.

La naturaleza de la Matemática, tiene para Descartes un acusado carácter instrumental y pedagógico en la búsqueda y fundación de un saber científico unificado, universal, cierto y evidente, que Descartes denomina *Mathesis Universalis*, una cierta ciencia general, una determinada y precisa forma de saber extraída del modo, el estilo y el método de los saberes matemáticos. En este sentido Descartes se acerca al pensamiento platónico de la *República* que concebía la Matemática no sólo como imprescindible propedéutica en el ascenso hacia la Filosofía y fundamento de todo el saber humano, sino también como el camino inexcusable en la realización de la *Paidea*, entendida como cultivo y formación del espíritu humano en todas sus facetas. En efecto, así lo manifiesta Descartes en la Regla IV (RIV.AT.X.375-376):

«[Pensé] por qué sucedía que antiguamente los primeros creadores de la Filosofía no quisieran admitir para el estudio de la sabiduría a nadie que no supiese Mathesis, como si esta disciplina pareciese la más fácil y sobremanera necesaria de todas para educar los espíritus y prepararlos para comprender otras ciencias más altas, [...]»

El último texto citado de *El Discurso del Método* continua con estas palabras (DM.AT,VI,20):

«[...] Al advertir que, aunque [las ciencias matemáticas] tienen objetos diferentes, concuerdan todas en no considerar sino las relaciones o proporciones que se encuentran en tales objetos, pensé que más valía limitarse a examinar esas proporciones en general, [...] , pensé que, para considerarlas mejor particularmente, debía suponerlas en línea [recta], pues nada hallaba más simple ni que más distintamente pudiera representarse a mi imaginación y a mis sentidos. Y que para retenerlas o comprenderlas era necesario explicarlas mediante algunas cifras lo más cortas que fuera posible; de esta manera tomaría lo mejor del Análisis geométrico y del Álgebra y corregiría los defectos del uno por medio de la otra.»

He aquí, en términos del propio Descartes, el origen y los fundamentos de *La Geometría*. Descartes toma la línea recta como representación de toda magnitud y, además, propone una reforma de la notación algebraica. De esta forma conservará del Análisis Geométrico el auxilio que recibe de la imaginación y del Álgebra –una vez reformada la notación– la mecanización operacional que permite su simbolismo. La proyección del Álgebra sobre el Análisis geométrico –Descartes dice «*corrigiendo sus defectos*»– producirá lo que llamamos su «*Geometría Analítica*».

EL MÁS FAMOSO RETRATO DE UN FILÓSOFO



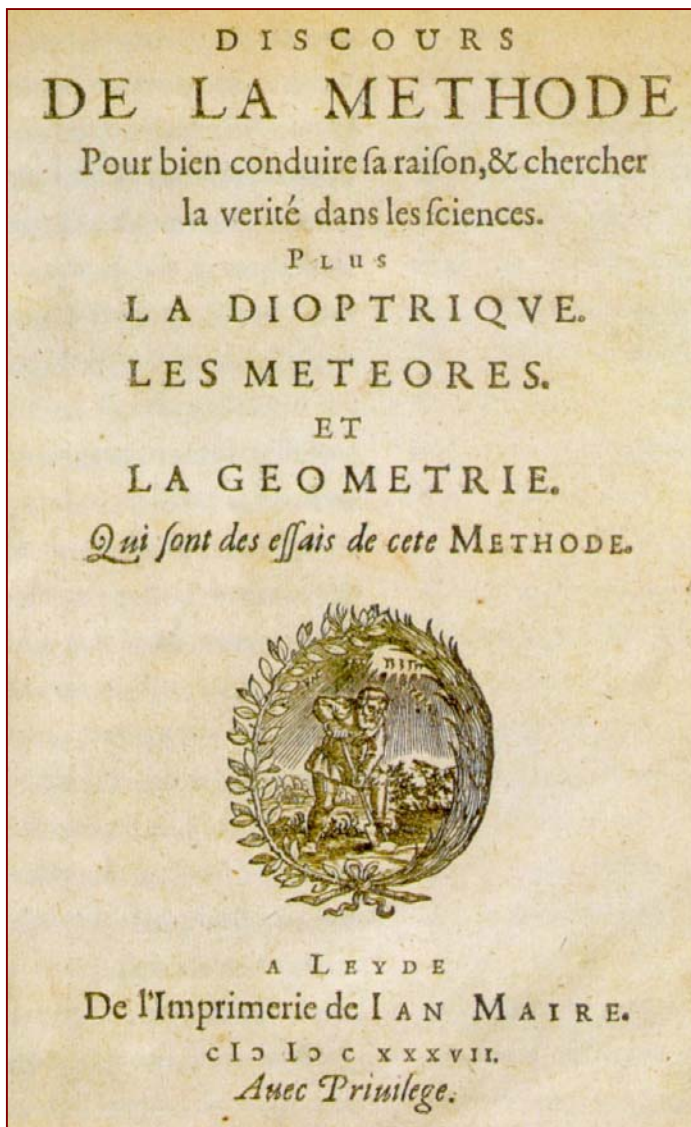
Retrato de Descartes atribuido a F.Hals. Museo de Louvre.

Tal vez es el retrato más célebre de un filósofo, aunque no se puede decir con certeza que sea Descartes ni que sea de F.Hals. Impresiona por su penetrante e inteligente mirada.

Descartes es considerado como el fundador de la Filosofía moderna. Prescindiendo de las bases ideológicas de sus antecesores, Descartes intenta construir, tanto en Filosofía como Matemática, un edificio completamente nuevo y sistemáticamente completo en sí mismo. La evolución ulterior del pensamiento nos indica que fue más afortunado en ésta que en aquélla. La originalidad de Descartes siempre ha sido muy ponderada en la historiografía, de modo que es casi una regla en la Historia de la Filosofía y de las Ciencias, la afirmación de que Descartes no debe casi nada a sus predecesores. Así lo asegura Bergson (*La Filosofía*, Larousse, París, 1916). con la frase:

«El cartesianismo no debe nada esencial a ninguna doctrina de la antigüedad.»

EL DISCURSO DEL MÉTODO Y LAS MATEMÁTICAS



La primera edición de *El Discurso del Método* con los tres ensayos la *Dióptrica*, los *Meteoros* y la *Geometría* (Leyden, 1637).

El Discurso del Método es la autobiografía intelectual de Descartes.

Descartes encontró en la Matemática, un modelo paradigmático en la búsqueda de las primeras verdades absolutamente ciertas que pudieran servirle de base, apoyo y fundamento en la reconstrucción de todo el edificio científico y filosófico, por eso la Matemática devino en la base racional de su pensamiento

Cuando se habla del cartesianismo como método de la razón se debe entender «método de la razón matemática» en el sentido de que las reglas del método son extraídas por Descartes del saber y del conocimiento matemáticos, por una parte, y de la práctica, estilo y procedimientos matemáticos, por otra.

Concretamente Descartes habla de tres Artes o Ciencias que habían de contribuir a su propósito (DM.AT,VI,17):

- La Lógica como parte de la Filosofía.
- El antiguo *Análisis* de los geómetras.
- El *Álgebra* de los modernos.

Así pues, utilizando la Matemática como paradigma en la indagación de la verdad, es decir, el *Análisis* de los geómetras y la *Síntesis* de los algebristas, Descartes establece el «Método para conducir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias».

Descartes persigue ante todo en *El Discurso del Método* la búsqueda de un «ars inveniendi», es decir, un método que sirviera para descubrir verdades y no para probar lo que ya se ha hallado, defender tesis o exponer teorías, y aplicable en todas las ciencias y en particular en la Geometría. Como ya había sentado R. Bacon en el *Novum Organum*, la Lógica aristotélica era inútil para la invención científica porque el silogismo no es aplicable a los principios de las ciencias, ya que sólo sirve para imponer el asentimiento y no para aprehender la realidad. Esta misma actitud asume Descartes con respecto a la lógica tradicional tanto en *El Discurso del Método* como en las *Regulae*:

«La Lógica, sus silogismos y la mayor parte de sus otras reglas sirven más bien para explicar a otro lo que uno sabe más que para aprenderlo» (DM.AT,VI,17).

«El silogismo es completamente inútil para los que desean investigar la verdad de las cosas y sólo puede aprovechar, a veces, para exponer con mayor facilidad a los otros las razones ya conocidas» (RX.AT.X.406).

Descartes ya se había fijado, para su propósito, en la IV Regla de las *Regulae*, especialmente en la bondad del *Análisis* de los antiguos y del *Álgebra* de los modernos, cuando escribe:

«[...] Los antiguos geómetras se han servido de cierto *Análisis*, que extendían a la resolución de todos los problemas, si bien privaron de él a la posteridad. Y ahora florece cierta clase de Aritmética que llaman *Álgebra*, para realizar sobre los números lo que los antiguos hacían sobre las figuras» (RIV.AT.X.373).

«Ha habido, finalmente, algunos hombres de gran talento que se han esforzado en este siglo por resucitarla; pues aquel arte no parece ser otra cosa, que lo que con nombre extranjero llaman *Álgebra*, con tal que pueda zafarse de las múltiples cifras e inexplicables figuras de que está recargado a fin de que no falte ya aquella claridad y facilidad suma que suponemos debe haber en la verdadera *Mathesis*» (RIV.AT.X.377).

Todas estas cuestiones e inquietudes que Descartes refleja en *El Discurso del Método* y en las *Regulae*, con un lenguaje bello y claro, son esenciales de tener en cuenta para entender como se había ido fraguando en su mente adolescente no sólo el origen de *La Geometría* sino la idea de la sabiduría universal.

Descartes ilustra la introducción de los célebres cuatro preceptos o reglas –*evidencia, análisis, síntesis y verificación*– de *El Discurso del Método*, que aplicará cuidadosamente en toda especulación filosófica y matemática, con estas palabras(DM.AT,VI,18-19):

«Y como la multitud de leyes sirve a menudo de disculpa a los vicios, siendo un Estado mucho mejor regido cuando hay pocas pero muy estrictamente observadas, así también, en lugar del gran número de preceptos que encierra la lógica, creí que me bastarían los cuatro siguientes, siempre que tomara la firme y constante resolución de no dejar de observarlos ni una sola vez.»

El primer precepto es el criterio de evidencia, que determina los primeros conocimientos y verdades, las ideas «*claras y distintas*» de los *Principia philosophiae* de 1644, siendo el «*cogito, ergo sum*» la primera verdad indudable y el punto de arranque de toda su Filosofía. Los otros tres preceptos corresponden, a la primera y segunda parte de la Regla V y a la Regla VII de *Las Regulae*. De acuerdo con el segundo precepto –*Regla del Análisis*– hay que dividir las dificultades hasta descubrir los elementos más simples, que se aprehenden por intuición. Según el tercero –*Regla de la Síntesis*–, debemos partir de tales objetos simples y ascender por deducción, poco a poco, hasta los más complejos. Ambos preceptos encierran el núcleo del método cartesiano. Por fin, hay que aplicar el cuarto precepto para hacer una revisión final, examinar cuidadosamente la cadena deductiva, ordenar y enumerar esos elementos simples de modo que estemos seguros de no omitir nada.

LAS CUATRO REGLAS DE EL DISCURSO DEL MÉTODO

D I S C O U R S .

Le premier estoit de ne recevoir iamais aucune chose pour vraye que ie ne la connusse euidentement estre telle: c'est à dire, d'eiter soigneusement la Precipitation, & la Preuention, & de ne comprendre rien de plus en mes iugemens, que ce qui se presenteroit si clairement & si distinctement a mon esprit, que ie n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.

Le second, de diuiser chascune des difficultez que i'examinerois en autant de parcelles qu'il se pourroit, & qu'il feroit requis pour les mieux resoudre.

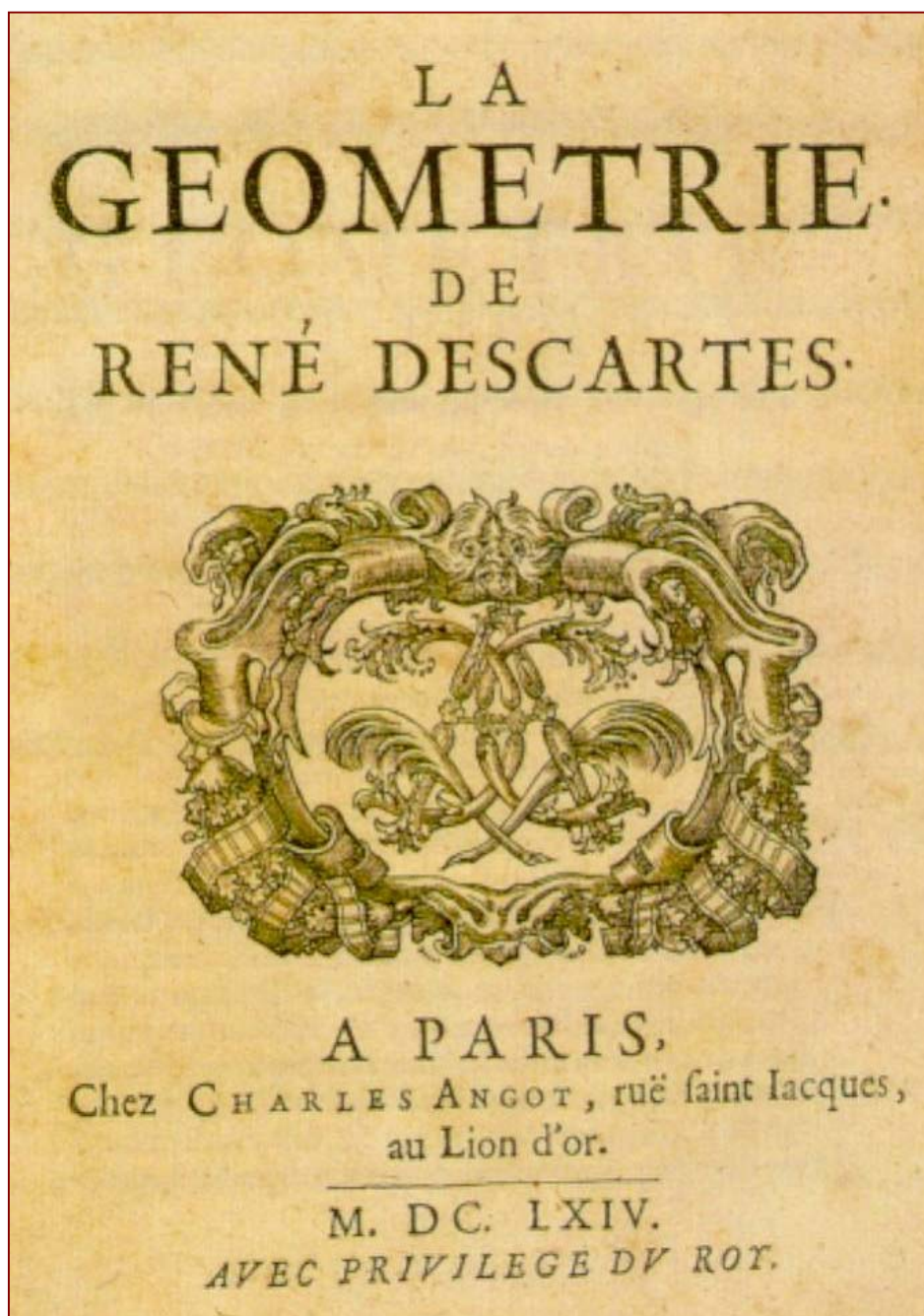
Le troisieme de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples, & les plus aysez a connoistre, pour monter peu a peu comme par degrez iusques a la connoissance des plus composez: Et supposant mesme de l'ordre entre ceux qui ne se precedent point naturellement les vns les autres.

Et le dernier de faire partout des denombrements si entiers, & des reuenës si generales, que ie fusse assuré de ne rien omettre.

Las cuatro reglas de *El Discurso del Método* en la primera edición de 1637:

1. Evidencia: no aceptar como verdadero lo que no ofrezca plena evidencia, evitando la precipitación y la prevención.
2. Análisis: dividir las dificultades en tantos elementos como sea necesario para resolverlas completamente.
3. Síntesis: Llevar los pensamientos en orden, procediendo de lo simple a lo complejo.
4. Verificación: hacer suficientes enumeraciones y revisiones para tener la seguridad de no omitir nada.

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES



La Geometría de Descartes, edición separada de *El Discurso del Método* (París, 1664).

La Geometría de Descartes es considerada con gran unanimidad como una de las obras fundamentales del pensamiento geométrico a lo largo de toda la Historia de la Matemática. Mediante el uso del Álgebra como herramienta algorítmica esencial, Descartes da una nueva lectura a la Geometría de los griegos, que supera sus limitaciones y trasciende sus conquistas geométricas a base de elaborar un magnífico instrumento de ataque de los problemas geométricos antiguos y modernos que libera a la Geometría de la dependencia y sometimiento a la estructura geométrica de la figura y su representación espacial y propone una forma de solución de los problemas basada en la aplicación del Análisis mediante la actuación del Álgebra, que supone el problema resuelto y establece una ordenada dependencia entre lo conocido y lo desconocido, hasta hallar el resultado buscado, de modo que las reglas del método cartesiano adquieren el sentido matemático de normas para la solución de los problemas geométricos mediante ecuaciones.

De acuerdo con la idea de Descartes acerca de la Matemática como fundamento de la sabiduría universal, y en particular como base racional de todas las ciencias, *La Geometría* de Descartes perfecciona de forma muy notable el Álgebra esbozada en el Libro II de las *Regulae* al establecer el Análisis Algebraico no sólo como un instrumento que aplicado a la Geometría creará la Geometría Analítica sino como algo mucho más universal todavía, el lenguaje de expresión y por tanto la clave de todas las ciencias.

La percepción de Descartes sobre el eco científico de *La Geometría*

La Geometría de Descartes no puede entenderse de forma aislada ya que forma parte indisoluble del proyecto metodológico general de alcanzar la unidad de la Ciencia que Descartes intenta fijar en las *Regulae* y en *El Discurso del Método*. Descartes se propone con *El Discurso del Método* y los tres ensayos que lo acompañan, demostrar que ha alcanzado un nuevo método de especulación sobre la verdad científica, mejor que todo método anterior y que precisamente *La Geometría* demuestra este aserto. En este sentido escribe en una carta al Padre Mersenne de diciembre de 1637 (AT,I,478):

«[...] Con *La Dióptrica* y *Los Meteoros* he querido únicamente convencer de que mi método es mejor que el ordinario y creo que lo he demostrado con mi *Geometría*, al resolver en las primeras páginas una cuestión que, según Pappus, no había podido resolver ningún geómetra de la antigüedad [...]

Ya cerca de la fecha de publicación de *El Discurso del Método* y *La Geometría*, en marzo de 1637, Descartes escribe otra carta al Padre Mersenne para comunicarle el título y el contenido de la magna obra:

«*Proyecto de una Ciencia universal que pueda elevar nuestra naturaleza a su mas alto grado de perfección. Además, La Dióptrica, los Meteoros y la Geometría, donde las más curiosas materias que el autor haya podido elegir, para dar prueba de la Ciencia universal que él autor propone, son explicadas de tal manera, que aun aquellos que no han estudiado puedan entenderlos.*»

Descartes elaboró *La Geometría* como un ejemplo de su método y fue uno de los gérmenes del mismo y aunque la labor matemática de Descartes, en cierto modo, no fue mas que un episodio en su tarea como filósofo, la Matemática era para él la base racional de su pensamiento y estaba convencido de que en el campo de las Matemáticas *La Geometría* contenía todo el elenco de conocimientos en esa área del saber. Así se lo había propuesto desde los primeros planteamientos de su magna empresa intelectual. En una carta a su amigo Beeckman del 26/3/1619, Descartes se expresa (AT.X,157):

« [...]. Y para no ocultaros nada de lo que es motivo de mi trabajo quisiera publicar no un *Ars Brevis*, como *Lulio*, sino una ciencia toda nueva, que permitiera resolver en general todos los problemas que pudieran presentarse. [...] Porque ciertos problemas pueden ser resueltos con líneas rectas o círculos, pero otros requieren otras líneas que puedan originarse por el movimiento continuo, [...] Finalmente otros problemas sólo pueden resolverse mediante líneas curvas engendradas por movimientos diferentes y no continuos. Espero poder demostrar qué problemas se resuelven de una manera y cuáles de otra, por lo cual no quedará casi nada por resolver en *Geometría*. ¡Que proyecto tan ambicioso! ¡Apenas concebible! Pero en el oscuro caos de esta ciencia, he podido vislumbrar yo no sé que luz, gracias a la cual las mas espesas tinieblas podrán disiparse.»

La impresión del volumen, tras la concesión del privilegio real, se termina el 8 de junio de 1637, en Leyden, en la imprenta de Jan Maire, tirándose 3000 ejemplares en dos ediciones. Con tal de conocer mejor las opiniones y las críticas, Descartes decidió que en la portada no figurara el nombre del autor. Aun cuando el título fue simplificado quedó en la forma:

“DISCOURS DE LA METHODE pour bien conduire sa raison et chercher la verite dans les sciences. Plus LA DIOPTRIQUE, LES MÉTÉORES ET LA GÉOMÉTRIE, qui sont essais de cette METHODE”

“DISCURSO DEL MÉTODO para conducir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias. Además LA DIÓPTRICA, LOS METEOROS y LA GEOMETRÍA que son ensayos de este MÉTODO”.

A lo largo de la correspondencia con el Padre Mersenne Descartes asegura, una y otra vez, que *La Geometría* trata de dar un procedimiento general para resolver todos los problemas que no lo habían sido jamás, por ejemplo el *Problema de Apolonio* y el famoso *Problema de Pappus* que en su formulación general se había resistido a lo largo de toda la historia y que llegó a ser la prueba de fuego de la eficiencia del método cartesiano en Geometría.

Con estos antecedentes en la gestación de su magnífica obra filosófica y matemática, es fácil comprender la importancia que Descartes concede a *La Geometría*, lo que se puede calibrar por algunos de sus escritos de lo que son buena muestra los párrafos siguientes entresacados de su correspondencia y de su obra:

En la carta al Padre Mersenne de diciembre de 1637 Descartes escribe (AT,I, 478):

«Además, lo que he escrito en el segundo libro sobre la naturaleza y las propiedades de las líneas curvas y sobre el método para estudiarlas, está tan lejos de la geometría ordinaria, como lo está la retórica de Cicerón del abc de los chiquillos ...

Ante la sugerencia de que lo que he escrito puede haber sido sacado fácilmente de Vieta, la realidad es que mi tratado es precisamente difícil de comprender porque he intentado no introducir en él nada de lo ya conocido por Vieta o por cualquier otro [...] Comienzo las reglas de mi álgebra con lo que Vieta escribe al final de su libro De emendatione aequationum [...], es decir, que comienzo donde él abandonó.»

En otra carta al Padre Mersenne de 31/3/1638:

«No describo todos los casos posibles, sino que, como los arquitectos que sólo indican lo que se debe hacer, dejando el trabajo manual a los albañiles y carpinteros, [...] He prescindido en mi Geometría de muchas cosas que puedan servir para facilitar la práctica, y lo he hecho deliberadamente, [...] Había previsto que ciertas gentes, que se vanaglorian de saberlo todo, no hubieran dejado de decir que yo no había escrito nada que ellos no supieran, si lo hubiera hecho de forma mas inteligible.»

En una carta a Alphonse Pollot:

«Es un gran honor para mi que os hayáis tomado la molestia de examinar mi Geometría, os guardo uno de los seis ejemplares que destino para los seis primeros que me parezcan que la entienden.»

En una carta al Padre Mersenne de mayo de 1637:

«Tengo que decirle que honestamente creo que hay muy poca gente que pueda entenderla.»

En una carta a Plempius de 3 de octubre de 1637 (AT,I,409):

«La Geometría tendrá un pequeño número de lectores, pues deben ser personas que no solamente estén al corriente de todo lo que se sabe en Geometría y Álgebra, sino que deben ser además laboriosos, ingeniosos y atentos.»

Empieza el *Libro Primero* de *La Geometría* con un auténtico desafío geométrico en el que anuncia las coordenadas (G.AT,VI, 369):

«Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos.»

En el mismo Libro I de *La Geometría*, tras la construcción geométrica de la solución de las ecuaciones, inmediatamente antes del ataque al problema de Pappus, Descartes escribe:

«[...] Se pueden construir todos los problemas de la geometría ordinaria sin hacer más que lo poco que está comprendido en las cuatro figuras que he explicado.»

En la aplicación del *Análisis* y la *Síntesis* al planteamiento y resolución de las ecuaciones, Descartes indica (G.AT,VI, 374):

«[...] Pero no me detengo a explicar esto con más detalle para no privar a cada uno del placer de aprenderlo por sí mismo, ni impedir el cultivo útil del propio espíritu ejercitándolo, que es, a mi parecer, la principal utilidad que puede obtenerse de esta ciencia, [...].»

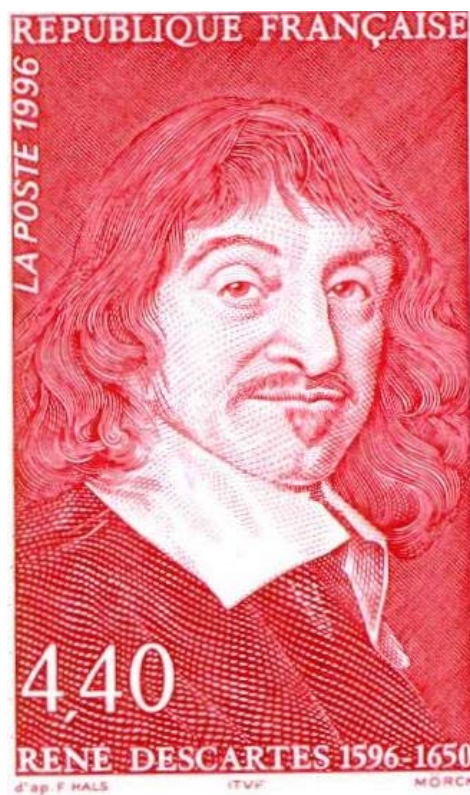
En el problema de la determinación de las rectas normales a una curva, Descartes enfatiza (G.AT,VI, 412-413):

«Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, [...] y conocer la manera de trazar otras líneas que las corten en todos esos puntos en ángulo recto. [...] Y me atrevo a decir que éste es el problema más útil y más general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría.»

La *Geometría* termina con una frase antológica de las que hacen época (G.AT,VI, 485):

«[...] Y yo espero que nuestros descendientes me estarán agradecidos no sólo por las cosas que aquí he explicado, sino también por aquellas que he omitido voluntariamente a fin de dejarles el placer de descubrirlas.»

IMÁGENES DE DESCARTES EN LOS SELLOS DE CORREOS



1. Emitido en Francia el 9 de junio de 1937, en conmemoración del tercer centenario de la publicación de *El Discours sur la Méthode*.
2. Emitido en Mónaco en el 400 aniversario del nacimiento de Descartes.
3. Emitido en Francia en el 400 aniversario del nacimiento de Descartes.

El contenido de *La Geometría*

La Geometría se compone de tres libros bien diferenciados y a la vez muy entrelazados; tiene en la edición original 120 páginas, con 48 figuras de las que son diferentes 30.

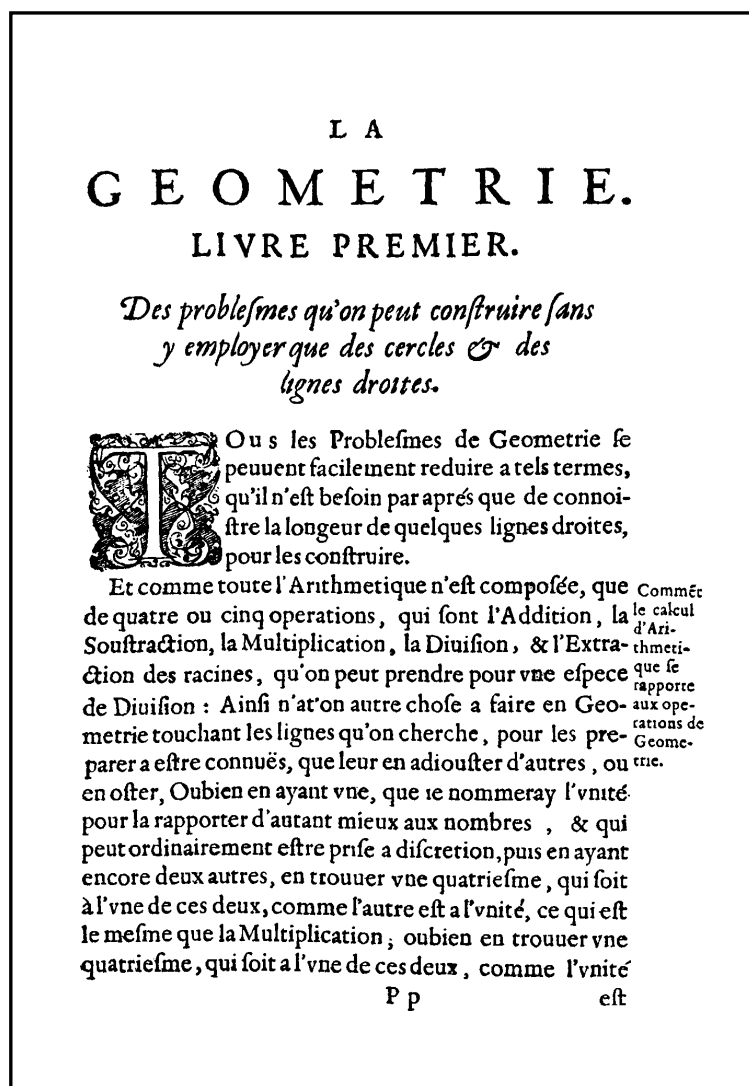
El *Libro Primero* de *La Geometría* trata «*De los Problemas que pueden construirse sin emplear más que círculos y líneas rectas*».

En este libro Descartes fija (basándose siempre en *El Discurso del Método*) la metodología cartesiana que aplicará a la traducción algebraica de los problemas geométricos clásicos, de modo que el libro contiene el núcleo de toda la formulación cartesiana de *La Geometría*, siempre íntimamente ligada al método.

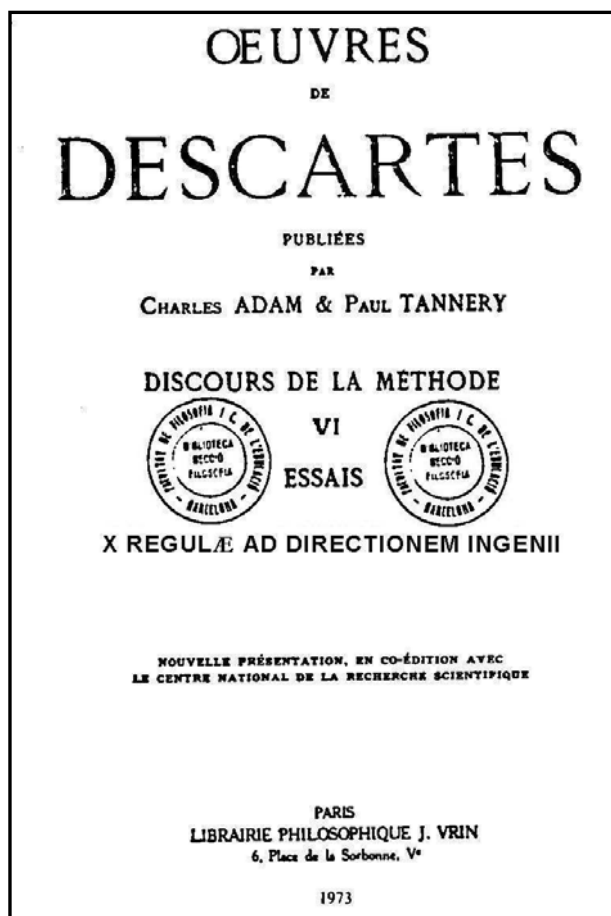
Empieza el libro con una auténtica declaración de principios (G.AT,VI, 369):

«Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos.»

Así pues, como las líneas rectas son lo que se nos presenta de la forma *más clara y distinta* en el campo de la Geometría, para resolver problemas geométricos, partiremos de ciertas líneas rectas –en realidad de algunos segmentos rectilíneos–; pero como un problema geométrico sólo está completamente resuelto –es decir, geoméricamente resuelto– cuando se ha construido la solución, es preciso dar ésta en términos de segmentos que se deben construir.

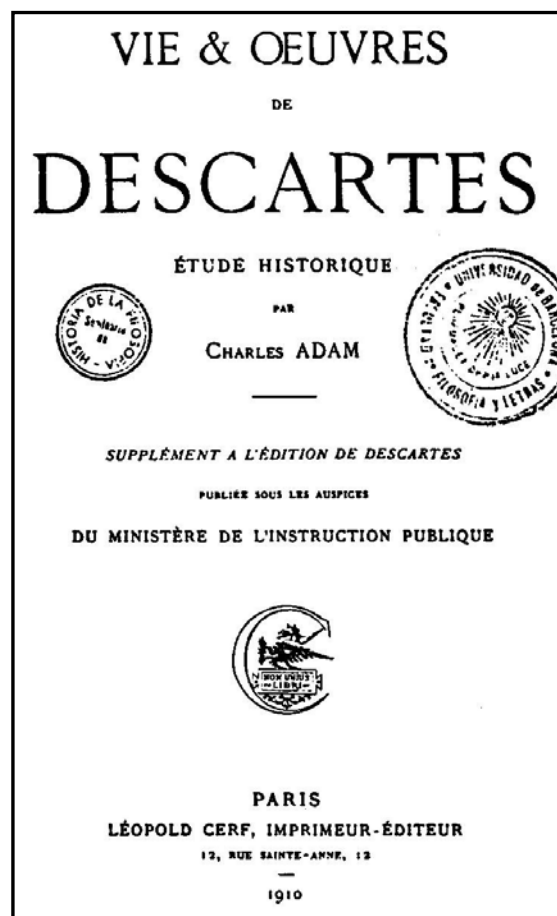


LAS PRINCIPALES REFERENCIAS SOBRE LA OBRA DE DESCARTES



Oeuvres de Descartes. Publiées par C.Adam et P.Tannery. 12 volúmenes. Librairie philosophique J.Vrin. París. 1964-74.

El Volumen VI contiene *El Discours de la Méthode*, *La Géométrie* y los otros Ensayos. El Volumen X contiene las *Regulae ad directionem ingenii* entre otros tratados.

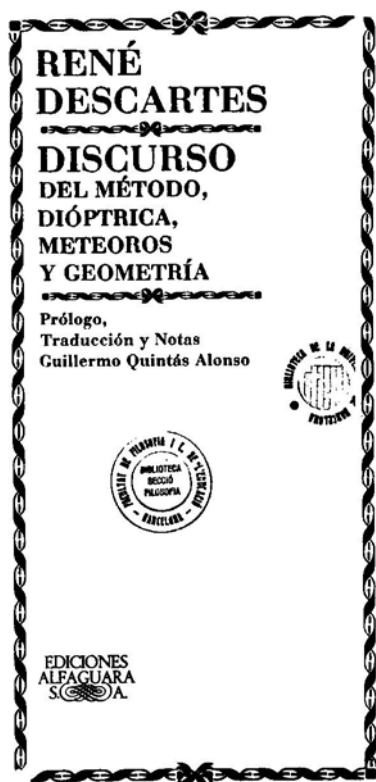
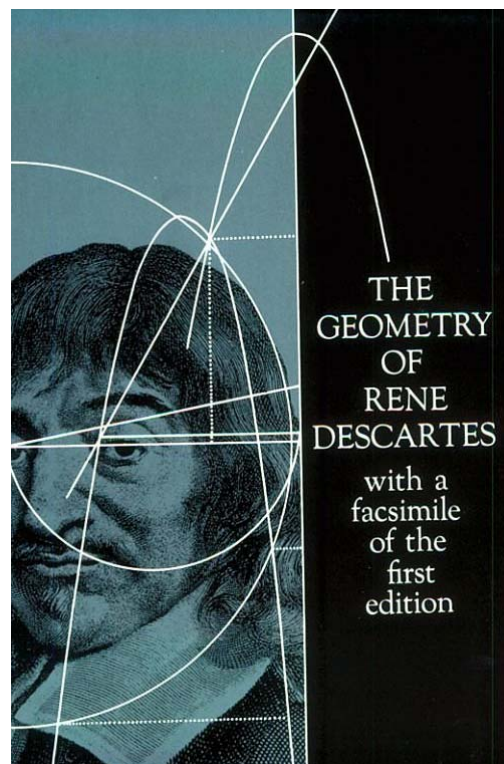


Vie et Oeuvres de Descartes. Étude historique par C.Adam. París, 1910.

Es una obra muy completa sobre la vida, viajes, polémicas y escritos de Descartes: *Metaphysique*, *Le Monde*, *Dioptrique*, *Géométrie*, *Discours de la Méthode*, *Polémiques*, *Méditations*, *Principes de la Philosophie*, *Passions de l'Âme*, ...

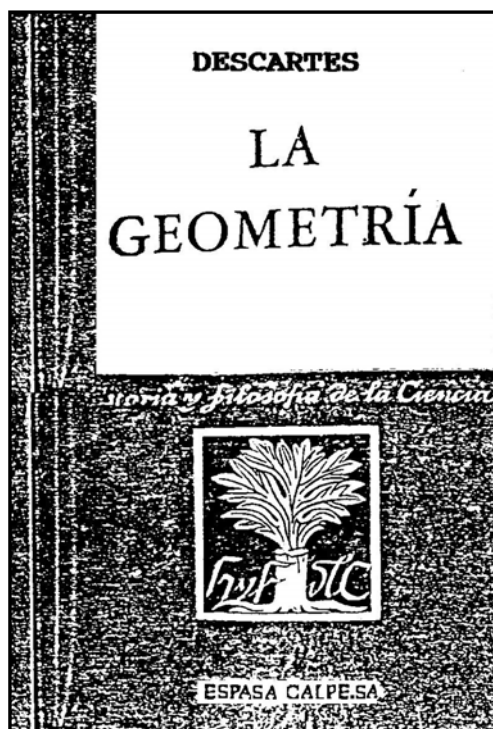
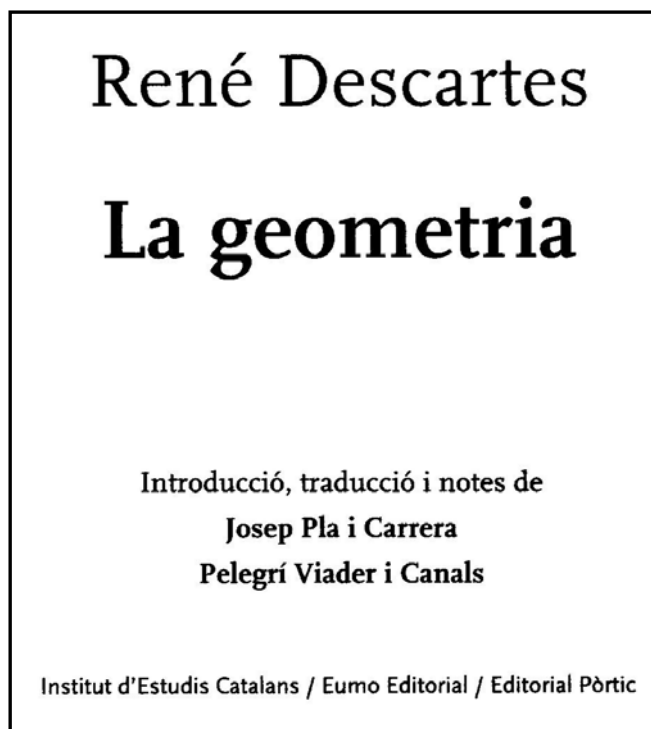
El primer punto consistirá en advertir que las operaciones aritméticas elementales entre segmentos producen siempre un nuevo segmento, por eso en los primeros capítulos Descartes expone los procedimientos ya conocidos para construir geoméricamente las operaciones de la Aritmética: omite las construcciones de la suma y diferencia de segmentos y construye la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas, a base de introducir el concepto de segmento unidad. Así pues, Descartes pone de manifiesto que el producto de dos o de tres segmentos es otro segmento, así como que el cociente de dos segmentos también es otro segmento. Esta interpretación geométrico-algebraica de las operaciones aritméticas marca un hito en la Historia de la Matemática porque, por una parte soslaya la limitación pitagórica que la inconmensurabilidad había impuesto a la Geometría griega –la imposibilidad de asignar números a las figuras geométricas ante el fantasma de lo inconmensurable–, y por otra, permite romper con el problema de la homogeneidad dimensional, que había sido, sin duda hasta entonces, otra de las grandes limitaciones de la aplicación del Álgebra a la Geometría. Desde luego así había sido en la Geometría griega, pero incluso en la época de Descartes el producto de dos segmentos era un rectángulo, y el producto de tres segmentos un paralelepípedo, por tanto el producto de más de tres segmentos no tenía sentido y en consecuencia no se llevaba a efecto.

ALGUNAS EDICIONES DE LA GEOMETRÍA DE DESCARTES



Ediciones de *La Geometría de Descartes* utilizadas en este trabajo:

1. DESCARTES. *La Geometría*. Espasa-Calpe, Buenos Aires. 1947.
2. DESCARTES. *The Geometry*. Dover, New York, 1954.
3. DESCARTES. *La Geometría*. Alfaguara, Madrid, 1986.
4. DESCARTES. *La Geometria*. Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, 1999.



Tras la construcción geométrica de las operaciones, Descartes pasa a mostrar «*Cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas*» y «*Cómo se resuelven*», lo que aplicará a dar solución al *Problema de Pappus* que trata en la forma más general, creando el método analítico de solución y discusión de los problemas matemáticos. Este problema había sido resuelto por Descartes en 1632 cuando Golius se lo propuso para que aplicara sobre él sus nuevos métodos, convirtiéndose en una auténtica piedra de toque que pone a prueba el nuevo método cartesiano, llegando en su resolución mucho más lejos que los geómetras griegos. El enunciado del problema está dado en latín («*cito la versión latina y no la griega con el fin de que pueda ser entendido con más facilidad*», escribe Descartes) y es la reproducción de la traducción de Commandino de *La Colección Matemática* de Pappus de 1589.

El *Libro Segundo* de *La Geometría* titulado «*De la naturaleza de las líneas curvas*» consta de cuatro partes bien diferenciadas:

- a) *La naturaleza geométrica de las líneas curvas*, vinculada sobre todo a dos cuestiones íntimamente ligadas: los compases cartesianos y la teoría de la proporción continua. Mientras en el Libro I, sin olvidar los lugares geométricos, Descartes centra más la atención sobre puntos individualizados, en el Libro II se proyecta sobre el objeto geométrico *Curva*. Descartes mantiene la división clásica griega de los problemas geométricos en *planos*, *sólidos* y *lineales* (que se resuelven con ecuaciones de segundo, tercer y cuarto o mayor grado, respectivamente) y demuestra que los problemas planos se construyen con rectas y circunferencias, los sólidos con secciones cónicas y el resto con líneas más complejas, llamadas por los antiguos *curvas mecánicas*, aunque más correcto sería llamarlas *curvas geométricas*. Descartes tiene el propósito de poner un poco de orden en el estudio de las curvas de la Geometría de los griegos, que según él era un caos completo, secuela de la limitación platónica de la regla y el compás, al no ser capaces de distinguir las diversas clases de curvas por no poder dilucidar la naturaleza de las mismas. Esto es precisamente lo que se propone Descartes, a base de establecer qué curvas son las que se pueden admitir en Geometría.
- b) *El Problema general de Pappus*, ahora tratado con las herramientas precisas para poder clasificar las diversas soluciones de los diversos planteamientos del mismo. Con el método cartesiano el clásico *Problema de Pappus* queda completamente resuelto.
- c) *La construcción y propiedades de tangentes y normales* a una curva geométrica. Una vez concebida y definida, de forma clara y distinta, *la naturaleza geométrica de las líneas curvas*, Descartes introduce uno de los principios básicos de su método: «*para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, [...]*», y establece cómo se puede utilizar la expresión algebraica (la ecuación de las curvas) para determinar los elementos geométricos más notables de las curvas (diámetros, ejes, centros, etc.) y, en particular, las normales, líneas cuya consideración y utilidad deriva de los problemas de la reflexión de la luz sobre las superficies curvas, y que literalmente es considerado por Descartes como el más importante problema geométrico que pueda ser concebido.
- d) Finalmente Descartes estudia *los Óvalos* como curvas especiales que responden a consideraciones fijadas de las tangentes o normales. Descartes introduce cuatro amplias familias de curvas nuevas, de las que las cónicas son casos particulares.

El *Libro Tercero* de *La Geometría* trata «*De la construcción de los problemas que son sólidos o más que sólidos*» mediante el estudio de la resolución de ecuaciones, discusión de sus raíces, y relaciones entre los coeficientes. Descartes pretende ofrecer un método de resolución de cualquier ecuación algebraica. En realidad sólo llega a la resolución geométrica de un determinado tipo de ecuaciones de quinto y sexto grado, pero su método quiere ser general. Muestra que una ecuación puede tener tantas raíces como dimensiones tiene el grado (existe «*la posibilidad de imaginar tantas raíces como el grado del polinomio*»), da luego su famosa regla de los signos y adelanta el *Teorema de Ruffini* del factor. Descartes introduce como transformaciones de la variable las traslaciones y las

homotecias (no es el primero, Vieta y Harriot, respectivamente se habían adelantado a ellas), mediante las cuales consigue (como había hecho Vieta con anterioridad), reducir el segundo término y cuando es posible, racionalizar.

Después de fundamentar las operaciones y propiedades algebraicas necesarias, Descartes introduce el simple criterio de divisibilidad sobre el término independiente de la ecuación polinómica (como condición necesaria aunque no suficiente) para obtención de raíces enteras y a partir de aquí ir reduciendo el grado de la ecuación mediante el algoritmo de la división. La existencia de una raíz entera permite caracterizar el problema geométrico inicial que conduce a la ecuación polinómica en cuestión como un *problema plano*, siempre y cuando la raíz sea adecuada para el problema geométrico. Por ejemplo en el caso de ecuaciones cúbicas con raíz entera, el problema es *plano*, ya que tras efectuar la división, obtenemos una ecuación cuadrática, cuyas soluciones, si existen, se obtienen con regla y compás, de acuerdo con lo establecido en el libro I. En caso de ausencia de raíces enteras, se puede afirmar, sin duda alguna, que el problema geométrico inicial es sólido y Descartes establece entonces que sólo hay dos formas de resolver la ecuación mediante la intervención de los clásicos problemas: la *duplicación del cubo* y la *trisección del ángulo*. De hecho, todo problema cúbico es equivalente a uno de estos dos problemas geométricos (G.AT,VI, 471-475). He aquí un nuevo y magnífico éxito del método cartesiano aplicado a la Geometría: las ecuaciones del Álgebra son el reflejo lingüístico de los problemas de la Geometría.

Finalmente, Descartes plantea la siguiente cuestión: si en el caso de ecuaciones cuadráticas, las soluciones venían dadas por segmentos construibles con regla y compás (según el Libro I), es decir, el problema geométrico de donde procedían era *plano*, ¿es posible construir las soluciones de las ecuaciones cúbicas y cuárticas con solución real? Descartes resuelve de forma contundente el problema mediante la intersección de una circunferencia y una parábola convenientemente determinadas por la ecuación que se quiere resolver (G. AT,VI, 464-471).

DESCARTES EN L'ENCYCLOPÉDIE DE D'ALEMBERT Y DIDEROT



D'Alembert escribe sobre Descartes en el *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie* (Orbis, Barcelona, 1984, pp.84-85):

«Descartes tenía todo lo que se necesitaba para cambiar la faz de la Filosofía: una fuerte imaginación, un espíritu muy consecuente, unos conocimientos procedentes de su interioridad más que de los libros, un gran coraje para combatir los prejuicios y una total independencia intelectual.

Se puede considerar a Descartes como geómetra o como filósofo. Las Matemáticas, a las que parece haberle prestado poca atención, hoy son sin embargo la parte más sólida y menos discutida de su gloria. El Álgebra creada, de alguna forma, por los italianos, prodigiosamente desarrollada por nuestro ilustre Vieta, ha recibido entre las manos de Descartes nuevos enriquecimientos. Uno de los más considerables es su Método de las indeterminadas, artificio muy ingenioso y muy sutil, que luego se ha podido aplicar a un gran número de investigaciones.

Pero lo que ha immortalizado el nombre de este gran hombre es la aplicación que hizo del Álgebra a la Geometría, una idea de las más vastas y felices que el intelecto humano haya concebido jamás, y que será siempre la llave de los más profundos descubrimientos no solamente en la geometría sublime, sino en todas las ciencias físico-matemáticas.»

La construcción geométrico-algebraica de las operaciones aritméticas

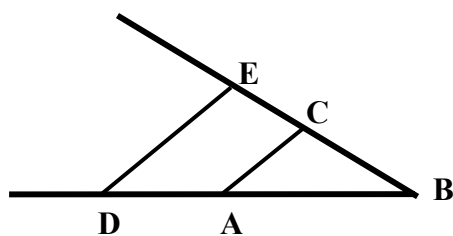
Veamos cómo dados un segmento unidad y dos segmentos a y b , Descartes construye, mediante circunferencias y rectas, el producto $a \cdot b$, el cociente a/b y la raíz cuadrada $\sqrt{a}$, que resultan ser segmentos, porque se obtienen como una cuarta proporcional o como una media proporcional, de modo que establece que las operaciones aritméticas elementales de segmentos dan segmentos que se construyen mediante la regla y el compás.

Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de geometría.

«Y así como la aritmética no comprende más que cuatro o cinco operaciones, que son la adición, la sustracción, la multiplicación, la división y la extracción de raíces, que pueden tomarse como una especie de división, así también no hay otra cosa que hacer en geometría, respecto a las líneas que se buscan, para prepararlas a ser conocidas, que agregarles o quitarles otras, o bien, teniendo una, que llamaré la unidad para relacionarla lo más posible con los números, y que ordinariamente puede ser tomada a discreción, y teniendo luego otras dos, encontrar una cuarta que sea a una de esas dos, como la otra es a la unidad, que es lo mismo que la multiplicación; o bien encontrar una cuarta que sea a una de esas dos como la unidad es a la otra, lo que es lo mismo que la división; o, en fin, encontrar una, dos, o varias medias proporcionales entre la unidad y alguna otra línea, lo que es lo mismo que extraer la raíz cuadrada, o cúbica, etc. Y yo no temeré introducir estos términos de aritmética en la geometría, a fin de hacerme más inteligible». (G.AT,VI, 369-371).

La limitación operacional que trajo la inconmensurabilidad impidió en la Geometría griega asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes, áreas y volúmenes. En este ámbito, la raíz cuadrada, por ejemplo, equivalía al problema geométrico de cuadrar un rectángulo, es decir, hallar el lado de un cuadrado equivalente a un rectángulo dado. Descartes rompe aquí también con el pasado y abre una nueva brecha al asignar longitudes a los segmentos (empezando por adoptar un segmento unidad del que había hablado en la Regla XVI, RXVI.AT.X.449), de modo que mientras en la Aritmética las únicas raíces cuadradas exactas que pueden obtenerse son las de los cuadrados perfectos, en Geometría, a partir de Descartes, puede hallarse un segmento que represente exactamente la raíz cuadrada de otro segmento dado, incluso cuando este segmento no sea conmensurable con la unidad.

Veamos la construcción efectiva de Descartes del producto, el cociente y la raíz cuadrada:



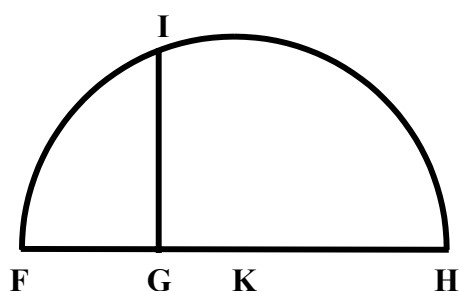
La multiplicación.

Sea, por ejemplo, AB la unidad, y que deba multiplicarse BD por BC ; no tengo más que unir los puntos A y C , luego trazar DE paralela a CA , y BE es el producto de esta multiplicación.

Como en muchos problemas de *La Geometría*, Descartes aplica el *Teorema de Tales* (*Euclides*, VI.4) a la semejanza de triángulos. En este caso, como en el siguiente de la división, la semejanza de los triángulos $\triangle BAC$ y $\triangle BDE$, que determinan $BE/BD = BC/BA$.

La división

O bien, si deben dividirse BE por BD , habiendo unido los puntos E y D , se traza AC paralela a DE y BC es el resultado de esa división.



La extracción de la raíz cuadrada

O, si hay que extraer la raíz cuadrada de GH, se le agrega en línea recta FG, que es la unidad y dividiendo FH en dos partes iguales por el punto K, con ese punto como centro se traza el círculo FH; luego elevando desde el punto G una línea recta, con ángulos rectos sobre FH, hasta I, es GI la raíz buscada. No digo nada aquí de la raíz cúbica, ni de las otras, pues de ellas trataré con más detalle más adelante.

En esta ocasión, Descartes usa el otro *Teorema de Tales* (Euclides, III.31) y el *Teorema de la Altura* (Euclides, VI.8).

No hay ninguna novedad en la traducción geométrica de las operaciones algebraicas elementales que hace Descartes pensando en la ulterior resolución de ecuaciones. De hecho sabemos que el *Álgebra Geométrica* de los griegos era una forma geométrico-sintética de resolver ecuaciones, y después de los griegos, los matemáticos árabes disponían de algoritmos de resolución de ecuaciones mediante ciertas construcciones geométricas, que traducían las operaciones algebraicas casi en los mismos términos que Descartes. La gran innovación cartesiana estriba en que Descartes las utiliza para resolver problemas geométricos, es decir, para hacer Geometría mediante el Álgebra y no al revés.



La edición de F. van Schooten, de 1659, de *La Geometría* de Descartes, parte de su largo título es:

Geometria, à Renato Des Cartes : anno 1637 Gallicè edita; postea autem una cum notis / Florimondi de Beavne ... Gallicè conscriptis in Latinam Linguam versa, & commentariis illustrata, operâ atque studio Francisci à Schooten ... -- Amstelaedami : apud Ludovicum & Danielem Elzevirios, 1659.

En 1644, el matemático Frans van Schooten, editor de *La Geometría* de Descartes y autor de las figuras, graba la imagen *ad vitum* de un caballero con bigote y barba, circundando el retrato con la siguiente inscripción: *Renatus Des Cartes ... Natus Hagae Turorum anno MDCXVI*. Señalan los historiadores que esta inscripción es el único documento que atestigua la fecha de nacimiento de Descartes. El filósofo encontró este retrato «muy bien hecho, aunque la barba y el vestido no se le parecen en nada».

El retrato acompaña a la edición de van Schooten, de 1659, de *La Geometría* de Descartes.

La notación matemática cartesiana

Al comienzo de su trabajo matemático Descartes hace uso, bajo el influjo de Clavius, de la notación cóscica. Pero ya en *Las Reglas para la dirección del espíritu* hay, quizá como secuela de la lectura de Vieta, una primera evolución hacia el simbolismo. En el título de la Regla XVI Descartes pondera el significado y la importancia que tiene una notación sencilla:

«En cuanto a las cosas que no requieren la atención presente de la mente, incluso si son necesarias para la conclusión, es mejor designarlas por medio de signos muy breves que por figuras completas: pues así la memoria no podrá fallar, mientras que además el pensamiento no se distraerá en retenerlas, cuando se dedique a deducir otras» (RXVI.AT.X.454).

Descartes hace alusión al uso de la escritura (RXVI.AT.X.454–455):

«[...] Muy acertadamente el arte inventó la escritura, fiados en cuya ayuda nada en absoluto encomendaremos ya a la memoria, sino que, dejando a la fantasía en su totalidad libre para las ideas presentes, escribiremos en el papel cuanto haya de ser retenido; y ello por medio de signos muy breves [...]. A cuanto haya de ser contemplado para la solución de una dificultad, lo designaremos por medio de un signo único que puede ser formado al capricho de cada cual.»

Más adelante, Descartes concreta el simbolismo a adoptar: (RXVI.AT.X.455):

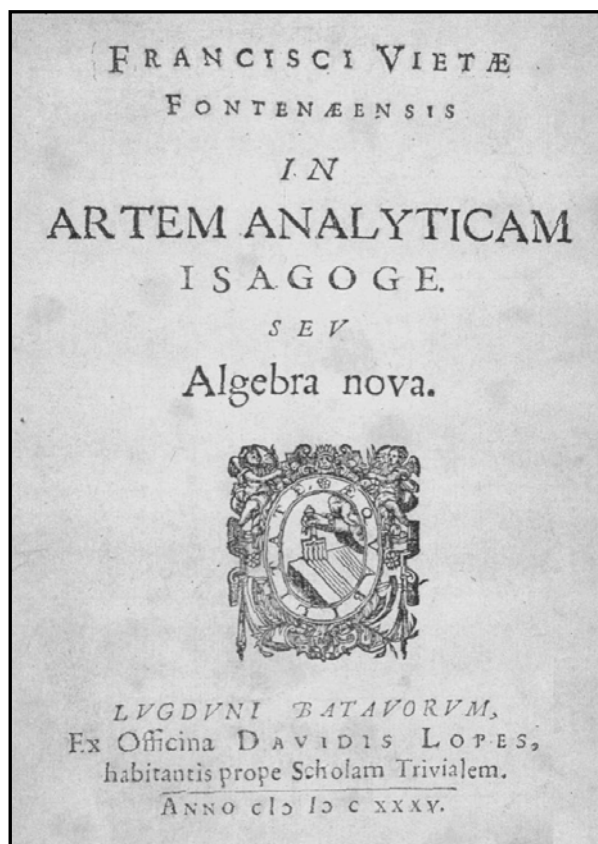
«Mas, para mayor facilidad, utilizaremos las letras a,b,c, etc., para expresar las magnitudes ya conocidas, y las letras A,B,C, etc., para las incógnitas; las haremos preceder frecuentemente de los signos numéricos 1,2,3,4, etc., para expresar su multiplicidad, y les agregaremos también el número de sus relaciones que en ellas habrán de entenderse, así si escribo $2a^3$, será lo mismo que si dijera el duplo de la magnitud denotada por la letra a, que contiene tres relaciones. Con este artificio, no sólo resumiremos muchas palabras, sino que, mostraremos los términos de la dificultad tan puros y desnudos, que sin omitir nada útil, no se encuentre en ellos nada superfluo, que ocupe inútilmente la capacidad del espíritu, mientras la mente se vea obligada a abarcar a un tiempo muchas cosas.»

He aquí la introducción de parámetros e incógnitas como ya había hecho Vieta con anterioridad, aunque Descartes no lo menciona sino que habla de su nueva forma de trabajar frente a los tradicionales calculistas (RXVI.AT.X.455–456, 458):

«A fin de que todo esto se entienda con mayor claridad, ha de observarse, en primer lugar, que los Calculistas acostumbran a designar cada una de las magnitudes por medio de varias unidades o por medio de algún número, y que nosotros en cambio en este lugar hacemos abstracción de los números mismos no menos que poco antes de las figuras geométricas. Hacemos esto tanto para evitar el tedio de un cálculo largo y superfluo, como principalmente para que las partes del objeto que atañe a la naturaleza de la dificultad permanezcan siempre distintas y no sean envueltas por números inútiles: así, si se busca la base de un triángulo rectángulo cuyos lados son 9 y 12, el Calculista dirá que aquella es $\sqrt{225}$ o 15; nosotros, sin embargo en lugar de 9 y 12, pondremos a y b, y encontraremos que la base es $\sqrt{a^2 + b^2}$, y aquellas dos partes a^2 y b^2 , que en el número están confusas, permanecerán distintas.»

«Todo esto [diferenciación entre magnitudes conocidas –parámetros– y magnitudes desconocidas –incógnitas–] lo distinguimos nosotros que buscamos un conocimiento evidente y distinto de las cosas, pero no los Calculistas, que se quedan satisfechos con tal que se les presente el resultado [numérico] buscado, aun cuando no se den cuenta de qué modo éste depende de los datos, en lo cual solo, sin embargo, consiste propiamente la ciencia.»

EL ARTE ANALÍTICA DE VIETA



Portada de la edición de 1635 *In Artem Analyticam Isagoge* de Vieta. La primera edición es de 1591.

La obra de Vieta *In Artem Analyticam Isagoge* está inspirada profundamente en la obra de Diofanto y Pappus. En ella Vieta fundamenta los principios y las reglas del cálculo algebraico literal.

El *Arte Analítica* de Vieta perfecciona considerablemente el Álgebra sincopada de Diofanto y de los matemáticos árabes y renacentistas, e inicia el cálculo literal del Álgebra simbólica mediante la introducción de los parámetros, lo que le permite obtener la solución general de las ecuaciones mediante fórmulas que expresan las incógnitas en función de los parámetros. Ya que los parámetros no permiten obtener un resultado numérico concreto tras las operaciones combinatorias que conducen a la resolución de una ecuación, sino una solución simbólica, Vieta trasciende la *Logística numerosa* ordinaria, aplicada al cálculo con números, y alcanza la *Logística speciosa* que tiene que ver con las especies, entendiendo por éstas cualquier tipo de magnitud, en particular elementos geométricos como ángulos o longitudes. Esto quiere decir que las cantidades simbólicas del *Arte Analítica* al ser interpretadas como magnitudes geométricas y las operaciones simbólicas como procedimientos de construcción geométrica, permiten obtener la solución simbólica de las ecuaciones generales con significado geométrico, de modo que el *Arte Analítica* podía ser aplicado no sólo a los problemas numéricos sino también a problemas geométricos. De esta forma, el *Arte Analítica* de Vieta que tuvo su origen en el *Tesoro del Análisis* de Pappus, revierte sobre éste, de manera que su contenido es traducido al lenguaje simbólico del Arte, es decir, mediante el concurso del Álgebra simbólica, Vieta puede reconstruir, en términos algebraicos, el Análisis Geométrico clásico, lo que prepara el terreno para el advenimiento de la Geometría Analítica de Descartes.

Como explica Vieta:

«La debilidad del antiguo Análisis residía en que se aplicaba sólo a los números, es decir, era una *Logística numerosa*. Pero el Álgebra permite razonar sobre cualquier tipo de magnitud -número, segmento, ángulo, figura,...- de modo que lo que hay que hacer es considerar una *Logística speciosa*, aplicable a cualquier especie de cantidad, que se podrá expresar de una manera genérica mediante letras, tanto si es una magnitud desconocida [incógnita] como conocida [parámetro], ya que no hago diferencia entre ellas. Es más, consideraré las magnitudes desconocidas como si se conocieran y operando según las reglas del Arte Analítica, las desconocidas con las conocidas, obtendré aquellas en función de éstas. He aquí el fundamento de la obtención de soluciones generales de los problemas donde los antiguos sólo obtenían soluciones particulares. »

Por la naturaleza del *Arte Analítica*, el Análisis algebraico-geométrico de Vieta es un estadio intermedio esencial en el camino que arranca del Álgebra Geométrica de los griegos y confluye en la Geometría Analítica de Descartes.

Aunque nunca reconocerá la paternidad de Vieta en algunas de sus ideas fundamentales, Descartes debió inspirarse en él en la introducción del uso de letras para designar no sólo las cantidades desconocidas –incógnitas o variables– sino incluso las conocidas–parámetros–. Así se aplica un magnífico instrumento que permite obtener la solución general de los problemas mediante fórmulas que expresan las incógnitas en función de los parámetros. Como escribe Vieta: «*He aquí el fundamento de la obtención de soluciones generales donde los antiguos sólo daban soluciones particulares*». En este sentido los calculadores, a los que alude Descartes, siguen siendo antiguos, ya que: «*no se dan cuenta de qué modo el resultado depende de los datos*» (RXVI.AT.X.458). En efecto, cuando no se emplean más que números para designar cantidades conocidas, estos números se confunden y se disipan en el curso de las operaciones, de modo que en la obtención de la solución no queda ninguna traza de la línea seguida en las operaciones. Con la introducción de los parámetros de Vieta y Descartes, al contrario, la cantidad desconocida siendo despejada e igualada a las cantidades conocidas, se dispone de un cuadro general con todas las operaciones que es preciso hacer sobre los datos para obtener la solución. Así es posible construir una Teoría general de ecuaciones, de modo que, por ejemplo, se estudia, no ecuaciones cúbicas, sino *la ecuación cúbica*, es decir, la ecuación general de tercer grado expresaba en una incógnita y cuatro parámetros.

Vieta había dado un gran paso hacia el Álgebra simbólica, pero para las potencias permaneció en la tradición indicando *quad* para el cuadrado y *cub* para el cubo, *aeq* para la igualdad y *in* para el producto. Así la ecuación « $x^3 + 5bx^2 - 2cx = d$ », Vieta la expresaría como: «A cub + B 5 in A quad – C plano 2 in A aeq D solido», donde los parámetros B,C y D deben ser tales que cada término de la ecuación sea tridimensional, ya que para Vieta, como herencia griega, las operaciones aritméticas están incluidas todavía en un terreno estrictamente geométrico, que mantiene la homogeneidad, siendo cuadrado una magnitud plana y cubo una magnitud espacial. Como se ve, el simbolismo en Vieta no es total, falta aplicar signos para la igualdad, el producto, las potencias, y otros, que de hecho ya existían en su época. De haberlo hecho, Vieta, por ejemplo, podría haber escrito *todas las ecuaciones cuadráticas* de la forma $BA^2 + CA + D = 0$, donde A es la incógnita y B,C,D, son los parámetros. Así pues, al manejar todavía simplemente abreviaturas el Álgebra de Vieta sigue siendo sincopada. Será Descartes quien introduce en la Regla XVI, como se ha visto, la convención actual para la codificación de los símbolos de incógnitas y potencias, que por primera vez en la Historia de la Matemática serán símbolos artificiales, arbitrarios [«*formado al capricho de cada cual*» (RXVI.AT.X.455)] y no abreviadores. El signo cartesiano, como notación «*no cóscica*», no es considerado como imagen del concepto, sino que es una mera apoyatura operacional para captar y manipular dicho concepto.

El convenio establecido es perfeccionado por Descartes en *La Geometría*, donde en lugar de designar por A,B,C, las incógnitas, utiliza las últimas letras minúsculas x,y,z; y en cuanto a las potencias y raíces Descartes establece (G.AT,VI, 371):

Cómo pueden emplearse letras en geometría.

«*Pero a menudo no hay necesidad de trazar esas líneas sobre el papel y basta con designarlas por ciertas letras, una sola para cada línea. Así, para sumar la línea BD a la GH, designo a la una a y a la otra b y escribo $a + b$; y $a - b$ para restar b de a; y ab para multiplicar la una por la otra; y $\frac{a}{b}$ para dividir a por b; y aa o a^2 para multiplicar a por sí misma; y a^3 para multiplicar otra*

vez por a, y así al infinito; y $\sqrt{a^2 + b^2}$ para extraer la raíz cuadrada de $a^2 + b^2$; y $\sqrt[3]{Ca^3 - b^3 + abb}$ para extraer la raíz cúbica $a^3 - b^3 + abb$ y así otras.

Es de señalar que para a^2 o b^3 u otras expresiones semejantes, yo no concibo ordinariamente mas que líneas simples, aunque para servirme de los nombres usados en álgebra, los designe por cuadrados, cubos, etc.

Por último, a fin de no dejar de recordar los nombres de estas líneas, conviene siempre hacer una anotación separada, a medida que se las coloca o se las cambia, escribiendo, por ejemplo, $AB \propto 1$, es decir AB igual a 1».

LA NOTACIÓN MATEMÁTICA CARTESIANA

LIVRE PREMIER.

gnes sur le papier, & il suffit de les designer par quelques ^{vser de} lettres, chascune par vne seule. Comme pour adiouster ^{chiffres en} la ligne B D a G H, ie nomme l'une a & l'autre b , & escrie ^{Geome-} $a + b$; Et $a - b$, pour soustraire b d' a ; Et ab , pour les mul-
tiplier l'une par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiser a par b ; Et aa ,
ou a^2 , pour multiplier a par soy mesme; Et a^3 , pour le
multiplier encore vne fois par a , & ainsi a l'infini; Et
 $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine quarrée d' $a^2 + b^2$; Et
 $\sqrt[3]{C. a^3 - b^3 + ab^2}$, pour tirer la racine cubique d' $a^3 - b^3$
 $+ ab^2$, & ainsi des autres.

Où il est a remarquer que par a^2 ou b^3 ou semblables, ie ne conçoys ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me seruir des noms vsités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c.

Il est aussy a remarquer que toutes les parties d'une mesme ligne, se doiuent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre, lorsque l'vnité n'est point déterminée en la question, comme icy a^3 en contient autant qu' abb ou b^3 dont se compose la ligne que i'ay nommée $\sqrt[3]{C. a^3 - b^3 + ab^2}$: mais que ce n'est pas de mesme lorsque l'vnité est déterminée, a cause qu'elle peut estre soustendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimensions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $aaab - b$, il faut penser que la quantité $aaab$ est diuisée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la mesme.

Vemos, pues, que Descartes asigna una letra a cada segmento, que de hecho designa (y mide) su longitud. Además, introduce los exponentes para escribir las potencias; utiliza a^3 , a^4 , a^5 , a^6 , etc., para representar las respectivas potencias de a , pero usa indistintamente aa o a^2 para el cuadrado, lo cual tiene su explicación pues mientras que para escribir tanto aa como a^2 se precisan dos signos en las potencias superiores a a^2 hay una gran economía de lenguaje al escribir a^n . Además, vemos que Descartes designa la raíz cúbica $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + abb}$ mediante $\sqrt{C.a^3 - b^3 + abb}$ y la igualdad por medio del símbolo $\propto$ que pudiera provenir de las dos primeras letras de la palabra latina *aequare*.

El penúltimo párrafo tiene una gran trascendencia. Con anterioridad a Descartes, geoméricamente sólo tenían sentido las potencias cuadrática a^2 y cúbica a^3 , que representaban respectivamente un cuadrado de lado a y un cubo de arista a . El propio Vieta, con su *ley de los homogéneos*, había permanecido fiel al espíritu del pasado geométrico de los griegos, gobernado por la *Teoría de las Proporciones*, que había liberado a los antiguos del trauma de la inconmensurabilidad. Afortunadamente Descartes eliminó esta reminiscencia clásica en la Regla XVI de las *Regulae* (RXVI.AT.X.457):

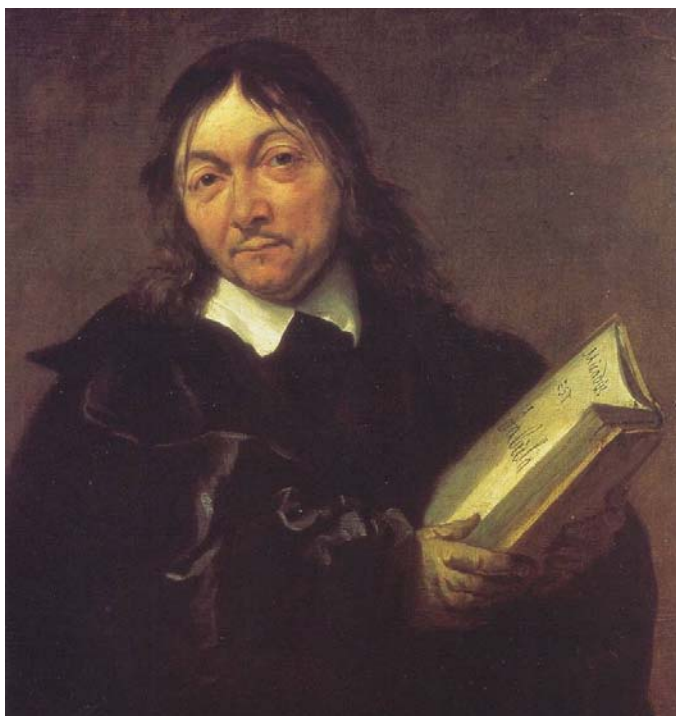
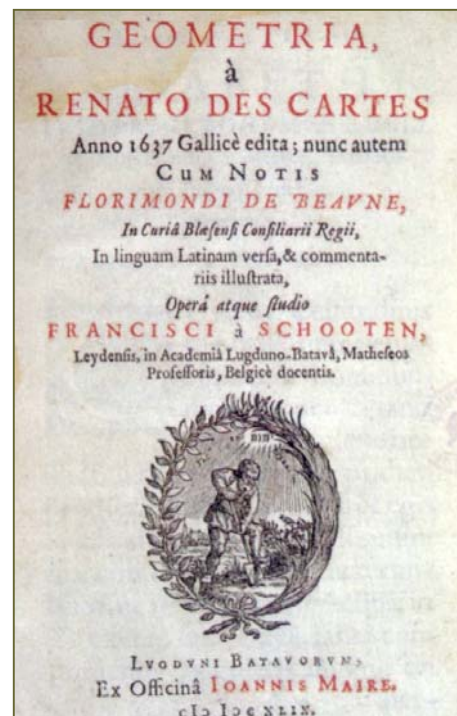
«La misma magnitud aunque, aunque sea llamada cubo o bicuadrado, nunca debe ser propuesta a la imaginación [...] más que como una línea o como una superficie. Por lo tanto es preciso notar sobre todo que la raíz, el cuadrado, el cubo, etc., no son otra cosa que magnitudes en proporción continua, a la que siempre se supone antepuesta aquella unidad asumida [...]; a esta unidad hace referencia inmediatamente la primera proporcional y por medio de una única relación; la segunda, por su parte, por medio de la primera y por lo tanto por medio de dos relaciones; la tercera, mediante la primera y la segunda, y por medio de tres relaciones, etc. Llamaremos, pues, en lo sucesivo, primera proporcional a aquella magnitud que en Álgebra es denominada raíz, segunda proporcional a la que es llamada cuadrado y así las restantes.»

Como en muchas otras cuestiones lo que Descartes aventura en las *Regulae* lo consolida en *El Discurso del Método* o en *La Geometría*, como es el caso. En la notación cartesiana introducida en este tercer epígrafe del Libro I de *La Geometría* hay una clave geométrica que estriba en que un segmento de recta es considerado tanto como magnitud geométrica continua como una medida numérica, pero la potencia de una línea recta sigue siendo una línea recta, así que cuadrado y cubo no indicarán magnitudes planas o espaciales, sino la segunda o tercera potencia de un número, de modo que las operaciones aritméticas quedan incluidas en un terreno estrictamente algebraico. En este punto, Descartes rompe con la tradición griega al abandonar el principio de homogeneidad. *La Geometría* da carta de naturaleza a las potencias superiores a^4 , a^5 , a^6 ,..., todas ellas son legítimas líneas. De esta forma se produce una cierta unificación del Álgebra y la Geometría. Descartes habría alcanzado lo que se había propuesto en *El Discurso del Método*, ya aludido anteriormente:

«Había estudiado [...] el Análisis de los antiguos y el Álgebra de los modernos, [...], el primero está siempre tan constreñido a considerar las figuras, que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación, y en la última hay que sujetarse tanto a ciertas reglas y cifras, que se ha hecho un arte confuso y oscuro, [...]. Esto fue causa de que pensase que era necesario buscar algún otro método que, reuniendo las ventajas de estos tres, estuviese libre de sus defectos. [...] pensé que, para considerarlas mejor particularmente, debía suponerlas en línea [recta], pues nada hallaba más simple ni que más distintamente pudiera representarse a mi imaginación y a mis sentidos. Y que para retenerlas o comprenderlas era necesario explicarlas mediante algunas cifras lo más cortas que fuera posible; de esta manera tomaría lo mejor del Análisis geométrico y del Álgebra y corregiría los defectos del uno por medio de la otra» (DM.AT,VI, 17-20).

Con sus radicales reformas, Descartes habría superado la esclavitud a la dependencia de las figuras en la Geometría de los antiguos y la falta de transparencia del Álgebra de los modernos. Por si fuera poco, Descartes eliminaba otra limitación de la Geometría griega y del *Arte Analítica* de Vieta, la de las tres dimensiones.

LA NOTACIÓN MATEMÁTICA CARTESIANA



1. Retrato de Descartes por Weenix. Museo de Utrecht.
2. La edición en latín de 1649 de van Schooten (con notas de F. De Beaune) de *La Geometría* de Descartes. Esta edición es la primera separada de *El Discurso del Método* y contribuyó de forma muy considerable a la difusión de la obra de Descartes.

La notación que Descartes introduce en la Regla XVI de las *Regulae* y perfecciona al comienzo de *La Geometría* tuvo un papel esencial en su magno proyecto de reforma que alcanzó a una completa reconstrucción de la Matemática sobre premisas muy sencillas, no geométricas como en Euclides, sino algebraicas, y con unos instrumentos muy modestos, sólo el *Teorema de Tales* y el *Teorema Pitágoras*, como confiesa a dos de sus pupilas, la reina Cristina de Suecia y la Princesa Isabel de Bohemia.

Descartes alude una y otra vez en las *Regulae* y en *La Geometría* a la función que debe cumplir una buena notación, simple y clara, formada de «signos muy breves»: «ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación» (DM.AT,VI, 17-18), para no distraer el pensamiento en retener cosas, a base de descargar la memoria por medio de la escritura para sólo confiarle lo imprescindible (RXVI.AT.X.458):

«De modo general es preciso observar que jamás debe encomendarse a la memoria ninguna de las cosas que no requieran una continuada atención, si podemos depositarlas en el papel, no sea que un recuerdo superfluo para el conocimiento de un objeto nos prive de alguna parte de nuestro espíritu.»

El simbolismo algebraico, que apuntaba a convertirse en el lenguaje universal traería simplificación, generalización, mecanización y unificación en la notación, entrañando economía de pensamiento y difusión rápida. Después de Descartes, el Álgebra es uno de los más potentes lenguajes creados por el hombre, un instrumento para la expresión breve, intuitiva y mecánica de relaciones enormemente complicadas que puedan tener entre sí objetos abstractos cualesquiera, y en su aplicación a la Geometría, el ingenio que exigía la lectura y comprensión de la obra de Euclides quedaría eliminado y reemplazado por procedimientos algorítmicos automáticos.

Aparte de su ingente contribución al nacimiento de la Geometría Analítica, a Descartes le cabe, pues, el mérito de haber dado los pasos más importantes en la introducción de la moderna notación simbólica de las Matemáticas, de modo que el convenio notacional cartesiano se hizo definitivo. La Geometría, es el primer texto matemático en el que un estudiante actual no encontraría dificultades con la notación.

Análisis y Síntesis: planteamiento y resolución de las ecuaciones

Con las nuevas notaciones y símbolos, Descartes realizó una importante simplificación en el lenguaje matemático. Ahora disponía de una Geometría que al poderse expresar de forma algebraica permitía desarrollar procedimientos para resolver problemas geométricos a base de traducirlos al lenguaje algebraico de las ecuaciones, simplificar éstas y finalmente resolverlas (lo que quiere decir construir las soluciones) mediante lo cual Descartes se propondrá rehacer la Geometría.

Cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas

«Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya resuelto, y dar nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las que son desconocidas como a las otras. Luego, sin considerar ninguna diferencia entre estas líneas conocidas y desconocidas, se debe examinar la dificultad según el orden que se presente como más natural de todos, en la forma como aquellas líneas dependen mutuamente las unas de las otras, hasta que se haya encontrado la manera de expresar una misma cantidad de dos maneras: lo que se denomina una ecuación, pues [el resultado de] los términos de una de esas dos formas son iguales a los de la otra.» (G.AT,VI,372).

He aquí una aplicación directa de los procedimientos del *Análisis* y la *Síntesis* tal como los había descrito Pappus en *El Tesoro del Análisis* del Libro VII de la *Colección Matemática* y tal como lo había aplicado Vieta con la intervención del Álgebra en su *Arte Analítica*. Todo conduce a determinar la ecuación del problema geométrico, es decir, transitar de la Geometría al Álgebra mediante la metodología cartesiana, siguiendo unas pautas que Descartes ya había insinuado en las Reglas XVII–XXI de las *Regulae* :

- a) Suponer el problema resuelto.
- b) Dar nombre a todos los segmentos que parecen necesarios.

El propio *Análisis* nos ayudará a determinar quiénes son éstos, tanto los conocidos (datos) como los desconocidos (incógnitas) sin considerar ninguna diferencia entre ellos.

Estos dos primeros pasos corresponden al *Análisis* en sentido de Pappus. Ahora examinando el problema, siguiendo un orden basado en la intuición o en el *Análisis* anterior, estableciendo las relaciones que existen entre las diversas segmentos –los conocidos y los desconocidos– hemos de conseguir expresar un mismo segmento por medio de dos expresiones algebraicas diferentes, lo que permite realizar la *Síntesis*, es decir:

- c) Determinar la ecuación entre las longitudes conocidas y las desconocidas.

Finalmente para resolver de forma definitiva el problema quedan dos pasos:

- d) Resolver la ecuación resultante.
- e) Construir geoméricamente la solución.

Al plantearse problemas geométricos en la *Síntesis* se han de obtener soluciones geométricas para cuya construcción el Álgebra será el instrumento analítico esencial.

Así pues, ante un problema geométrico se aplicará todo un protocolo de actuación –el método cartesiano–: se empieza suponiendo el problema resuelto y se consideran las relaciones entre las líneas, lo que lleva al establecimiento de las ecuaciones, es decir, el estudio analítico se complementa con la síntesis algebraica que lleva a la construcción de la solución. El *Análisis* y el Álgebra que están ordenados al estudio y conocimiento de la figura, permiten traducir los datos geométricos de forma que sean tratables por medio del cálculo algebraico; se concluye el problema de Álgebra planteando y resolviendo las ecuaciones y finalmente los resultados obtenidos deben ser traducidos de nuevo al lenguaje geométrico, operación que nos da por fin la construcción de la solución. El Álgebra es un instrumento

que finalmente nos ha de reconducir a la Geometría.

Continúa el texto de Descartes con la primera manifestación irónica de las diversas presentes en *La Geometría* (G.AT,VI, 374):

«[...] Y pueden siempre reducirse así todas las cantidades desconocidas a una sola, cuando el problema puede construirse mediante círculos y líneas rectas, o bien por secciones cónicas o aun por ninguna otra línea que no esté compuesta, sino en uno o dos grados más. Pero no me detengo a explicar esto con más detalle para no privar a cada uno del placer de aprenderlo por sí mismo, ni impedir el cultivo útil del propio espíritu ejercitándolo, que es, a mi parecer, la principal utilidad que puede obtenerse de esta ciencia, [...]»

Enseguida Descartes realiza una caracterización algebraica de los *Problemas Planos*:

Cuáles son los problemas planos.

«Si éste puede ser resuelto por la geometría ordinaria, es decir, sin servirse más que de líneas rectas y circulares trazadas sobre una superficie plana, cuando la última ecuación haya sido enteramente desarrollada, no quedará, al fin, más que un cuadrado desconocido, igual a lo que resulta de la adición, o sustracción, de su raíz multiplicada por alguna cantidad conocida [coeficiente], más alguna otra cantidad también conocida [término independiente]» (G.AT,VI, 374).

Descartes establece aquí una primera relación entre los problemas de construcción y los de clasificación (que tanta importancia tendrá en el Libro II) relacionando claramente un tipo concreto de expresiones algebraicas con los instrumentos que permiten trazar determinadas construcciones. En una primera transferencia de la Geometría al Álgebra, si un problema geométrico lleva a una ecuación cuadrática, será resoluble con regla y compás, pero Descartes trasciende esta obviedad, identificando totalmente una cuestión geométrica con una cuestión algebraica al establecer que cualquier problema geométrico resoluble con regla y compás conduce a una última ecuación que necesariamente es cuadrática.

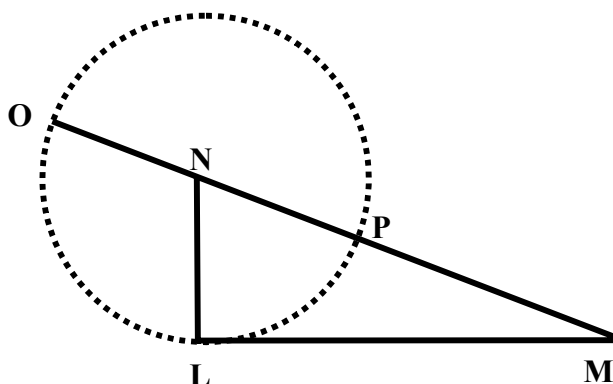
Vamos a ver concretamente cómo resuelve Descartes las ecuaciones cuadráticas que corresponden a los *Problemas Planos* y que son las únicas que Descartes trata en el Libro I.

Cómo se resuelven [las ecuaciones que resultan de los problemas Planos]

(G.AT,VI, 374-376)

«[...] Si se tiene, por ejemplo $z^2 = az + bb$ construyo el triángulo rectángulo NLM, cuyo lado LM es igual a b , raíz cuadrada de la cantidad conocida bb , y el otro LN es $\frac{1}{2}a$, la mitad de la otra cantidad conocida, que está multiplicada por z , que supongo ser la línea desconocida. Luego, prolongando MN, base de ese triángulo, hasta O, de modo que NO sea igual a NL, la línea total OM es z , la línea buscada; ella se expresa:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$



Si se tuviera

$$yy = -ay + bb$$

e y fuera la cantidad que debe encontrarse, se construye el mismo triángulo rectángulo NLM y de la base MN se quita NP, igual a NL; el resto PM es y, la raíz buscada. De modo que tengo

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

Y lo mismo, si tuviera $x^4 = -ax^2 + b^2$

PM sería x^2 y tendría

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$$

y así otros casos.

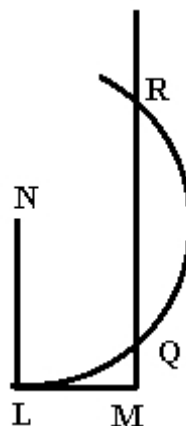
En fin, si tuviera $z^2 = ax - bb$

se hace NL igual a $\frac{1}{2}a$, y LM igual a b, como anteriormente;

luego, en vez de unir los puntos M y N, se traza MQR paralela a LN y trazando un círculo con centro en N y que pase por L la cortará en los puntos Q y R; la línea buscada z es MQ, o bien MR, pues en este caso ella se expresa de dos maneras, a saber:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$



Y si el círculo que tiene su centro en N y pasa por el punto L no corta ni toca la línea recta MQR, no hay ninguna raíz de la ecuación, de manera que puede asegurarse que la construcción del problema propuesto es imposible.

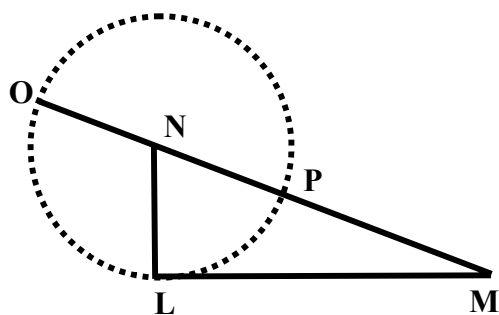
Por otra parte, estas mismas raíces se pueden encontrar por una infinidad de otros medios y he indicado aquí solamente esos muy simples, a fin de mostrar que se pueden construir todos los problemas de la geometría ordinaria, sin hacer más que lo poco que está comprendido en las cuatro figuras que he explicado. No creo que los antiguos lo hayan observado; pues en tal caso ellos no hubieran escrito libros tan voluminosos en que el solo orden de las proposiciones nos muestra que no poseían el verdadero método para resolverlas todas, sino que solamente han recopilado las que habían resuelto.»

Situándose en la tradición, Descartes estudia y resuelve los tres tipos clásicos de ecuaciones $z^2=az+bb$, $yy= -ay+bb$, $z^2=ax-bb$, que, como se sabe, antes de Vieta, eran considerados con coeficientes numéricos concretos y positivos, resultando equivalentes a los tres tipos tradicionales de ecuaciones: $z^2=az+b$, $z^2+az=b$, $z^2+b=az$, con a,b positivos, que en el *Álgebra Geométrica* griega tenían su forma particular de resolución, como tenían, asimismo, en la matemática árabe, cada uno de los tipos, su propio algoritmo de resolución. Pues bien, ahora Descartes, manteniendo por esta vez la homogeneidad, nos brinda la resolución geométrica de cada uno de los casos posibles. Para cada caso, siguiendo el algoritmo algebraico de resolución bien conocido, podríamos obtener el valor del segmento solución z expresado por las correspondientes operaciones con radicales, de donde se advierte que todas las operaciones que intervienen son resolubles, a partir de los segmentos dados, a,b, utilizando sólo la regla y el compás. No obstante, Descartes procede de forma

geométrica construyendo para cada caso el segmento solución, por eso no puede considerar todos los tipos de ecuaciones cuadráticas (por ejemplo no estudia la ecuación $z^2+az+b^2=0$ porque no tiene raíces positivas), y de las que resuelve sólo tiene en cuenta las soluciones positivas que son las únicas construybles.

Por otra parte, Descartes dice que «estas mismas raíces se pueden encontrar por una infinidad de otros medios». Y la verdad es que no especifica exactamente cómo obtiene la construcción geométrica del segmento solución si aplicando el *Teorema de Pitágoras* o la invariancia de la potencia de un punto respecto de la circunferencia. La equivalencia de ambas aplicaciones deja la construcción geométrica cartesiana en cierta ambigüedad.

Así en la primera ecuación $z^2=az+bb$, Descartes procede geoméricamente indicando cómo puede construir el segmento de longitud z . Construye un triángulo rectángulo NLM cuyos



catetos están determinados por los coeficientes de la ecuación: $LM=b$, $LN=(1/2)a$ y con centro en N traza una circunferencia de radio $NL=a$ que es cortada por la prolongación de la hipotenusa MN en el punto O, resultando que el segmento OM es la recta buscada z .

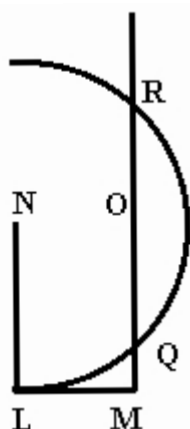
En efecto: $MO=MN+NO$. Pero por el Teorema de Pitágoras $MN = \sqrt{NL^2 + LM^2}$, de modo que sustituyendo cada recta por su longitud

tenemos la expresión algebraica indicada: $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Ahora bien, aplicando la invariancia de la potencia de un punto respecto de la circunferencia (*Euclides*, III.36) se tiene: $MO \cdot MP = ML^2$, es decir, $z \cdot (z-a) = bb$, expresión equivalente a la ecuación dada $z^2=az+bb$.

La construcción geométrica de la solución de la última ecuación $z^2=az-bb$ es un poco más complicada.

Construidos de los elementos geométricos de la figura como indica Descartes, a partir de los segmentos medidos por los coeficientes de la ecuación $NL=(1/2)a$ y $LM=b$, se aplica la invariancia de la potencia de un punto respecto de la circunferencia: $MR \cdot MQ = LM^2$.



Si $z=MR$, tenemos que $MQ=a-z$, y por tanto: $z \cdot (a-z) = b^2$, es decir, $z^2=az-bb$, por tanto el segmento $z=MR$ es una línea solución.

Si $z=MQ$, tenemos que $MR=a-z$, y por tanto: $z \cdot (a-z) = b^2$, es decir, $z^2=az-bb$, por tanto el segmento $z=MR$ es una línea solución.

Ahora si O es el punto medio de QR tenemos:

$$z_1 = MQ = OM - OQ = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

$$z_2 = MR = MO + OR = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

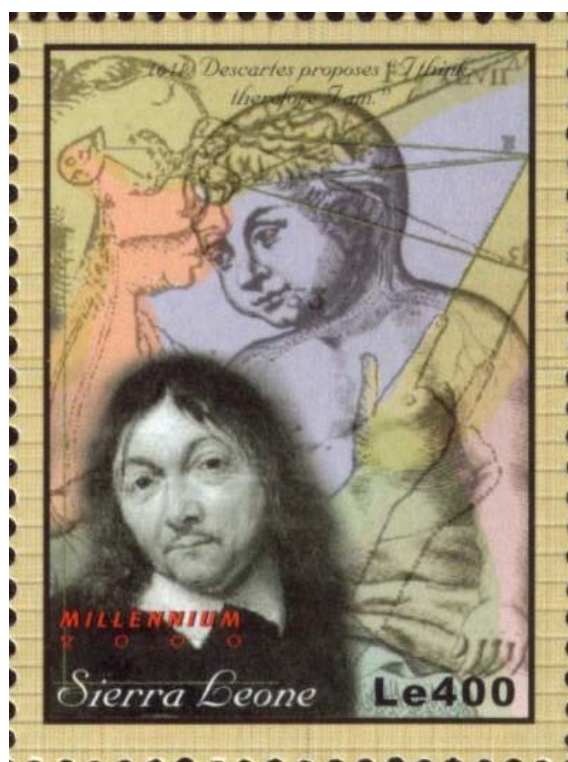
Descartes construye las dos raíces porque ambas son positivas.

Si MR es tangente al círculo, es decir si $b=(1/2)a$, las raíces son iguales; mientras que si $b > (1/2)a$, la línea MR no cortará al círculo y entonces no hay raíces. Descartes expresa esto en un lenguaje tributario todavía de los geómetras griegos:

«Y si el círculo que tiene su centro en N y pasa por el punto L no corta [no es secante] ni toca [no es tangente] la línea recta MQR, no hay ninguna raíz de la ecuación, de manera que puede asegurarse que la construcción del problema propuesto es imposible.»

Vemos cómo Descartes ha vinculado íntimamente el Álgebra con la Geometría, hasta el punto de extraer conclusiones geométricas de un hecho estrictamente algebraico: si la ecuación no tiene solución el problema geométrico no se puede construir, porque «*encontrar la solución*» es «*construir la línea*». Los principios del método cartesiano aplicados a la Geometría inician los problemas geométricos por un proceso intermedio de escritura algebraica que revierte finalmente sobre la geometría del problema conduciendo a la construcción de la línea solución. Es esta intermediación del Álgebra lo que más se echa de menos en la Geometría griega, por eso después de la resolución constructiva de las ecuaciones, Descartes hace un soberbio alarde de la magnificencia de los métodos de su *Geometría* en contraposición con la precariedad de la Geometría de los griegos. Según él, puede construir todos los problemas de la Geometría ordinaria con las escasas cuatro figuras que ha explicado, mientras que el abstruso orden de las complejas proposiciones de los voluminosos libros de la Geometría griega era una prueba palmaria de que los antiguos no disponían de método. Esta afirmación, además de exagerada, es injusta, porque aunque la Geometría griega no pudo disponer de la claridad, simplicidad, flexibilidad, versatilidad y capacidad algorítmica que proporciona el Álgebra simbólica que manejó Descartes, éste estaba al corriente de las grandes obras de la matemática griega, empezando por *Los Elementos* de Euclides, que es una obra indiscutiblemente metódica, con fundamentos en el método axiomático-deductivo muy diferente del de Descartes, pero tanto o más riguroso que lo que se aplica en *La Geometría*. De hecho la *Aplicación de las Áreas* del Álgebra Geométrica griega de los Libros II y VI de *Los Elementos* de Euclides es un procedimiento metódico de resolución de ecuaciones mediante comparación de áreas. Es más, el método cartesiano tiene su inspiración en el método de *Análisis* y *Síntesis*, que instaurado por Hipócrates de Quíos y fundamentado por Platón es explicitado por Pappus, uno de los matemáticos griegos más admirados por Descartes.

SELLOS DE DESCARTES EN EL AÑO 2000 DE LAS MATEMÁTICAS



1. Emitido en Granada con motivo del año 2000 de las Matemáticas.
2. Emitido en Sierra Leona con motivo del año 2000 de las Matemáticas.

SÍNTESIS DEL PROGRAMA DE REFORMA CARTESIANA DE LA GEOMETRÍA A TRAVÉS DE LOS TEXTOS DE DESCARTES



Retrato de Descartes como escritor (Biblioteca Nacional de París, 1791).

Ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación (DM.AT,VI, 17)

- Fundir del Análisis Geométrico de los antiguos («siempre tan constreñido a considerar las figuras») [DM.AT,VI.17] y el Álgebra de los modernos («que se ha hecho un arte confuso y oscuro» [DM.AT,VI.17]); «para buscar otro método que, reuniendo las ventajas de éstos, estuviese libre de sus defectos» [DM.AT,VI.18].
- Introducir las coordenadas: «Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos» [G.AT,VI, 369].
- Reconstruir de forma geométrico-algebraica las operaciones aritméticas, es decir, mostrar «cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de la geometría» [G.AT,VI, 369].
- Introducir una revolucionaria simplificación en la notación: «explicarlas mediante algunas cifras lo más cortas que fuera posible» [DM.AT,VI,20].
- Indicar «cómo pueden emplearse letras en geometría» [G.AT,VI,371].
- Enseñar «cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas» [G.AT,VI,372]; y «cómo se resuelven» [G.AT,VI,374] estas ecuaciones (es decir, cómo se construyen las soluciones).

Mediante estas tareas, Descartes «tomaría lo mejor del Análisis geométrico y del Álgebra y corregiría los defectos del uno por medio de la otra» [DM.AT,VI, 20].

Sistemas de referencia. El Problema de Pappus

Hasta aquí, Descartes ha elaborado un potente método analítico-sintético de ataque de los problemas geométricos que utiliza el Álgebra como instrumento algorítmico y con el que se propone no sólo rehacer la Geometría griega sino ir mucho más allá en la resolución de antiguos y nuevos problemas geométricos. Por eso se plantea al final del Libro I el abordaje del famoso *problema de Pappus de las tres o cuatro rectas*, que tan firmemente se había resistido a los geómetras griegos, y que siendo generalizado a $2n-1$, $2n$ rectas campea a lo largo de *La Geometría* de Descartes, de modo que algunos historiadores se atreven a decir que «*Toda La Geometría de Descartes está destinada a la resolución del Problema de Pappus*» o que «*El Problema de Pappus conforma La Geometría de Descartes*».

La profundidad, extensión e inmensa casuística del tratamiento cartesiano del *Problema de Pappus* trasciende de los objetivos de este escrito, por tanto nos ceñiremos a aspectos que incidan sobre los orígenes de la Geometría Analítica, en particular la aparición de los sistemas de referencia y las coordenadas.

Ejemplo tomado de Pappus

(G.AT,VI, 377-380)

«Y esto [la insuficiencia de los métodos de la Geometría griega] puede verse bien claramente en lo que Pappus ha puesto al principio de su Libro VII, donde después de haberse detenido a citar todo lo que había sido escrito en geometría por los que lo habían precedido, habla finalmente de un problema que, según dice, ni Euclides ni Apolonio habían podido resolver enteramente; he aquí sus propias palabras: [...]»

Descartes transcribe el enunciado del problema en latín y hace una observación:

«Os ruego que observéis de paso que el escrúpulo que tenían los antiguos en emplear los términos de la aritmética en la geometría, no podía provenir más que de no ver ellos claramente su relación, lo que producía bastante oscuridad y confusión en la forma como se expresaban; [sigue el texto latino].»

Descartes no alcanza a interpretar que los escrúpulos de los que habla respondían a la conformación que dio a la Geometría griega la aparición de las magnitudes inconmensurables que impedía asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes, áreas y volúmenes y por tanto los griegos tenían que calcular directamente con las figuras, que se trataban como magnitudes. Así se hacía en el *Álgebra Geométrica* del Libro II de *Los Elementos* de Euclides en la que los números se sustituyen por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo mediante construcciones geométricas pero sin el concurso de Álgebra simbólica porque era inexistente, por lo que las ecuaciones se resolvían estableciendo relaciones que comparaban —a partir del Libro V de *Los Elementos* de Euclides mediante razones— áreas dadas con áreas buscadas o deseadas para la resolución de un problema. En la Geometría griega, los segmentos rectilíneos no tenían longitud ante la eventualidad de la inconmensurabilidad y como consecuencia las «operaciones» con los segmentos daban rectángulos y paralelepípedos, que eran objetos de naturaleza estrictamente geométrica imposibles de confundir con el producto de las longitudes de sus lados, ya que, hasta Diofanto, estaba ausente el sentido aritmético de las operaciones. De ahí las limitaciones del respeto a la homogeneidad y de la acotación tridimensional.

La gran innovación de Descartes es la asignación de una longitud a los segmentos («y yo no temeré introducir estos términos de aritmética en la geometría, a fin de hacerme más inteligible») lo que permite su manipulación algebraica operacional:

«[...] es de señalar que para a^2 o b^3 u otras expresiones semejantes, yo no concibo ordinariamente mas que líneas simples, aunque para servirme de los nombres usados en álgebra, los designe por cuadrados, cubos, etc.» (G.AT,VI, 371),

con base en lo cual Descartes no tiene ningún prejuicio geométrico en hablar en el *Problema de Pappus* del «producto de cuatro líneas rectas, de cinco o de más», es decir, el instrumental cartesiano no sólo permitirá resolver de forma brillante el problema clásico, sino que además propicia su más amplia generalización.

Continúa Descartes escribiendo su propio enunciado del *Problema de Pappus*:

«Así pues, la cuestión que Euclides había empezado a resolver y que Apolonio había proseguido sin que nadie la hubiera terminado, era ésta: Dadas tres, cuatro o más rectas, se trata de encontrar un punto del que se puedan trazar otras tantas líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, y haciendo con ellas ángulos dados, y que el rectángulo formado por dos de esas así trazadas desde el punto, tenga una proporción dada con el cuadrado de la tercera, si no hay más que tres; o bien con el rectángulo de las otras dos, si hubiera cuatro; o bien si hay cinco que el paralelepípedo compuesto por tres tenga la proporción dada con el paralelepípedo formado por las dos que restan y por otra línea dada. O bien si hay seis, que el paralelepípedo formado por tres tenga una proporción dada con el paralelepípedo de las otras tres. O bien si hay siete, que lo que se produce multiplicando cuatro la una por la otra, tenga la razón dada con lo que se produce por la multiplicación de las otras tres y además por otra línea dada. O si hay ocho, que el producto de la multiplicación de cuatro tenga la proporción dada con el producto de las otras cuatro. Y así este problema se puede extender a todo número de líneas. Pero, a causa de que hay siempre una infinidad de diversos puntos que pueden satisfacer lo que aquí se pide, se requiere también conocer y trazar la línea sobre la cual deben todos ellos encontrarse; y Pappus dice que cuando no hay más que tres o cuatro líneas rectas dadas, es en una de las tres secciones cónicas, pero él no trata de determinarla ni describirla; ni explicar la línea en que los puntos deben encontrarse cuando el problema está propuesto para un mayor número de líneas. Solamente agrega que los antiguos habían imaginado una, que mostraban ser útil [para la resolución del problema], y aunque parecía la más manifiesta, sin embargo no era la primera. Lo que me ha dado ocasión para ensayar si, por el método de que me valgo, se puede ir tan lejos como ellos fueron.»

Respuesta al problema de Pappus

(G.AT,VI, 380-382)

«He comprendido ante todo, que planteado el problema para tres, cuatro o cinco líneas, se puede siempre encontrar los puntos buscados, por la geometría simple, es decir sin servirse más que de la regla y el compás, ni hacer otra cosa que lo ya dicho; excepto solamente cuando, siendo cinco las líneas, ellas son todas paralelas. ...

.....

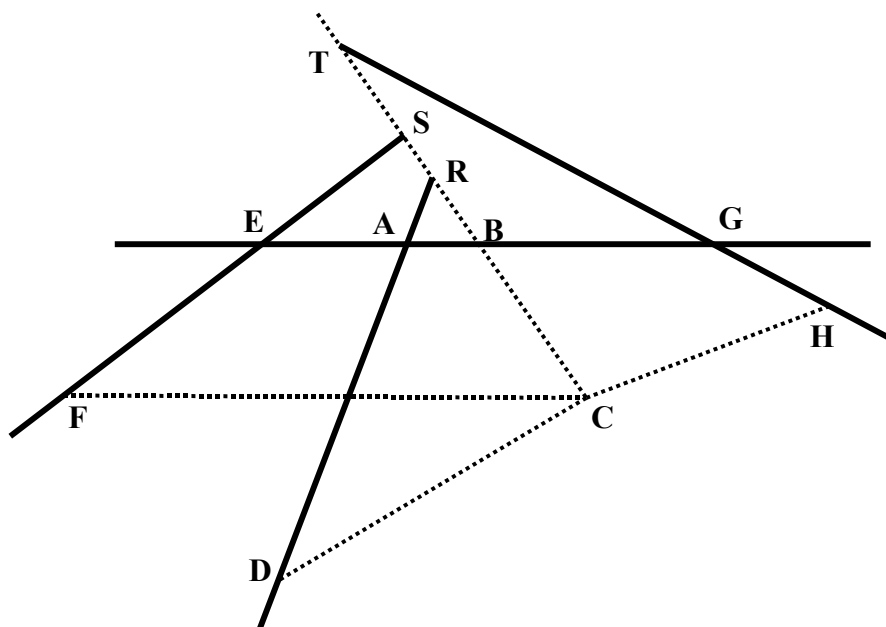
Y he encontrado que cuando no hay más que tres o cuatro líneas dadas, los puntos buscados se encuentran todos no solamente en una de las tres cónicas sino a veces en la circunferencia de un círculo o en una línea recta. ...

.....

De modo que pienso haber satisfecho enteramente lo que Pappus nos dice haber sido buscado por los antiguos, trataré de dar la demostración en pocas palabras: pues ya me cansa tanto escribir.

Cómo deben ponerse los términos para llegar a la ecuación de este ejemplo

«Primeramente yo supongo la cosa como ya hecha y para salir de la confusión de todas esas líneas, considero una de las dadas y una de las que hay que encontrar, por ejemplo AB y CB como las principales y a las cuales trato de referir todas las otras. Sea designado x el segmento de la línea AB comprendido entre los puntos A y B; y CB sea designado y; y todas las demás líneas se prolonguen hasta que corten a estas dos también prolongadas, si es necesario y si no le son paralelas; como se ve cortan la línea AB en los puntos A, E, G y la línea BC en los puntos R, S, T.»



- se supone el problema resuelto,
- se da nombre a todos los segmentos necesarios para representarlos, tanto los conocidos como los desconocidos,
- se reconstruye algebraicamente el problema hasta obtener una ecuación que permitirá alcanzar la síntesis.

«[...] Considero una de las dadas y una de las que hay que encontrar, por ejemplo AB y CB como las principales y a las cuales trato de referir todas las otras.»

Los segmentos $x = \overline{AB}$, $y = \overline{CD}$ son las «coordenadas» del punto C en el sistema de referencia establecido.

A continuación del texto (G.AT,VI, 383-385), Descartes utiliza el sistema de referencia introducido para obtener, mediante una serie de cálculos elementales aunque prolijos, la expresión de cada uno de los segmentos que dan las distancias (CB, CD, CF, CH). Resultan ser todas ellas ser combinaciones afines (diríamos hoy) de «las coordenadas» (x,y) del punto C, es decir, de la forma $Ax+By+C$, donde A, B, C, son cantidades no nulas, salvo cuando hay relaciones de paralelismo:

«Se ve así que cualquiera que sea el número de líneas dadas, todas las líneas trazadas desde C, que forman ángulos dados, conforme al enunciado, se pueden siempre expresar, cada una por tres términos de los que uno está compuesto por la cantidad desconocida y multiplicada o dividida por alguna otra conocida, y la otra, de la cantidad desconocida x, también multiplicada o dividida por alguna otra conocida y la tercera, de una cantidad toda conocida.

Además se ve que multiplicando varias de estas líneas entre sí, las cantidades x e y que se encuentran en el producto, no pueden tener cada una más que tantas dimensiones como líneas haya.»

Así pues, aunque Descartes no lo explicita, en el caso de tres o cuatro rectas el problema equivaldría a una ecuación cuadrática de la forma: $Ax^2+Bxy+Cy^2+dx+ey+f=0$. De esta forma aparecerían por primera vez las curvas como lugares geométricos definidos por ecuaciones, en el umbral del Libro II de *La Geometría*.

Utilizando métodos de la Geometría Analítica moderna, en particular la forma normal de la ecuación de la recta, podemos resolver fácilmente el problema de tres líneas, por ejemplo, encontrando que el lugar geométrico es una cónica. Sean $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$, $a_3x+b_3y+c_3=0$ las ecuaciones de las rectas, y α_1 , α_2 , α_3 , los ángulos que dan las direcciones sobre las que se deben medir las distancias. El lugar geométrico del punto C(x,y) viene dado por la ecuación:

$$\frac{(a_1x+b_1y+c_1)^2}{(a_1^2+b_1^2)\text{sen}^2\alpha_1} = K \frac{(a_2x+b_2y+c_2)^2}{\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}\text{sen}\alpha_2} \cdot \frac{(a_3x+b_3y+c_3)^2}{\sqrt{(a_3^2+b_3^2)}\text{sen}\alpha_3}$$

Sigue el texto de Descartes demostrando que si lo que buscamos es un solo punto (para el problema de menos de cinco rectas) el problema es plano, ya casi al final del Libro I:

Cómo se encuentra que este problema es plano cuando no está propuesto para más de cinco líneas

(G.AT,VI, 385-387)

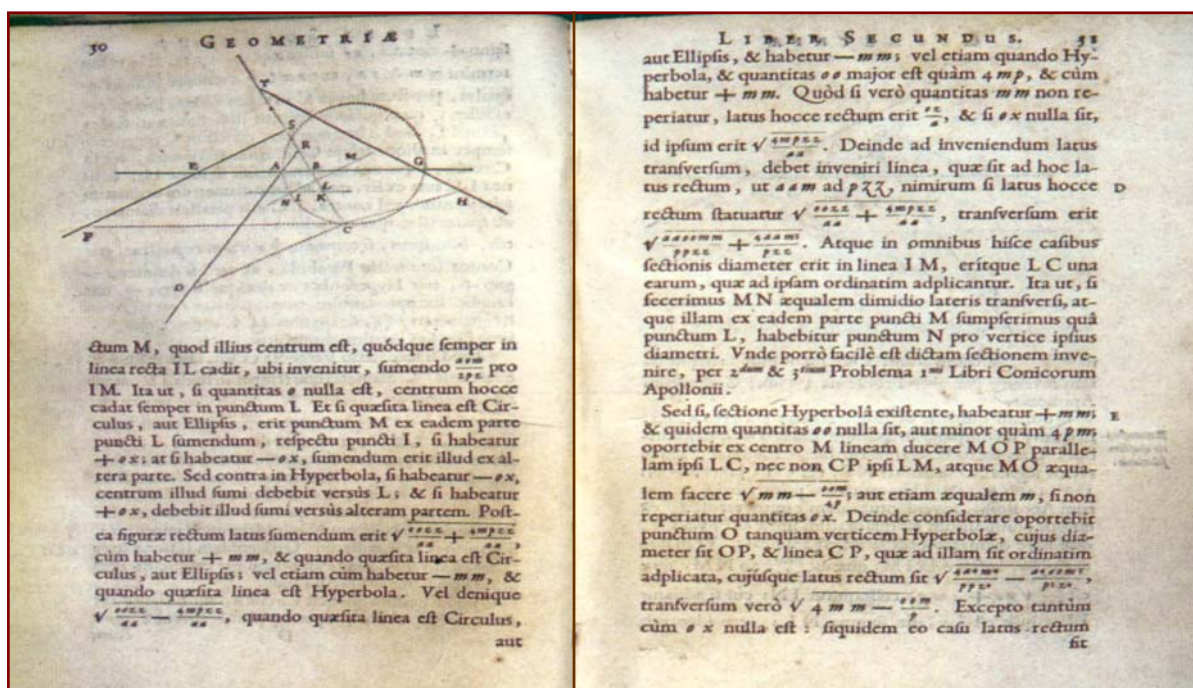
«Además, a causa de que para determinar el punto C no hay más que una sola condición requerida [la de la igualdad de las multiplicaciones de líneas], puede tomarse a discreción una de estas cantidades desconocidas x o y, y buscar la otra por la ecuación, en la cual es evidente que cuando el problema no está propuesto para más de cinco líneas, la cantidad x que no es utilizada para la expresión de la primera de las líneas nunca puede tener más de dos dimensiones. De modo que tomando y como una cantidad conocida tendremos

$$xx = +o - ax + o - bb \quad [x^2 = \pm ax \pm b^2]$$

y así se podrá encontrar la cantidad x con la regla y el compás de la manera ya explicada. Lo mismo tomando sucesivamente infinitos valores para la línea y , podemos hallar otros tantos para la línea x ; y así se tendrá una infinidad de diversos puntos tales como el que se ha señalado con C , por medio de los cuales se describirá la línea curva pedida.»

Nuevamente debemos señalar aquí otro de los puntos de mayor interés, para nosotros, de *La Geometría* de Descartes: una aproximación al concepto de función a través de la expresión analítica de una ecuación. Por ejemplo para cuatro rectas la consideración de las coordenadas del punto $C=(x,y)$, nos lleva a una ecuación polinómica de segundo grado $F(x,y)=0$, que representa una infinidad de pares (x,y) que satisfacen el problema de las cuatro rectas. Tal ecuación es una expresión matemática bien definida que depende de dos variables x , y , de modo que conociendo una de ellas se puede hallar rigurosamente la otra (tras la resolución algebraica de una ecuación de lo que Descartes se ocupará, en el Libro III de *La Geometría*, para grados superiores), lo que equivale a la determinación geométrica del punto C . Así pues, el conocimiento de la ecuación permite conocer los puntos de la curva. Todavía no hay una identificación de la curva con la ecuación, Descartes sólo ha introducido el concepto de curva definida por puntos y esperará al Libro II de *La Geometría* para estudiar ampliamente el problema y establecer cuáles son las razones geométricas que permiten considerar una expresión como una representación de una curva.

EL PROBLEMA DE PAPPUS



El Problema de Pappus. Edición latina de van Schooten de *La Geometría* de Descartes, 1659.

El Problema de Pappus -llamado en su enunciado más sencillo lugar de tres o cuatro rectas-, es una de las cuestiones más importantes de toda la Historia de la Geometría, por ser la piedra de toque de aplicación de los diversos métodos y técnicas geométricas. Planteado por los geómetras griegos a partir de Euclides, estudiado por Apolonio y Pappus, su dificultad desbordaba, siglo tras siglo, las posibilidades del Análisis geométrico griego. Campeando a lo largo de *La Geometría*, como si fuera su punto de inspiración, casi como un reto a alcanzar, será Descartes quien lo resuelva de forma brillante y general poniendo de manifiesto la potencia de unos métodos analíticos, que en el curso de los años se convertirán en la esencia de la Geometría Analítica.

Las rectas normales a una curva. El Método del círculo

Descartes desarrolla en el Libro II de La Geometría (G.AT,VI, 412-423) un método para el trazado de las tangentes a las líneas curvas —el llamado «*método del círculo*»—, mediante la construcción previa de la recta normal. Es sin duda uno de los más significativos problemas de aplicación del método cartesiano, con el que, además, Descartes participa e interviene, a través de su celebre polémica con Fermat, en el ámbito matemático de la primera parte del siglo XVII, muy ocupado en la resolución del problema del trazado de las tangentes a las líneas curvas.

Una vez concebida y definida en la primera parte del Libro II, de forma clara y distinta, *la naturaleza geométrica de las líneas curvas*, Descartes introduce uno de los principios básicos de su método ponderando su importancia en la resolución de los problemas sobre curvas:

Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, y la manera de trazar otras líneas que las corten en todos esos puntos en ángulo recto.

(G.AT,VI, 412-413)

«Luego con sólo saber la relación que tienen todos los puntos de una línea curva con todos los de una línea recta, en la forma que he explicado, es fácil también conocer la relación que ellos tienen con todos los otros puntos y líneas dadas; y, por lo tanto, conocer los diámetros, los ejes, los centros, y otras líneas o puntos que tengan con la línea curva alguna relación particular, o más simple que otros; y, de ahí imaginar diversos modos de describirlas, y elegir los más fáciles. Y también, con sólo esto, se puede aun, encontrar casi todo lo que puede ser determinado respecto a la medida del espacio que abarcan, sin que haya necesidad de que yo me extienda más. Y, por último, en lo que respecta a todas las otras propiedades que pueden atribuirse a las líneas curvas, ellas no dependen más que de la magnitud de los ángulos que ellas forman con otras líneas. Pero, cuando puedan trazarse líneas rectas que las cortan en ángulo recto [normales], en los puntos en que se encuentran con aquéllas con las que forman los ángulos que se quieren medir, o, lo que aquí tomo como igual, en que ellas cortan sus contingentes [tangentes], la magnitud de esos ángulos no es más difícil de encontrar que si ellos estuvieran comprendidos entre dos líneas rectas. Creo por esto haber dado aquí todo lo que se requiere para los elementos de la líneas curvas, cuando haya expuesto la manera general de trazar líneas rectas que las corten en ángulos rectos en los puntos [de las curvas] que de ellas se elijan. Y me atrevo a decir que éste es el problema más útil y más general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría.»

Descartes determina que «*para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas*», descrita por medio de una expresión —que es la ecuación de la curva—, y establece cómo se puede utilizar esta expresión algebraica para encontrar los elementos geométricos más notables de las curvas (diámetros, ejes, centros, etc.) y, en particular, las normales y tangentes. Con ello, Descartes enuncia uno de los principios fundamentales de la llamada Geometría Analítica: el conocimiento de la relación que liga las coordenadas de los puntos —los segmentos o «*las líneas rectas*» a las que alude— de una curva, es decir, la ecuación de la curva, es un elemento esencial para dilucidar y desentrañar las propiedades y elementos de la curva. La ecuación de la curva realiza un tránsito de la Geometría al Álgebra, que, por su carácter operacional, permite, realizando cálculos y en particular resolviendo ecuaciones, regresar a la Geometría, para encontrar y solucionar cuestiones geométricas, de modo que se fija una correspondencia entre las propiedades algebraicas de la ecuación y las

propiedades geométricas de la curva asociada. Como consecuencia, la tarea de probar un teorema en Geometría se traslada de forma muy eficiente a probarlo en Álgebra y, además, ésta se convierte en un poderoso instrumento de investigación geométrica. Pues bien, en este lugar, Descartes aplica toda esta filosofía geométrico-algebraica a encontrar las rectas normales de las líneas curvas.

De pasada Descartes define el ángulo entre dos curvas en un punto como el ángulo que forman las normales en ese punto, además, añade de soslayo la frase (G.AT,VI, 413):

«[...] Con sólo esto, se puede aun, encontrar casi todo lo que puede ser determinado respecto a la medida del espacio que abarcan»,

de modo que el asunto se podría aplicar al cálculo de áreas determinadas por curvas de las que se conoce la ecuación, es decir, al otro problema candente en los círculos matemáticos de la primera parte del siglo XVII, el cálculo de cuadraturas, problema al que Descartes no presta atención alguna en su obra matemática.

ESCENAS DE LA VIDA DE DESCARTES



Escenas de la vida de Descartes, de C.P.Marillier. Grabado del siglo XVIII.

Este grabado muestra algunos hechos importantes de la vida de Descartes:

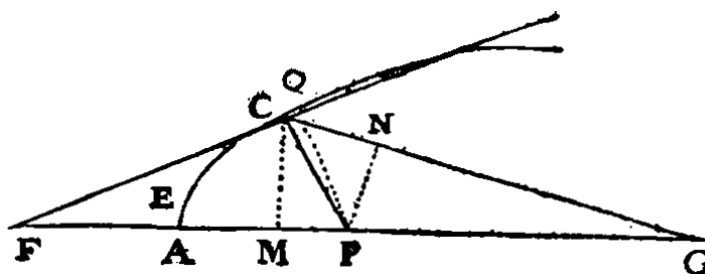
1. Izquierda-arriba: muerte de la hija ilegítima del filósofo, Francine, el 7 de setiembre de 1640.
2. Izquierda-abajo: episodio de la esgrima con los marineros del río Elba que querían desvalijarle (1621).
3. Arriba-derecha: Descartes imparte lecciones de Filosofía a la reina Cristina de Suecia (1649).
4. Abajo-derecha: Contemplando un cartel con un problema en Breda (Holanda). Encuentro con Beeckman (1618).

A continuación, Descartes entra directamente en el problema. Curiosamente utiliza la notación anterior xx para indicar x^2 , en cambio adopta la notación potencial x^n para el resto de las potencias. Transcribiremos el texto de Descartes utilizando una notación uniforme x^n para todas las potencias:

Manera general de encontrar líneas rectas que corten las curvas dadas o sus tangentes, formando ángulos rectos.

(G.AT,VI, 413-414).

«Sea CE la línea curva y que deba trazarse una recta por el punto C que forma con ella ángulos rectos.



Supongamos que la cosa está hecha y que la línea buscada es CP , que prolongo hasta el punto P en que encuentra a la línea recta GA que supongo ser aquella a cuyos puntos se refieren todos los de la línea CE ; de manera que haciendo MA o $CB=y$, y CM o $BA=x$, hay alguna ecuación que explica la relación que existe entre x e y [el punto B no figura en el dibujo; guiándose por las siguientes figuras, se obtendría como intersección de la perpendicular a AM por A y la paralela a AM por C].

Luego haciendo $PC=s$, $PA=v$, o bien $PM=v-y$, por el triángulo rectángulo PMC obtengo s^2 , que es el cuadrado de la base, igual a $x^2+v^2-2vy+y^2$, que son los cuadrados de los dos lados; es decir que tengo

$$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$$

o bien

$$y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$$

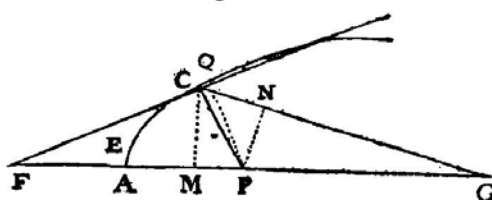
y por medio de esta ecuación, saco de la otra ecuación que da la relación que tienen todos los puntos de la curva CE con los de la recta GA [la ecuación de la curva], una de las dos cantidades indeterminadas x o y ; lo que es fácil de hacer poniendo $\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ en lugar de x , y el cuadrado de esta suma en lugar de x^2 , y su cubo en lugar de x^3 ; y así los otros términos si es x que yo deseo sacar; o bien, si es y , poniendo en su lugar $v + \sqrt{s^2 - x^2}$; y el cuadrado o el cubo, etc. De modo que quede siempre según esto, una ecuación en la cual no hay más que una sola cantidad indeterminada x o y .

EL MÉTODO DEL CÍRCULO EN LA GEOMETRÍA DE DESCARTES

LA GEOMETRIE.

tels de leurs poins qu'on voudra choisir. Et i'ose dire que c'est cecy le problême le plus vrile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçauoir en Geometrie.

Facon
generale
pour
trouuer
des lignes
droites,
qui coup-
pent les
courbes
données,
ou leurs
contia-
gentes, a
angles
droits.



Soit C E
la ligne courbe,
& qu'il faille ti-
rer vne ligne
droite par le
point C, qui fa-

ce avec elle des angles droits. Je suppose la chose desia faite, & que la ligne cherchée est C P, laquelle ie prolonge iusques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie suppose estre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E : en sorte que faisant M A ou C B $\propto y$, & C M, ou B A $\propto x$, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui est entre x & y . Puis ie fais P C $\propto s$, & P A $\propto v$, ou P M $\propto v - y$, & a cause du triangle rectangle P M C iay ss , qui est le quar-
ré de la baze esgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les quarrés des deux costés. c'est a dire iay $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, ou bien $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oste de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'une des deux quantités indeterminées x ou y . ce qui est aysé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d' x , & le quarré de cete somme au lieu d' xx , & son cube au lieu d' x^3 , & ainsi des autres, si c'est x que ie veuille oster; ou-

Página de la edición de 1637 de *La Geometría* de Descartes relativa al trazado de rectas normales a las curva -*método del círculo*- donde Descartes aplica uno de los Principios fundamentales de la Geometría Analítica (G.AT,VI, 412):

«Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas»

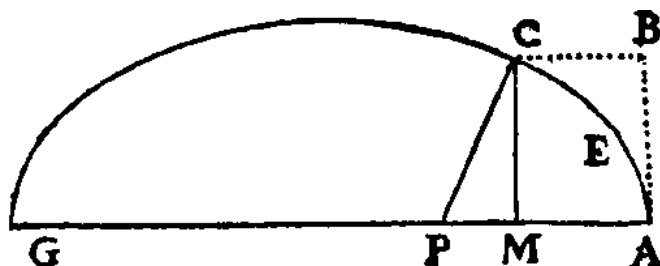
Esta frase contiene uno de los principios más importantes de la Historia de la Matemática, que instaure los fundamentos de la Geometría Analítica. La relación que liga los segmentos o «las líneas rectas» que hacen la función de «coordenadas» de los puntos de una curva, es decir, la ecuación de la curva, permite conocer las propiedades y los elementos característicos de la curva. La ecuación de la curva establece, pues, una correspondencia entre las propiedades algebraicas de la ecuación y las propiedades geométricas de la curva asociada. De esta forma la resolución de un problema de Geometría se traslada de forma muy eficaz a resolverlo en Álgebra y, además, ésta se convierte en un poderoso instrumento de investigación geométrica.

A continuación, Descartes aplica el método desarrollado a la elipse (G.AT,VI, 414):

Si fuese CE una elipse y MA el segmento de su diámetro [eje] al cual corresponde CM, y siendo r su lado recto y q el transverso se tiene, por el teorema 13 del Libro I de Apolonio:

$$x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2,$$

[ecuación de la elipse referida a ejes oblicuos, siendo uno de ellos el diámetro y el otro la tangente en su extremo]



de donde sustituyendo x^2 , queda:

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$$

o bien

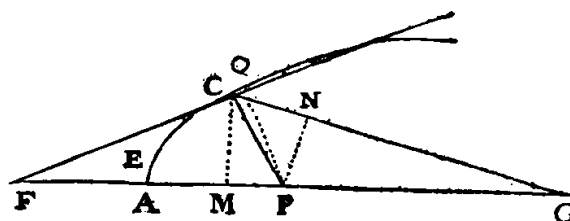
$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qvv - qs^2}{q - r} \text{ igual a cero.}$$

pues mejor, en este lugar, considerar así en conjunto toda la suma que hacer una parte igual a otra.»

Dada la curva CE de eje AG y vértice A, Descartes se plantea trazar la normal en el punto C, para lo cual debe encontrar un punto P sobre el eje AG que al trazar el segmento PC nos de la normal. De acuerdo con la metodología cartesiana, comienza el análisis del problema:

a) se considera resuelto, y b) se da nombre a los todos los segmentos que parecen necesarios: MA = y, CM = x, PC = s, PA = v.

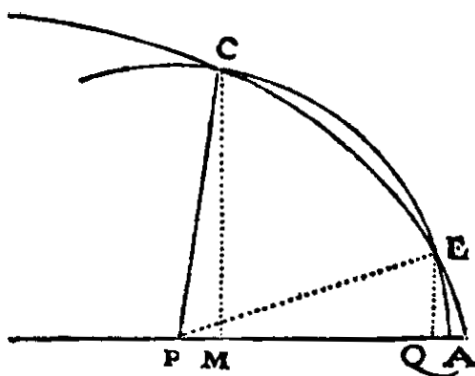
En la síntesis se indica que «[...] Hay alguna ecuación que explica la relación que existe entre x e y», es decir, la ecuación de la curva.



Ahora Descartes considera la circunferencia de centro el punto P y radio el segmento PC, que cortará a la curva en algunos puntos según la naturaleza de la curva. Todavía en el ámbito geométrico del problema, Descartes intuye que el segmento PC será la normal si la circunferencia es tangente a la curva en el punto C.

Descartes prosigue realizando para la parábola cálculos análogos a los de la elipse, tras lo cual vuelve al problema general en una forma que justifica que a su regla se le denomine «método del círculo» (G.AT,VI, 417):

«Ahora, después de encontrada una ecuación así, en lugar de utilizarla para conocer las otras cantidades x o y , que son ya dadas, puesto que el punto C es dado, se la debe emplear para encontrar v o s que determinan el punto P pedido. Y, a este efecto se debe considerar que si ese punto P es el punto que deseamos encontrar, el círculo del cual es centro y que pasa por el punto C , tocará a la línea curva CE sin cortarla; pero si el punto P está ya sea más próximo o más alejado del punto A de lo debido, ese círculo cortará a la curva no sólo en el punto C , sino necesariamente en algún otro. Debe también considerarse que cuando este círculo corta la línea curva CE , la ecuación por la cual se busca la cantidad x o y , o alguna semejante, suponiendo PA y PC conocidas, contiene necesariamente dos raíces, que



son desiguales. Pues por ejemplo, si este círculo corta a la curva en los puntos C y E , trazando EQ paralela a CM , los nombres de las cantidades indeterminadas x e y convendrán igualmente a las líneas EQ y QA que a CM y MA , pues PE es igual a PC por ser del círculo; si bien, buscando las líneas EQ y QA por PE y PA que se suponen dadas, se tendrá la misma ecuación que si se buscara CM y MA por PC y PA , de lo que se deduce, evidentemente, que el valor de x o de y , o de cualquier otra cantidad que se suponga, será doble en esta ecuación, es decir que habrá dos raíces desiguales entre sí, de las que una será CM y la otra EQ , si es x que se busca; o bien una será MA y la otra QA , si es y ; y así las otras. Es cierto que si el punto E no se encuentra del mismo lado de la curva que el punto C , no habrá más que una de estas raíces que sea verdadera y la otra será opuesta o menor que cero; pero cuanto más próximos estén estos dos puntos el uno del otro, tanto menor diferencia habrá entre las dos raíces; y, ellas serán enteramente iguales, si ellos están juntos en uno, es decir si el círculo que pasa por C toca la curva CE sin llegar a cortarla.

Además, debe considerarse que cuando hay dos raíces iguales en una ecuación, ella tiene necesariamente la misma forma que si se multiplica por sí misma la cantidad que se supone ser desconocida menos la cantidad conocida que le es igual; después de lo cual si esta última expresión tiene dimensión inferior a la de la ecuación precedente, se la multiplica por otra suma que tenga tanta dimensión como la que le falta, de modo que pueda haber ecuación separadamente entre cada uno de los términos de la una y cada uno de los de la otra.»

Para cada punto C de la curva hay que determinar el punto P –problema geométrico– que permite trazar el segmento PC , normal a la curva en C , es decir, hay que poner v y s en función de x e y –problema algebraico–. Suponer el problema resuelto permite determinar en

un terreno algebraico la ecuación de un círculo. Regresando a la Geometría, si la recta trazada por P es la normal «el círculo del cual es centro y que pasa por el punto C, tocará a la línea curva CE sin cortarla», es decir, será tangente, cortará a la curva en un solo punto, un punto doble (en sentido actual). Ahora, volviendo al Álgebra, para que el círculo «toque» (sea tangente) a la curva es preciso que la ecuación resultante tenga una raíz doble. Esta ecuación resultante proviene del sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la curva y la ecuación del círculo.

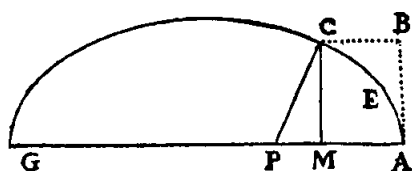
Aquí aparece otro principio fundamental de la Geometría Analítica: «la intersección de curvas –que es un problema geométrico– se reduce a la resolución de sistemas de ecuaciones – que es un problema algebraico–.

Descartes resolverá el problema algebraico final que se plantea mediante el *método de coeficientes indeterminados*, y en este tema, así como en el asunto paralelo de las raíces dobles, también es un pionero.

Continúa Descartes aplicando el método a la elipse (G.AT,VI, 419):

Así, por ejemplo, digo que la primera ecuación encontrada más arriba [la de la elipse], a saber

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r}$$



debe tener la misma forma que la que se obtiene haciendo e igual a y, y multiplicando y-e por sí misma: de lo que resulta

$$y^2 - 2ey + e^2,$$

de manera que se pueden comparar separadamente cada uno de sus términos y decir que, puesto que el primero, que es y^2 es el mismo en la una y en la otra; el segundo que en una expresión es:

$$\frac{qry - 2qvy}{q - r}$$

es igual al segundo de la otra que es $-2ey$.

De donde, buscando la cantidad v que es la línea PA, se tiene

$$v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r,$$

o bien, por haber nosotros supuesto $e=y$, se tiene

$$v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r,$$

y también podría encontrarse s por el tercer término:

$$e^2 = \frac{qv^2 - qs^2}{q - r}$$

pero, puesto que la cantidad v determina bien el punto P, que es el único que buscamos, no hay necesidad de proseguir.»

De forma análoga Descartes realiza la argumentación y el cálculo para la parábola y la Concoide de Nicomedes (G.AT,VI, 420-424).

DESCARTES EN LA PRENSA



Caricatura de Descartes que publicó el 23 de marzo de 1996 la sección **TO** de la revista LA ESFERA del Diario EL MUNDO de Madrid, con motivo del cuarto centenario de su nacimiento.

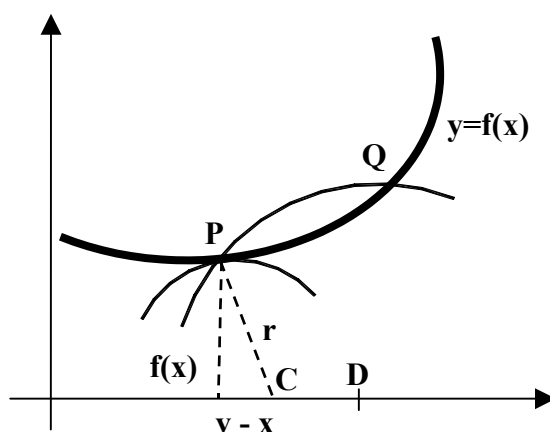
A Descartes se le considera, junto con Fermat, el fundador de la Geometría Analítica. En el propio ámbito de *La Geometría*, Descartes hizo trascendentales contribuciones a la *Teoría de Ecuaciones*, donde vislumbró importantes cuestiones como la *regla de los signos* para descifrar el número de raíces negativas y positivas de cualquier ecuación algebraica, la *Regla de Ruffini* y el *Teorema Fundamental del Álgebra*. Además en sus estudios sobre poliedros, parece ser que Descartes llegó a conocer la conocida *Formula de Euler* que relaciona aristas, caras y vértices de un poliedro.

Al inicio del Libro II de *La Geometría* Descartes introduce los llamados *compases cartesianos*, ingenios que tienen la misma precisión que los instrumentos platónicos y que utilizará para la construcción de diversas curvas geométricas de gran importancia en la resolución de ecuaciones correspondientes a problemas geométricos.

Para mayor comprensión del *método del círculo* de Descartes, interpretemos la técnica cartesiana para una función algebraica general, de forma deliberadamente anacrónica en términos del lenguaje moderno. Tendríamos lo siguiente:

Sea la curva $y=f(x)$, y P un punto cualquiera de ella de abscisa x, donde queremos trazar la normal. Descartes supone como siempre el problema resuelto y la solución dada por la recta CP, siendo $C=(v,o)$ la intersección de la normal con el eje de abscisas.

En general un círculo con centro en un punto D próximo a C y que pase por P, cortará a la curva $y=f(x)$, no sólo en P, sino en otro punto Q, cercano a P, pero si CP es la normal a la curva en el punto P, este punto será un punto doble de la intersección de la curva $y=f(x)$ y el círculo $(x-v)^2 + y^2=r^2$.



Eliminando la y de ambas ecuaciones resulta que la ecuación

$$[f(x)]^2 + (v-x)^2 = r^2 \quad (1)$$

donde v,r, son fijos, debe tener la abscisa x de P como raíz doble.

Pero una función algebraica con una raíz doble $x=e$, debe ser de la forma: $(x-e)^2 \cdot \sum b_n x^n$, de modo que se puede imponer la condición de raíz doble anterior en la forma:

$$[f(x)]^2 + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2 \cdot \sum b_n x^n \quad (2).$$

Identificando coeficientes se encuentra el valor de v, en términos de la raíz doble e.

En general mediante el método de Descartes lo que se halla es la «*subnormal*» $v-x$, que permite hallar la pendiente de la normal: $-f(x)/(v-x)$ y de ésta la pendiente de la tangente, es decir, nuestra derivada: $(v-x)/f(x)$.

La condición de raíz doble sobre (1) hoy la impondríamos (utilizando las derivadas formales de una curva algebraica), aplicando que «*toda raíz doble de una función es raíz de su derivada*», por tanto de (1) se deduce:

$$2f(x) \cdot f'(x) - 2(v-x) = 0,$$

y de aquí $f'(x)=(v-x)/f(x)$, obteniéndose el mismo valor que antes para la pendiente de la tangente.

Apliquemos la técnica de Descartes, con lenguaje actual, a diversos casos sencillos.

A₁.- La parábola $y=x^2$.

La ecuación (2) ahora se escribe: $x^4 + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2 \cdot (x^2 + bx + c)$.

Identificando coeficientes se obtiene: $v=2e^3 + e$, sustituyendo $e=x$, la «*subnormal*» vendrá dada por: $v-x=2x^3$, y la pendiente de la tangente en el punto (x,x^2) de la curva será:

$$(v-x)/f(x) = 2x^3/x^2 = 2x.$$

A₂.- La parábola $y^2=2px$.

La ecuación (2) ahora se escribe: $2px + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2$.

Identificando coeficientes se obtiene $v=e+p$, sustituyendo $e=x$, la «*subnormal*» vendrá dada por $v-x=p$, y la pendiente de la tangente en el punto $(x, \sqrt{2px})$ de la curva será:

$$\frac{v-x}{f(x)} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}.$$

La ecuación de la tangente a la parábola $y^2=2px$ en el punto (x_0, y_0) será pues:

$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$, de donde haciendo operaciones resulta:

$yy_0 = p(x+x_0)$, expresión habitual de la tangente a la parábola.

B.- La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

La ecuación (2) ahora se escribe: $b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2 \cdot c$

Identificando coeficientes resulta: $-(b^2/a^2) + 1 = c$, $-2v = -2ec$.

Despejando v se tiene: $v = e \cdot [1 - (b^2/a^2)]$.

Sustituyendo $e=x$, la «*subnormal*» vendrá dada por $v-x=(-b^2x)/a^2$, de modo que la pendiente de la recta tangente en el punto (x,y) será:

$$\frac{v-x}{f(x)} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

De aquí resulta que la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto (x_0, y_0) se

expresará: $y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$, de donde haciendo operaciones resulta:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \text{ expresión habitual de la tangente a la elipse.}$$

Hemos visto que la técnica cartesiana, bajo un punto de vista de Geometría Algebraica (diríamos hoy), encuentra las tangentes a las curvas –vía la normal–, mediante la técnica de considerar el doble contacto del círculo osculador como una característica de la normal. De este modo, Descartes obtiene un método de tratar el problema, que al intuir que será el germen de una ciencia futura, le concede una importancia capital, al reconocer que las tangentes y normales a las curvas son rectas que, de alguna forma, imponen sus leyes a las curvas.

El problema del trazado de las normales a una curva en un punto, es considerado el mayor éxito del método cartesiano, marcando una impronta en la génesis de la Geometría Analítica por la capacidad que desarrolla Descartes de establecer puentes de ida y vuelta entre el Álgebra y la Geometría: análisis geométrico de los problemas, síntesis del análisis en el Álgebra de ecuaciones y traducción geométrica de los resultados algebraicos, un magnífico y poderoso diccionario reversible entre dos lenguajes, el geométrico y el algebraico, con la posibilidad de traducir no sólo en el ámbito gramatical –puntos por coordenadas, curvas por ecuaciones–, sino también en el dominio sintáctico –las relaciones entre los elementos geométricos, por ejemplo intersecciones de curvas, se traducen en relaciones entre los correspondientes elementos algebraicos, por ejemplo mediante sistemas de ecuaciones–.

Con un énfasis inusitado Descartes considera que este problema es el más importante, no sólo de cuantos ha resuelto sino de cuantos anhelara descubrir en Geometría (G.AT,VI,413):

«[...] Y me atrevo a decir que éste es el problema mas útil y mas general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría».

Con estos antecedentes, se comprende la sorprendente acritud con que se desarrolló su polémica con Fermat, a partir de la difusión de los métodos de máximos y mínimos ideados por este «aficionado» ya que se aplicaban también al trazado de tangentes. El desarrollo de la controversia, en el que participaron casi todos los matemáticos del círculo de Mersenne, tuvo la feliz virtualidad de ir obligando progresivamente a Fermat a aclarar la naturaleza de sus procedimientos, en el curso de lo cual nuevas curvas nacieron para la Geometría Analítica y para el Cálculo Infinitesimal, que simultáneamente estaba eclosionando gracias a toda la parafernalia analítica que ofrecían los métodos de Fermat y Descartes.

EL CARTESIANISMO

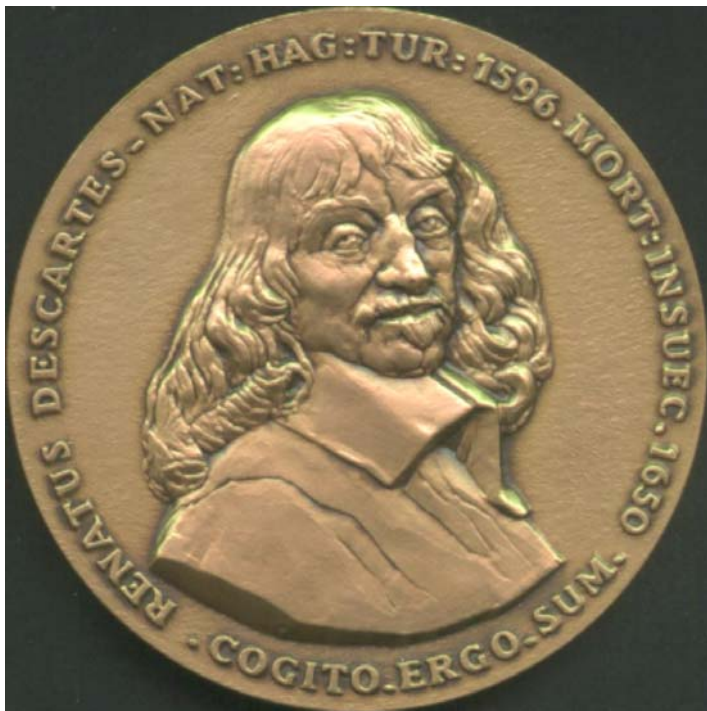


Estatua de Descartes. Palacio de Versalles.

El término latinizado del apellido de Descartes ha dado nombre tanto a su doctrina filosófica: el cartesianismo, basada en el método de la razón matemática, como a las aplicaciones geométricas de *La Geometría*: la Geometría cartesiana, llamada en su forma académica *Geometría Analítica*.

Pocos sabios han dejado su nombre a una doctrina filosófica o a una teoría matemática, pero todavía menos han tenido la gloria de verlo adjetivado en el lenguaje coloquial. Cartesiano ha pasado a ser sinónimo de *racional* y *metódico* en el sentido de analista y riguroso. Así se reconoce cuando se habla, por ejemplo, de una mente cartesiana.

DESCARTES SEGÚN SPINOZA: GEOMETRÍA Y FILOSOFÍA



El método de la Filosofía cartesiana basado en la razón matemática impactó en sus contemporáneos, como los filósofos Malebranche y Spinoza, quien en el prólogo de su obra *Los Principios de la Filosofía cartesiana* escribe el siguiente panegírico de Descartes:

«Se alzó al fin este astro, el más destellante de nuestro siglo, René Descartes, quien, en primer lugar, mediante un método nuevo, hizo pasar de las tinieblas a la luz cuanto en las Matemáticas había permanecido inaccesible a los antiguos y todo cuanto los contemporáneos habían sido incapaces de descubrir; luego puso los cimientos inquebrantables de la Filosofía sobre los cuales es posible asentar la mayor parte de las verdades en el orden y con la certidumbre de las Matemáticas, tal como él mismo lo demostró realmente y como aparece más claro que la luz del día a todos cuantos han estudiado atentamente sus escritos, cuya alabanza nunca será tan alta como merece.»

DESCARTES Y LA REINA CRISTINA DE SUECIA



Detalle del cuadro *Cristina de Suecia y su corte*, de P.Dumesnil. Descartes aparece haciendo una demostración geométrica.

Descartes, tomando una decisión excepcionalmente poco cartesiana, acepta la invitación de Cristina de Suecia, que deseaba «intruirse en Filosofía», y se desplaza en setiembre de 1649 a Suecia, «el país de los osos, entre rocas y hielos». La reina le cita «en la biblioteca, todas las mañanas, a las cinco», «en Suecia se hielan hasta los pensamientos». Descartes, que tenía la costumbre de levantarse tarde desde la época de estudiante en *La Flèche*, enferma gravemente y muere el 11 de febrero de 1650, oficialmente de una pulmonía, pero tal vez tuvo que ver la añoranza, los caprichos de la reina y los celos de los cortesanos. A pesar de las disputas entre la reina y el embajador de Francia, el cuerpo de Descartes permaneció en Suecia y no fue repatriado hasta 1666. No obstante, el cráneo se quedó en Estocolmo hasta 1822, cuando el químico sueco Berzelius lo regaló a Cuvier. En la actualidad el cuerpo de Descartes descansa en París, en la Iglesia de Saint-Germain-des-Prés, aunque el cráneo se exhibe en el Museo del Hombre.

La Geometría de Descartes y la Geometría Analítica

Descartes participó de los objetivos y propósitos reformadores de Vieta al realizar la construcción geométrica de las raíces de las ecuaciones algebraicas, que empieza, una vez fijada una unidad, por la asignación a cada segmento de una longitud, facilita la asociación implícita del sistema de números reales con los puntos de una línea recta –origen de las coordenadas– y proporciona con esta base un substrato geométrico a las operaciones aritméticas. Después muestra cómo se pueden construir –con instrumentos euclidianos pero con el concurso del Álgebra– las soluciones de las ecuaciones algebraicas, soslayando la necesidad que había en el Álgebra Geométrica griega de conservar la homogeneidad y eliminando la barrera dimensional. Todo ello son ingredientes de lo que mucho después de Descartes se llamaría la Geometría Analítica.



Portada de la primera edición de *Opera mathematica* de Vieta. Fue editada por Van Schooten, en Leyden, en 1646, justo tres años antes de que el propio Van Schooten, y también en Leyden, publicara *La Geometría* de Descartes. Se cree que esta edición de Van Schooten contiene la mayor parte de lo escrito por Vieta, con notaciones nuevas introducidas por el editor.

Con su *Arte Analítica*, Vieta había ya establecido una conexión entre Álgebra y Geometría, al obtener las ecuaciones que corresponden a diversas construcciones geométricas, en el caso de problemas geométricos determinados, es decir manejando sólo ecuaciones determinadas, en las que la variable aunque es una incógnita, es una constante fija a encontrar. Descartes, en *La Geometría* desarrolla esta idea para problemas geométricos indeterminados mediante la consideración de ecuaciones indeterminadas en variables continuas que representan segmentos geométricos. En un sentido general, se puede decir que la invención de la Geometría Analítica por Descartes consiste en la extensión del *Arte Analítica* de Vieta a la construcción geométrica de las soluciones de ecuaciones indeterminadas.

Al partir del rastro de Vieta, Descartes alcanza el principio fundamental de la Geometría Analítica, que expresado en lenguaje moderno, consiste en el descubrimiento de que las ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas, $f(x,y)=0$, se corresponden con lugares geométricos, en general curvas, determinadas por todos los puntos cuyas coordenadas relativas a dos ejes satisfacen la ecuación. Un aspecto de esta idea es anunciado por Descartes en un enunciado básico que viene a decir: «una ecuación en dos cantidades indeterminadas determina, con respecto a un sistema dado de coordenadas, una curva», expresado como vimos, en el Libro II de *La Geometría* de la siguiente forma (G.AT,VI, 412):

«Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas [la ecuación de la curva]»,

La relación a la que alude Descartes es la ecuación de la curva en un sistema de coordenadas, una expresión algebraica que permite estudiar las propiedades y encontrar los elementos característicos de la curva –diámetros, ejes, centros, normales, tangentes, etc.– como asegura Descartes (G.AT,VI, 412–413):

«Luego con sólo saber la relación que tienen todos los puntos de una línea curva con todos los de una línea recta [la ecuación], en la forma que he explicado, es fácil también conocer la relación que ellos tienen con todos los otros puntos y líneas dadas; y, por lo tanto, conocer los diámetros, los ejes, los centros, [...]. Y también, con sólo

esto, se puede aun, encontrar casi todo lo que puede ser determinado respecto a la medida del espacio que abarcan, [cuadratura].»

He aquí pues una correspondencia entre las propiedades geométricas de la curva y las propiedades algebraicas de la ecuación asociada que anuncia la esencia de la Geometría Analítica como puente entre el Álgebra y la Geometría y poderoso instrumento de solución de problemas geométricos mediante la intervención del Álgebra, una vez se ha definido un sistema de coordenadas, mediante el que se obtiene la ecuación de la curva como relación algebraica que liga las coordenadas de los puntos de la curva. El carácter algorítmico y operacional del Álgebra convierte a ésta en una potente herramienta no sólo de resolución de problemas geométricos concretos sino también en un magnífico útil de exploración e investigación geométrica, que en esto estriba realmente la eficiencia de la Geometría Analítica.

De esta forma se comprende que a la Geometría Analítica, la «*Geometría de coordenadas*» se le llame Geometría cartesiana. Aunque a tenor de lo que hizo Descartes más bien habría que llamarle «*Geometría de ordenadas*», ya que fijadas las dos incógnitas que componen la ecuación, los segmentos de la primera se miden a partir de un punto inicial –*origen de coordenadas*–, a lo largo de un eje dado y los segmentos de la segunda –que son determinados por la ecuación– se elevan como «*ordenadas*» formando un ángulo con el eje. Así resultan lo que Descartes llama por primera vez en el *Problema de Pappus* «*líneas principales de referencia*» (G.AT,VI,383). No hay, pues, una identidad entre la Geometría Analítica moderna y la de Descartes, incluso son un cierto anacronismo las expresiones actuales como «*sistema de coordenadas cartesianas*». De hecho, Descartes pocas veces utiliza ejes perpendiculares, conocidos como cartesianos, sino que emplea diferentes sistemas de coordenadas, en general oblicuos.

Descartes tenía una opinión muy negativa sobre los métodos sintéticos de los antiguos griegos, por la ocultación del proceso inventivo y la excesiva particularidad, y en consecuencia no participó como hicieron muchos matemáticos coetáneos en el movimiento de restauración de los trabajos perdidos de Apolonio. Descartes era consciente de que su método estaba suplantando a los antiguos. De hecho ése era su propósito desde el principio: no sólo rehacer la Geometría griega, sino crear un nuevo método para la resolución de antiguos y nuevos problemas que rompiera de forma definitiva con la tradición griega y llega incluso a reemplazarla.

Como consecuencia de la aparición de los inconmensurables, el *Álgebra Geométrica* de los griegos estructura casi toda la Matemática griega, con una rigidez que obliga a un tratamiento sintético de los problemas, esclaviza a depender de la naturaleza geométrica intrínseca de las figuras, de modo que cada problema exige un tratamiento local que atomiza la casuística de los casos específicos y precisa de sutiles construcciones geométricas para cada caso particular. Es decir, cada demostración de la Geometría euclídea exigía nuevos e ingeniosos argumentos originales y estaba tan ligada a las figuras que «*que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación*», como diría Descartes (DM.AT,VI,17–18). Pero lo más grave era la ocultación del procedimiento y el método de descubrimiento como manifiesta en la Regla IV de las *Regulae* (RIV.AT.X.376–377). Incluso Descartes llega a decir que «[...] *los antiguos no poseían un verdadero método, ...*» sino «*ellos no hubieran escrito libros tan voluminosos [para resolver las cuestiones geométricas]*» (G.AT,VI,376).

Las Geometría Analítica de Descartes nace, precisamente, de su interés por la metodología. Como escribe Kline (1985, p.51):

«Las contribuciones de Descartes a las Matemáticas propiamente dichas no ofrecieron nuevas verdades, sino, más bien, una sólida metodología que ahora llamamos Geometría Analítica.»

La *Geometría* de Descartes tienen su anclaje en la Geometría Griega, pero se plantea como

tarea esencial encontrar nuevos métodos más simples, más operativos, más resolutivos, más heurísticos y sobre todo más generales. La intencionalidad de Descartes es palmaria hasta en el propio título de la obra de la que es tributaria *La Geometría*, que con título abreviado se llama *Discours sur la Méthode*, en la que Descartes plasma, de forma clara y distinta, «el método para dirigir correctamente la razón y buscar la verdad en las ciencias», es decir, primero el método, después la ciencia que resulta de su fiel aplicación.

Bajo esta filosofía de trabajo Descartes es uno de los principales artífices de la inflexión radical que presenta la Matemática del siglo XVII respecto a la clásica griega, que es ponderada y es la fuente de formación y de inspiración de los matemáticos, pero se abandonan y critican sus métodos porque no son heurísticos. Con un nuevo enfoque se trata ante todo de crear y descubrir, más que de expresar demostrativamente o axiomáticamente. Es más relevante la forma de resolución de los problemas que el estilo de la presentación. Lo que importa es la obtención de métodos que permitan resolver de forma directa y operativa los problemas y escribirlos formalmente siguiendo la línea de la propia investigación geométrica, es decir, métodos que al describir el proceso inventivo enseñen a descubrir y rompan la clásica dualidad helénica *invención-demostración* que tiene lugar en dos estadios de tiempo y espacio diferentes. Se pondera la heurística y se busca afanosamente la fusión, en un solo acto matemático, del descubrimiento y de la demostración. Esto es lo que ante todo persigue Descartes en *El Discurso del Método* la búsqueda de un «*ars inveniendi*», es decir, un método que sirva para descubrir nuevas verdades más que para probar lo que ya se ha hallado. Pues bien, aquí es donde interviene el Álgebra como instrumento inherente a la Geometría Analítica.

En efecto, el Álgebra mecaniza la Matemática de forma que el pensamiento se simplifica y disminuye el esfuerzo de la mente ante la automatización de los procesos. Para Descartes el Álgebra debe preceder a las demás ramas de la Matemática y en cierto modo es una extensión de la Lógica, como motor del razonamiento, en la línea de lo que llamaba Matemática universal (la *Mathesis* de las *Regulae*, RIV.AT.X.376). El Álgebra es la ciencia universal del razonamiento. Y al concretar sobre el ámbito geométrico, el Álgebra es la clave para reconocer los problemas de la Geometría y unificar cuestiones cuya forma geométrica no parece guardar *a priori* relación alguna. Es decir, el Álgebra aporta los principios de clasificación y jerarquía de los problemas y es el instrumento fundamental para discutir con agilidad y generalidad las cuestiones geométricas. El Álgebra simbólica literal, con incógnitas, variables y parámetros, libera de la necesidad de tratar casos específicos y ejemplos concretos y permite formulaciones generales y desarrollos de procedimientos de resolución independientes de la estructura geométrica particular, que posibilita la aplicación de las mismas técnicas a situaciones análogas.

Concretemos aún más qué función cumple el Álgebra en la Geometría Analítica desde el punto de vista del Análisis griego, con el fin de justificar el propio nombre de *Geometría Analítica*, que algunos consideran inapropiado. El término *Análisis* se aplica desde Platón y Pappus para describir el proceso de remontarse desde lo que se desea demostrar hasta llegar a alguna verdad conocida –admitida o probada anteriormente–. En este sentido es lo opuesto a la *Síntesis*, que es la presentación deductiva de lo que se halló mediante el *Análisis*. Es bajo estas concepciones que todavía Vieta y Descartes consideraban el Análisis para describir la aplicación del Álgebra a la Geometría, puesto que el Álgebra era el instrumento adecuado para *analizar* el problema de construcción geométrica. En efecto, Vieta había definido el *Análisis* como «*doctrina bene inveniendi in mathematica*». Para Vieta el *Arte Analítica* constaba de tres partes: *zetetic* donde se determinan las propiedades de los elementos que pide el problema a partir de las propiedades de los datos, *poristic* que es el proceso de verificación y *exegetic* que es la demostración de la proposición. Tal como había sido usado por Platón y Pappus, la palabra *Análisis* hacía referencia al orden de las ideas en una demostración. El *Análisis* es la descomposición en elementos más simples que se hace en el camino de la investigación, la *Síntesis* es la composición o reordenación que se hace en la exposición. Vieta aplicará la palabra *Análisis* en la Geometría algebraica, a la que mira como una nueva forma de Análisis matemático y usa el término bajo el significado de los griegos, pero remarca que en la fase *zetética* de ataque algebraico del problema se procede indirectamente a base de asumir lo que se quiere probar o construir y se maneja y se opera

con las cantidades incógnitas como si fueran conocidas.

Descartes reproducirá, en el segundo epígrafe del Libro I de *La Geometría* titulado «cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas», estas ideas en torno a la aplicación del *Análisis*: (G.AT,VI,372):

«Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya resuelto, y dar nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las que son desconocidas como a las otras. Luego, sin considerar ninguna diferencia entre estas líneas conocidas y desconocidas, se debe examinar la dificultad según el orden que se presente como más natural de todos, en la forma como aquellas líneas dependen mutuamente las unas de las otras, hasta que se haya encontrado la manera de expresar una misma cantidad de dos maneras: lo que se denomina una ecuación, pues [el resultado de] los términos de una de esas dos formas son iguales a los de la otra.»

Así pues, tanto para Vieta como para Descartes, el Álgebra se convierte en el instrumento adecuado para emprender el camino analítico en Geometría, que de acuerdo con las palabras mencionadas de Descartes, debe seguir un protocolo de actuación. Señalemos, punto por punto, los pasos a seguir, según Descartes, para resolver cualquier problema geométrico, que en esencia son casi los mismos que realizamos de forma académica cuando resolvemos actualmente cualquier problema de Geometría Analítica:

- a) se da nombre a todos los segmentos que parecen necesarios;
- b) se supone el problema resuelto, es decir, se supone conocida la longitud buscada;
- c) se plantea la ecuación entre las longitudes conocidas y desconocidas;
- d) se resuelve esta ecuación;
- e) se concluye con la construcción geoméricamente de la solución.

Éste es el camino que sigue el método cartesiano en el que el estudio analítico se funde con la síntesis algebraica en transición de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría. El *Análisis* mediante el Álgebra traduce los datos geométricos de forma que sean tratables por medio del automatismo del cálculo algebraico, esto es el *Análisis Algebraico*. Se comprende, pues, el nombre de *Geometría Analítica* que en el curso de la Historia se le dio al instrumento desarrollado por Descartes, aunque tal vez hubiera sido mas descriptivo el de Geometría Algebraica –que curiosamente resultaría de la permutación de los términos de Álgebra Geométrica con que se nombra buena parte de la Matemática de *Los Elementos* de Euclides–, aunque este nombre también sería deficiente, toda vez que la Geometría Analítica es mucho más que una mera aplicación del Álgebra a la Geometría, ya que requiere el uso de coordenadas. En suma, la Geometría Analítica sería el *Análisis* moderno, siendo el Álgebra por su carácter algorítmico el principal instrumento de la aplicación de ese *Análisis*, por eso también se podría definir con mayor precisión como la aplicación del *Análisis Algebraico* a la Geometría. Históricamente, hasta muy tarde se han utilizado los términos Álgebra y *Análisis* como sinónimos. Así aparecen, por ejemplo, en la famosa *Encyclopédie*, donde D'Alembert escribe:

«El Análisis es propiamente el método de resolver los problemas matemáticos, reduciéndolos a las ecuaciones. El Análisis para resolver problemas, emplea el recurso del Álgebra, o cálculo de las magnitudes en general: estas dos palabras, Análisis y Álgebra, son a menudo miradas como sinónimas [...] Algunos autores definen el Álgebra (como siendo) el arte de resolver los problemas matemáticos: pero ésta es la idea del Análisis o del arte analítico más bien que del Álgebra.»

Cuestiones nominalistas aparte, volvamos a los orígenes para reiterar que la Geometría Analítica recibe su nombre y sus procedimientos del método de *Análisis* de los griegos y

permite recuperar el Análisis Geométrico de los antiguos mediante la acción del Álgebra, ya que el carácter algorítmico de ésta promueve y acentúa las aptitudes heurísticas del Análisis. Así lo observamos claramente en *La Geometría*, donde uno se convence de la posibilidad cartesiana de reconstruir toda la Geometría con una simplicidad sorprendente como el propio Descartes asegura (G.AT,VI,376):

«[...] *Se pueden construir todos los problemas de la geometría ordinaria, sin hacer más que lo poco que está comprendido en las cuatro figuras que he explicado*»,

y con unos instrumentos francamente modestos, sólo los Teoremas de Tales y de Pitágoras, como indica a la Princesa Elisabeth en la comunicación epistolar de noviembre de 1643:

«*Yo no considero otros teoremas que los lados de los triángulos semejantes están en proporción, y que, en los triángulos rectángulos, el cuadrado de la base es igual al cuadrado de los dos lados*».

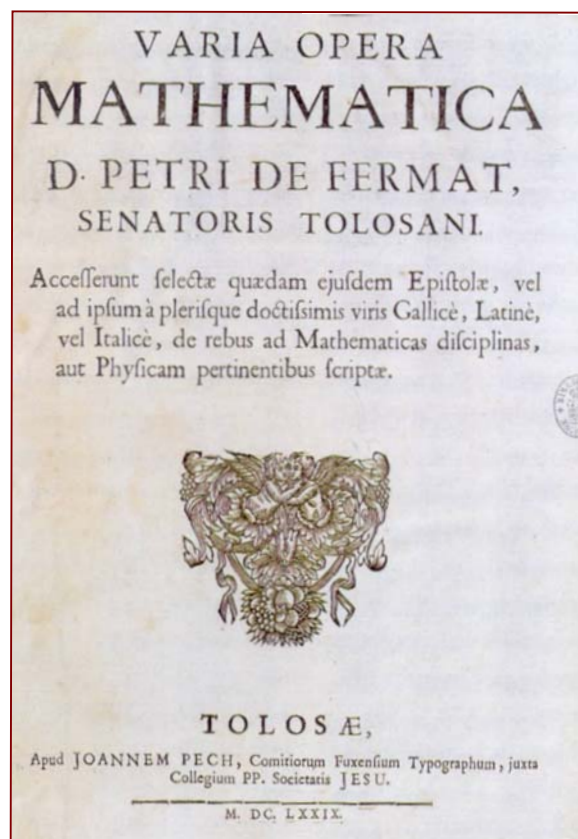
Descartes hace esta observación respecto de la resolución del problema de Apolonio, pero lo mismo se puede decir de *La Geometría* en general.

Es asombroso ¡cómo se puede hacer tanto con tan poco! Y es que el enfoque analítico, siempre con el recurso algorítmico del Álgebra simbólica, permite la generalización de los métodos y la aplicación uniforme de los mismos procedimientos a cuestiones similares.

Durante algunos años después de 1637, la Geometría Analítica fue considerada como la invención de un solo hombre –Descartes–, debido a que los trabajos de Fermat sobre Geometría Analítica –la *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos*–, conocida como *Isagoge*, no fueron publicados en vida del autor. Por ello es difícil aquilatar el grado de influencia que tuvo sobre sus contemporáneos. No obstante, tanto la *Isagoge* como los trabajos de Fermat sobre máximos y mínimos y su aplicación a las tangentes fueron conocidos –por voluntad de Fermat a través de manuscritos que acompañaban a su correspondencia con Mersenne–, por el círculo de matemáticos de París, incluso antes de la aparición de *La Geometría* de Descartes, pero así como las tangentes de Fermat causaron una gran impresión sobre todo en Descartes, la *Isagoge* parece que fue rápidamente eclipsada por el trabajo de Descartes. Mientras algunos aspectos de los máximos y mínimos y las tangentes de Fermat fueron incorporados a algunas publicaciones de otros matemáticos, la *Isagoge* no aparece en imprenta hasta la publicación de *Varia Opera Mathematica* de Fermat por parte de su hijo Samuel en 1679, catorce años después de la muerte de su autor, cuarenta y dos años después de la publicación de *La Geometría* de Descartes y casi cincuenta años después de ser escrito el tratado, en unos momentos en que la influencia cartesiana se había extendido notablemente, de modo que la memoria de Fermat sobre Geometría Analítica, ya incluso con una notación obsoleta, tenía simplemente un valor histórico para atestiguar (debido a la fecha de composición y a su contenido) la independencia de la Geometría Analítica de Fermat respecto de la de Descartes. Así pues, el nombre de Geometría cartesiana con que se denomina a veces a la Geometría Analítica no hace justicia a ambos fundadores, incluso entre profesionales de la Matemáticas se desconoce, a veces, la copaternidad de Fermat, pero es bien cierto que fue bajo la forma cartesiana como este magnífico instrumento se impuso y echó raíces en la Matemática.

Al contrario que la *Isagoge*, *La Geometría* de Descartes tuvo una rápida difusión, de modo que por la importancia que se dio a la obra, enseguida aparecieron nuevas ediciones que recibieron infinidad de comentarios por parte de matemáticos coetáneos. Además, no todo el mundo entendía la obra de Descartes, de modo que incluso algunos eruditos solicitaron aclaraciones para poderla seguir. Estas preocupaciones latentes en los ámbitos matemáticos propiciaron el que van Schooten –que había sido el diseñador de las figuras de la primera edición– añadiera, a su traducción latina de 1649, toda una serie de comentarios propios, las *Notas Breves* de F. de Beaune y aportaciones de Witt, de Hudde, de van Heuraet y otros, que contribuyeron a extender su difusión e incrementar su inteligibilidad. Tanto éxito tuvo la publicación de van Schooten que se reeditó en 1659 y 1695.

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE FERMAT DE LA INTRODUCCIÓN A LOS LUGARES PLANOS Y SÓLIDOS



1. Retrato de Fermat como consejero del parlamento de Toulouse (atribuido a Antoine Durand). Académie des Sciences et Belles Lettres de Toulouse.
2. Edición de Samuel de Fermat de *VARIA OPERA MATHEMATICA* de D. PETRI DE FERMAT. Tolosa, 1679.

La particular forma que tenía Fermat de trabajar en Matemáticas, así como de comunicar sus descubrimientos, unida a la despreocupación por la conservación de sus papeles y la constante reticencia en torno a su eventual publicación –Fermat no escribió grandes tratados, sino apuntes episódicos y notas marginales–, supuso que a su muerte en 1665 gran parte de su trabajo quedara desperdigado en numerosos ambientes científicos de toda Europa. Por esta razón su influencia directa no tuvo la envergadura y la inmediatez de la de Descartes.

Catorce años después de la muerte de su padre, habiendo reunido la mayor parte de los escritos latinos, así como un número suficiente de cartas inéditas, Samuel de Fermat hizo imprimir en 1679 *Varia Opera Mathematica*, que a pesar de las lagunas de importantes desarrollos de Fermat y de las excesivas incorrecciones –Samuel no era matemático–, constituyó hasta finales del siglo XIX –se reimprimió en 1861– la única publicación donde se podían estudiar los trabajos de Fermat.

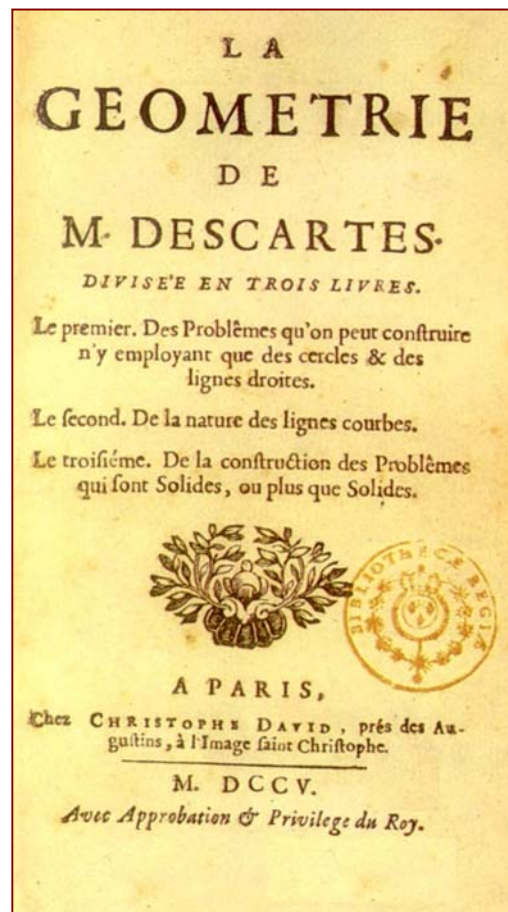
La Geometría Analítica de Fermat tiene su origen en su profundo conocimiento de la Geometría de Apolonio y Pappus y del *Arte Analítica* de Vieta. Fermat se dio cuenta de que las relaciones de áreas, expresadas según el Álgebra Geométrica de los griegos en forma de proporción, mediante las que Apolonio escribía las propiedades intrínsecas de las cónicas se prestaban con gran facilidad a ser traducidas en el lenguaje de ecuaciones del Álgebra simbólica de Vieta. De esta forma el *symptoma* de la curva de *Las Cónicas* de Apolonio, forma retórica de la expresión de la curva en el lenguaje pitagórico de la *Aplicación de las Áreas*, evolucionaba hacia la *ecuación característica* de la curva de la *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos* (*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*) de Fermat, memoria que contiene la llamada Geometría Analítica de Fermat.

Al vincular los trabajos matemáticos de Vieta y Apolonio, Fermat alumbró su Geometría Analítica que establece un efectivo puente entre la Geometría y el Álgebra, lo que le permitirá la asociación de curvas y ecuaciones, a base de aplicar el Análisis algebraico de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus, definidos, en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas. De este modo Fermat resolverá los problemas del Análisis Geométrico de los antiguos mediante la mecánica operatoria del Álgebra simbólica.

Con la Geometría Analítica de Fermat se alcanzaba el máximo grado de consumación en la aplicación a los problemas geométricos del antiguo método de *Análisis* (de ahí procede el adjetivo Analítica que acompaña al sustantivo Geometría), siendo el Álgebra por su carácter algorítmico el principal instrumento de la aplicación de ese Análisis.

La Geometría Analítica se convierte enseguida, en la mente de Fermat, en una poderosa herramienta heurística de investigación, mediante la cual él mismo resolverá de forma prodigiosa y brillante, numerosos problemas, antiguos y nuevos, en particular numerosas cuestiones de lugares geométricos, máximos y mínimos, tangentes, cuadraturas y cubaturas, centros de gravedad y problemas de rectificación de curvas.

NUEVAS EDICIONES DE LA GEOMETRÍA DE DESCARTES



1. Edición latina de 1695 de van Schooten de *La Geometría* de Descartes.
2. Edición francesa de 1705 de *La Geometría* de Descartes.

A diferencia de las obras de Fermat, *La Geometría* de Descartes tuvo numerosas ediciones, tanto en latín como en francés, algunas de ellas con prolijos comentarios para hacerla más inteligible, es decir, que eran auténticas ediciones críticas. Por ello los rudimentos de Geometría Analítica de *La Geometría* de Descartes recibieron una amplia difusión.

La Edición latina de 1695 de van Schooten contiene entre otros elementos los siguientes:

- Geometria, una cum notis Florimondi De Beaune.
- Francisci à Schooten In Geometriam Renati Des Cartes Commentarii.
- Johannis Huddenii Epistola prima de Reductione *Æquationum*.
- Johannis Huddenii Epistola secunda de maximis et minimis.
- Renati Des Cartes Principia Matheseos Universalis seu Introductio ad Geometriæ Methodum
- conscripta ab. Er. Bartholino. De *Æquationum* Natura, Constitutione, et Limitibus Opuscula Duo.
- Incepta à Florimondo De Beaune ab Erasmo Bartholino.
- Johannis De Witt Elementa Curvarum Linearum edita operà Francisci à Schooten.
- Francisci à Schooten Tractatus de Concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico.

La proyección histórica de la Geometría Analítica cartesiana

Al partir del *Análisis Geométrico* griego como trampolín y punto de arranque y al utilizar el *Arte Analítica* de Vieta como instrumento algorítmico básico, Descartes conduce el *Análisis* a su máximo poder heurístico para la resolución de los problemas geométricos, a base de aunar el estudio analítico con la síntesis algebraica, lo que permitirá, mediante las ecuaciones, transitar de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría. La Geometría Analítica resultante, dotada del simbolismo literal, con todo el potencial de la mecánica algorítmica operatoria de cálculo, manipulación y simplificación propias de las ecuaciones del Álgebra, reemplaza las ingeniosas construcciones geométricas de la rígida, farragosa y retórica *Álgebra Geométrica* de los griegos por sistemáticas operaciones algebraicas que permiten mediante un proceso analítico-sintético de resolución de los problemas, no sólo reconstruir la Geometría clásica con más claridad, flexibilidad, operatividad y versatilidad, sino crear, además, una potente heurística geométrica mediante la cual Descartes pudo plantear y resolver de forma admirable, brillante y prodigiosa problemas difíciles, algunos clásicos –el *Problema de Pappus* y el *Problema de Apolonio*, entre otros–, y otros nuevos como la determinación de las rectas normales a las curvas.

Descartes creará, además, las herramientas geométrico-algebraicas para resolver con eficacia otros muchos problemas como los de lugares geométricos, el estudio de elementos notables de las curvas y los problemas infinitesimales –extremos, tangentes, cuadraturas y cubaturas, centros de gravedad, rectificación, etc.– de gran interés e importancia en los ambientes científicos de la primera mitad del siglo XVII. En este sentido, la Geometría Analítica cartesiana tuvo una decisiva influencia, según veremos, como instrumento clave de la eclosión de multitud de métodos y técnicas infinitesimales, que convergen en la invención del Cálculo Infinitesimal.

Una de estas herramientas fundamentales es precisamente la nueva notación cartesiana. Descartes aplica a los problemas y a las ecuaciones un nuevo y potente simbolismo simplificador, explicativo y resolutorio, que va mucho más allá de la abreviatura cósica iniciada por Diofanto y desarrollada por los algebristas italianos e incluso allende la escritura simbólica de Vieta. Los símbolos y términos de la matemática son el soporte de sus conceptos y métodos, por tanto tienen una gran importancia, y a pesar de la arbitrariedad en la elección de los signos, conviene adoptar un criterio unificador, que al ser adoptado universalmente, facilita la interpretación y la comprensión, ahorra tiempo y espacio, entraña economía de pensamiento y permite una mayor y más rápida difusión. Esto es precisamente lo que consiguió Descartes con los convenios notacionales fijados en *La Geometría*, que han tenido la virtualidad de convertirse en algo poderosamente definitivo, de modo que *La Geometría*, es el primer texto matemático en el que un lector actual no encontraría dificultades con la notación.

Como escribe E.Colerus, en un lenguaje casi místico, en su *Breve Historia de la Matemática* (Vol. II, pág.17, Doncel, Madrid, 1973):

«*La Matemática no es sino una obra mágica del pensamiento, y los espíritus aparecen cuando se les invoca con las fórmulas adecuadas.*»

La notación de Descartes fue la fórmula oportuna para su magno proyecto de reforma que alcanzó a una completa reconstrucción de la Matemática sobre premisas muy sencillas, no geométricas como en Euclides, sino algebraicas. La *Geometría* de Descartes elimina toda una serie de limitaciones que encorsetaban a la Geometría griega:

- Limitación pitagórica de la inconmensurabilidad.
- Limitación platónica de los instrumentos geométricos –regla y compás–.
- Limitación euclídea de la homogeneidad dimensional.
- Limitación tridimensional.
- Limitación de la dependencia de las figuras geométricas.
- Limitación de la imposibilidad de asignar números a las figuras geométricas.

A título de ejemplo sobre lo que introduce la Geometría Analítica en el panorama matemático pensemos en el estudio de las curvas, un tema de importancia esencial en la Geometría de toda época y en particular en los estudios infinitesimales. Las limitaciones algebraicas del Álgebra Geométrica de los griegos, consecuencia de los inconmensurables, hizo imposible la introducción en el mundo griego de nuevas curvas por medio de ecuaciones. Las curvas se obtenían constructivamente mediante intersección de superficies y lugares geométricos y también a través de relaciones de áreas o longitudes, que daban la propiedad de definición de la curva. De esta forma, el elenco de curvas que manejaron los griegos hubo de ser necesariamente muy limitado –*las cónicas* de Menecmo y Apolonio, *la espiral* de Arquímedes, *la cuadratriz* de Hipias o Dinóstrato, *la cisoide* de Diocles, *la hipopede* de Eudoxo, *la concoide* de Nicomedes, y pocas más–.

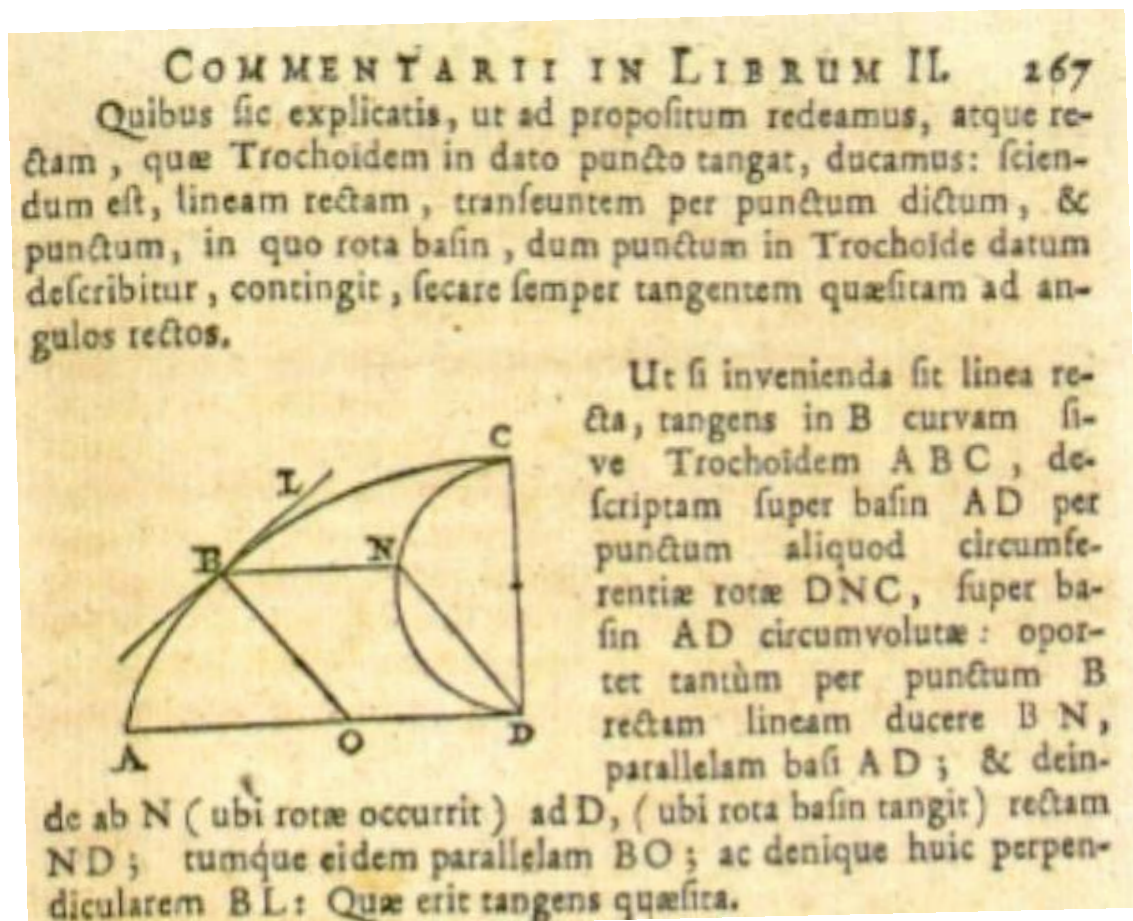
La investigación infinitesimal en los albores del siglo XVII tiene lugar con el planteamiento y resolución de problemas de cuadraturas y tangentes sobre curvas. Cabe decir que pioneros de los métodos y técnicas del Cálculo del siglo XVII, como Kepler e incluso Cavalieri, no tuvieron a su disposición los desarrollos geométricos de Descartes, de modo que el número de curvas que manejaron y a las que podían aplicar las técnicas algorítmicas del Cálculo que iban descubriendo era muy limitado, prácticamente las mismas que conocieron los griegos. Además, todavía manejaron las curvas en el farragoso lenguaje del *Álgebra Geométrica* griega mediante relaciones de áreas y proporciones. El trabajo de Descartes en *La Geometría* abre el camino a la introducción sistemática de nuevas curvas y a un manejo más útil, sencillo y operativo, mediante las ecuaciones de las curvas. En efecto, de acuerdo con el *Principio Fundamental de la Geometría Analítica* las curvas planas están determinadas por la ecuación canónica asociada, y por tanto, por el simple hecho de escribir una ecuación una nueva curva queda definida en el ambiente geométrico para la indagación de problemas infinitesimales vinculados a ella, de modo que aparece en el ambiente matemático de los dos primeros tercios del siglo XVII una ingente cantidad de nuevas curvas que se definen a propósito de la introducción de la Geometría Analítica, entre las que sobresalen: el caracol de Pascal, el folium de Descartes o galande de Barrow, la curva de Lamé, la espiral logarítmica, la kappa-curva, la curva tangentoidal, pero sobre todo las parábolas, hipérbolas y espirales generalizadas o de orden superior –llamadas de Fermat por ser él quien las introdujo– y por encima de todas ellas, en cuanto a importancia, la cicloide, la reina de todas las curvas, llamada la *Helena de la Discordia*, por las polémicas que surgieron sobre cuestiones de prioridad y acusaciones de plagio acerca de la resolución de problemas vinculados a ella. El vasto conjunto de nuevas curvas promueve la aparición de multitud de variadas técnicas algorítmicas infinitesimales al disponer de un amplio material geométrico al que aplicarlas. Se comprende, pues, la amplitud panorámica que sobreviene en el ámbito matemático con la emergencia de la Geometría Analítica.

La propia Geometría Analítica en sí misma era un instrumental algorítmico de primer orden, por eso jugó un papel decisivo en la investigación Infinitesimal. La Geometría Analítica de Descartes permite utilizar la expresión algebraica de la ecuación de una curva para encontrar sus elementos geométricos más notables –diámetros, ejes, centros, etc.– y, en particular, en el terreno infinitesimal resolver los problemas de cuadraturas y tangentes relacionadas con la curva. Es decir, la ecuación de la curva es un elemento esencial para esclarecer las propiedades y encontrar los elementos relevantes de la curva. La Geometría Analítica traslada los problemas infinitesimales de la Geometría al Álgebra, la cual por su carácter operacional, permite, tras la realización de cálculos y en particular la resolución de ecuaciones, regresar a la geometría del problema, para encontrar y solucionar cuestiones geométricas. Como consecuencia, la tarea de probar un teorema o resolver un problema geométrico de índole infinitesimal se conduce de forma muy eficiente a probarlo o resolverlo mediante el Álgebra, de modo que la aplicación de la Geometría Analítica proporciona una potente técnica de resolución de problemas infinitesimales, y algo que es todavía más importante, un poderoso instrumento de investigación geométrica en el ámbito infinitesimal.

La Geometría Analítica desarrollada por Descartes tuvo, pues, un papel decisivo en todo este proceso de alumbramiento de las técnicas del Cálculo del siglo XVII. El impacto del Álgebra tiene lugar no sólo sobre la Geometría sino también sobre el Cálculo Infinitesimal a través de la propia Geometría Analítica, apareciendo como resultados positivos los intentos

de aritmetización del método de exhaustión de los griegos, que conducirá a la utilización incipiente y subrepticia de los límites. Se comprende entonces por qué la aparición de la Geometría Analítica en el horizonte matemático del siglo XVII tuvo una incidencia capital en la aparición de multitud de métodos y técnicas infinitesimales que condujeron al descubrimiento del Análisis Infinitesimal por parte de Newton y Leibniz.

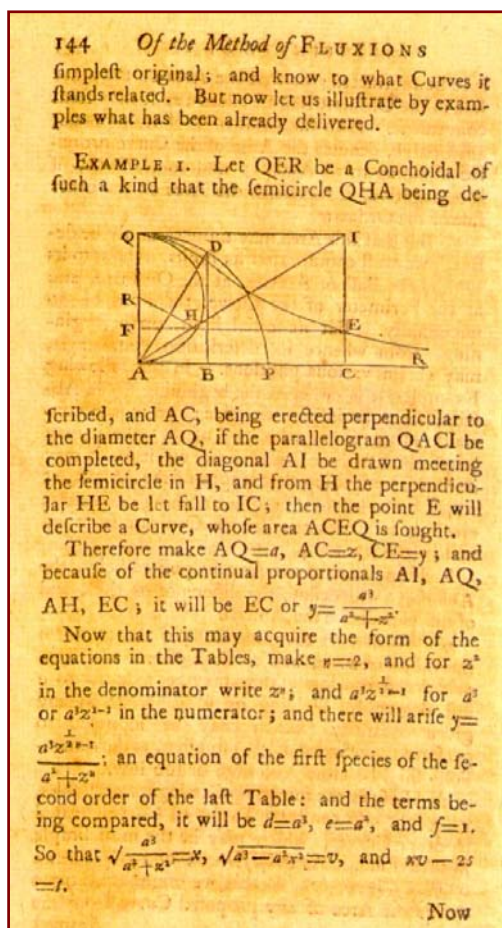
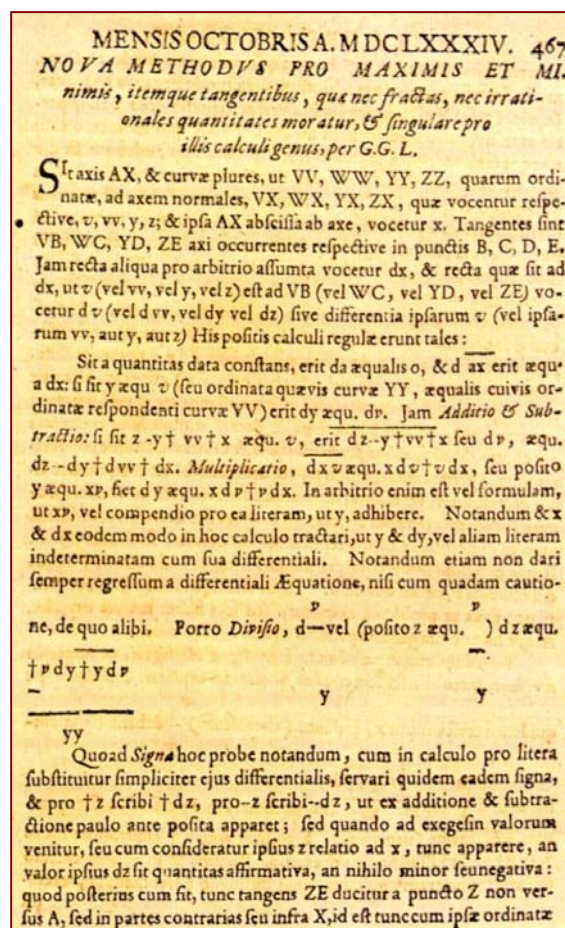
Puede decirse que el Cálculo anterior a Newton y Leibniz es una ingente casuística de métodos heurísticos, aplicados a problemas geométricos específicos, que se resuelven mediante técnicas *ad hoc* vinculadas a las correspondientes figuras geométricas, que desarrollan multitud de resultados particulares que, al traducirlos al lenguaje moderno, muestran los conceptos esenciales del Cálculo, que de alguna manera yacían en ellos, pero de forma tan fragmentaria que sólo se referían a problemas individuales y no a teorías generales, aunque la perspectiva de generalización estaba implícita en esos métodos. Es precisamente la Geometría Analítica de Descartes la que favorece este proceso de búsqueda del algoritmo válido en general e independiente de la estructura geométrica intrínseca de cada problema. La generalidad del Álgebra frente a la especificidad de la Geometría, permite, por ejemplo, que en la traducción geométrico-algebraica en que consiste la Geometría Analítica, cada caso particular del trazado geométrico de la tangente, que es diferente y específico para cada curva, de acuerdo con su naturaleza geométrica, deje de serlo y se pueda aplicar, mediante un proceso analítico, el mismo procedimiento a todas las curvas de las que se conozca su expresión analítica –su ecuación–, es decir, el proceso algorítmico de cálculo de una derivada. He aquí una muestra muy significativa de la trascendencia de la Geometría Analítica como herramienta que simplifica y reduce una extensa tipología de problemas geométricos –el trazado de las tangentes de las diversas curvas– a un único y concreto problema analítico –el cálculo de la derivada–.



Página de la edición de van Schooten de 1695 de *La Geometría* de Descartes.

Se trata de un apunte de van Schooten donde se explica el cálculo cartesiano de la tangente a la cicloide, sin duda la curva más importante sobre la que se ensayaron los métodos y técnicas infinitesimales que aparecieron a lo largo del siglo XVII como consecuencia del desarrollo de la Geometría Analítica de Descartes.

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA Y EL DESCUBRIMIENTO DEL CÁLCULO INFITESIMAL



1. Página de *The Method of Fluxions* de Newton (Londres, 1737), con el trazado de la tangente a la concoide. En esta obra Newton unifica la mayor parte de resultados sobre tangentes y cuadraturas que ocuparon a buena parte de los matemáticos del siglo XVII.
2. Página de *Nova Methodus pro Maximis et Minimis* de Leibniz (Leipzig, 1684), donde aparecen las reglas para derivar sumas, productos y cocientes. Esta obra es considerada como la primera publicación sobre Cálculo Infinitesimal de la historia.

«Apoyándose en hombros de gigantes» como Fermat y Descartes, apurando y exprimiendo la capacidad de unificación y generalización que permitían los procedimientos del Álgebra y de la Geometría Analítica, bajo concepciones y métodos infinitesimales diferentes, Newton y Leibniz fueron capaces de separar la ganga geométrica de los resultados de sus antecesores y encontrar el principio general que les permitiría reducir las operaciones fundamentales del Cálculo Infinitesimal a una operativa universalmente válida, concibiendo la idea de sustituir todas las operaciones de carácter geométrico involucradas en el cálculo de tangentes, por una única operación analítica, la derivación del Cálculo Diferencial, que resolvería, además por inversión –cálculo de la antiderivada o primitiva– los problemas de cuadraturas del Cálculo Integral, a través del *Teorema Fundamental del Cálculo*, que vincula ambos problemas y permite la obtención de cuadraturas mediante la resolución del problema inverso de la tangente.

En la brillante operación realizada por Newton y Leibniz, que se ha venido en llamar el descubrimiento del Cálculo Infinitesimal, y que es sin lugar a dudas, uno de los logros más importantes en la Historia del Pensamiento matemático, coadyuvó de forma decisiva la creación y aplicación de un simbolismo que propiciara traducir en fórmulas los resultados y en algoritmos los métodos, a base de utilizar los recursos algebraicos de la Geometría Analítica para independizar el discurso matemático de las figuras geométricas y con todo ello reconocer y aislar los conceptos fundamentales del Cálculo Infinitesimal y crear un cuerpo de doctrina dotado de algoritmos eficaces, es decir, funcionando como un Cálculo operacional que resuelve todos los problemas planteados anteriormente, mediante procedimientos uniformes y con una proyección a nuevos y más complicados problemas, como un potente instrumento de investigación. En palabras del propio Leibniz, se trataba de hacer con las técnicas del Cálculo lo mismo que había hecho Vieta con la Teoría de Ecuaciones y Descartes con la Geometría.

Con la fusión del *Análisis Geométrico* griego y la síntesis algebraica de Vieta, Descartes da a luz la Geometría Analítica, algo auténticamente revolucionario que consigue aniquilar, en gran parte, su raíz primigenia: la propia Geometría griega. Es la primera vez en la Historia moderna que se tiene el convencimiento de haber superado a los antiguos en algún aspecto. A este respecto, pueden ser muy oportuno recordar las reflexiones de O. Spengler, matemático y ensayista de éxito, de los años 20 del siglo pasado, en su libro *La decadencia de Occidente* donde desarrolla su teoría de la Historia como una sucesión de ciclos culturales. Para Spengler, no hay una Matemática que se desarrolle linealmente y cuyo contenido vaya acumulándose a través de los siglos, sino que hay tantas Matemáticas como culturas, como ciclos históricos y cabría distinguir entre otras, «la *Matemática antigua*», de la cultura griega y la «*Matemática moderna*» de la cultura occidental y cristiana, esencialmente distintas y que serían fruto y consecuencia de los componentes culturales de cada época y al mismo tiempo un factor decisivo en la configuración global de las mismas. En el capítulo I de la citada obra, titulado «*El sentido de los números*», Spengler (1998, p.144): escribe:

«No hay una Matemática, hay muchas Matemáticas. [...] El espíritu antiguo creo su Matemática casi de la nada. El espíritu occidental, histórico, había aprendido la Matemática antigua, y la poseía, aunque sólo exteriormente y sin incorporarla a su intimidad; hubo, pues, de crear la suya modificando y mejorando, al parecer, pero en realidad aniquilando la matemática euclidiana, que no le era adecuada. Pitágoras llevó acabo lo primero; Descartes lo segundo. Pero los dos actos son, en lo profundo, idénticos.»

En efecto, Descartes parte de la Geometría griega para construir algo completamente nuevo, que se convertirá en una Matemática universal, que, en particular apartará a la Geometría del eje central de la Matemática y la destrona de forma definitiva de su rango de reina de la Matemática de modo que la Matemática algebrizada de Descartes desplazará y ocupará el lugar de la Matemática geometrizada de los griegos. Descartes trastoca completamente la jerarquía de las diversas partes de la Matemática, de modo que en su pensamiento la Aritmética y el Álgebra no sólo preceden lógicamente a la Geometría, sino que, además, son superiores en esencia, porque al ser las ciencias de las magnitudes, son mucho más generales y aplicables, entre otros ámbitos al de la Geometría. Es más con Descartes el Álgebra figura en primera línea como técnica, como método de combinación y construcción, de tal modo que es el cálculo algebraico el que legitima los resultados de la nueva Geometría Analítica, que destruye los escrúpulos de los griegos relativos a la definición de las curvas y hace inútil la teoría de la construcción geométrica, que queda sustituida por la síntesis de la construcción algebraica. Así pues, Descartes, con su Geometría Analítica, otorga al Álgebra el gobierno soberano de las Matemáticas, hasta que en el siglo XIX Gauss afirme que es la Aritmética quien debe ocupar el trono de esta ciencia.

La importancia que la posteridad ha concedido a *La Geometría* de Descartes no coincide con los aspectos que interesaban a su autor, porque la idea esencial de futuro de la Geometría Analítica es la tan reiteradamente apuntada de la asociación de ecuaciones y curvas en un sistema de coordenadas, pero como bien señala Kline (1992, vol.1. p.419):

«Para Descartes esto [asociar ecuación y curva] no era más que un medio para un fin, a saber la resolución de problemas de construcciones geométricas.»

De hecho las construcciones geométricas que con tanto esmero describe Descartes en *La Geometría* desde el mismo comienzo de la obra han ido perdiendo importancia, porque a diferencia de lo que sucede en la Matemática griega y en la del siglo XVII, la constructibilidad ha dejado de ser una condición necesaria para la existencia. No obstante, más allá del acento en la construcción geométrica de las soluciones de las ecuaciones, por fortuna, Descartes también dio unos usos alternativos a las ecuaciones de las curvas, como en la resolución del *Problema de Pappus* (G.AT,VI,377-387) y en la determinación de las normales a las curvas (G.AT,VI,412-423), donde se sirve de las propiedades geométricas de las curvas para «*construir*» las raíces comunes de las ecuaciones determinando los puntos

de encuentro de las curvas correspondientes; y a la inversa, partir de las ecuaciones y de sus raíces para obtener los puntos de intersección de las curvas correspondientes. Por eso estos dos problemas han ocupado siempre un lugar distinguido en todo estudio de *La Geometría* de Descartes. De hecho aquí emerge el segundo Principio fundamental de la Geometría Analítica, que al sintetizar los desarrollos de Descartes (G.AT,VI, 417), se expresaría en la forma:

«El problema geométrico de la intersección de curvas se reconduce al problema algebraico de resolución de sistemas de ecuaciones.».

La solución de Descartes al problema del trazado de las normales a una curva en un punto se considera uno de los más brillantes logros del método cartesiano, y es, sin duda, uno de los más conocidos y apreciados. Descartes despliega una eficaz alfombra que enlaza la Geometría y el Álgebra –análisis geométrico de los problemas, síntesis algebraica del análisis mediante las ecuaciones y finalmente y traducción geométrica de los resultados algebraicos–. Descartes va escribiendo un verdadero diccionario reversible entre los dos lenguajes, el geométrico y el algebraico, que traduce no sólo lo gramatical –puntos por coordenadas, curvas por ecuaciones–, sino que va mucho más allá al alcanzar el dominio sintáctico –relaciones entre los elementos geométricos, por ejemplo, intersecciones de curvas, se traducen en relaciones entre los correspondientes elementos algebraicos, mediante sistemas de ecuaciones–. No es extraño que, con una retórica altisonante, Descartes considere que el problema del trazado de las normales a una curva en un punto es el más importante, no sólo de cuantos ha resuelto sino de cuantos aspirara a descubrir en Geometría (G.AT,VI, 413). Realmente es una de las muestras más representativas de las raíces cartesianas de la Geometría Analítica por la inmensa capacidad que desarrolla Descartes para establecer caminos reversibles que conectan una y otra vez el Álgebra y la Geometría, mediante los que Descartes aplica toda la potencia algorítmica del Álgebra para resolver problemas geométricos, que en ello consiste la virtualidad de la Geometría Analítica.

A pesar de ciertas reticencias por parte de Pascal, Barrow, Hobbes, e incluso Newton en la aceptación de los nuevos métodos de la Geometría Analítica de Descartes, la extensión de sus aplicaciones a todos los ámbitos de la Matemática fue cada vez más inexorable. A ello contribuyó sobremanera la difusión de las diversas ediciones críticas de van Schooten, plenas de comentarios explicativos, aclaraciones complementarias y apostillas extensivas de los métodos cartesianos del propio editor y de otros matemáticos.

En una de las entradas de la Enciclopedia, la que define el concepto de *Curva*, D'Alembert expresa la idea básica de la asociación de curvas y ecuaciones de la Geometría Analítica de Descartes en relación con los lugares geométricos de los antiguos:

«Descartes es el primero que haya pensado en expresar las líneas curvas por medio de ecuaciones. Esta idea sobre la que se funda la aplicación del Álgebra a la Geometría ha sido muy feliz y fecunda. Está claro que al resolver la ecuación de una curva se obtiene uno o varios valores de la ordenada y para una misma abscisa x , y que, en consecuencia, una curva trazada no es otra cosa que la solución geométrica de un problema indeterminado, es decir, que tiene una infinidad de soluciones: es lo que los antiguos llamaban lugar geométrico. Así pues, aunque ellos no pudieron tener la idea de expresar las curvas por medio de ecuaciones, habían visto, sin embargo, que las curvas geométricas no eran otra cosa que el lugar, es decir la sucesión de una infinidad de puntos que satisfacían a la misma cuestión. Por ejemplo, que el círculo era el lugar de todos los puntos que describen los vértices de los ángulos rectos, que se pueden formar sobre una misma base dada tomada como diámetro del círculo, y así para las demás curvas.»

Aunque la referencia de D'Alembert no hace ningún honor a su compatriota Fermat, tiene el interés de conocer el concepto que se tenía de *La Geometría* de Descartes, ciento treinta años después de su publicación.

En las dos centurias siguientes a la de Fermat y Descartes, matemáticos de la talla de Euler, Monge, Lagrange, Lacroix, etc. imprimirán a la Geometría Analítica un ingente desarrollo hasta situarla en el umbral de la Geometría Analítica moderna –la que se imparte hoy académicamente–, salvo en lo que se refiere al instrumento vectorial, que la convertirá en una de las vetas más fructíferas del pensamiento matemático, en un instrumento responsable de la increíble pujanza y del impresionante progreso que ha desarrollado la Matemática desde entonces. Por ejemplo, más allá del Análisis Matemático, del encuentro de esta materia con la Geometría Analítica aplicada al estudio de curvas y superficies surge, sobre todo tras los trabajos de Euler y Monge, la Geometría Diferencial.

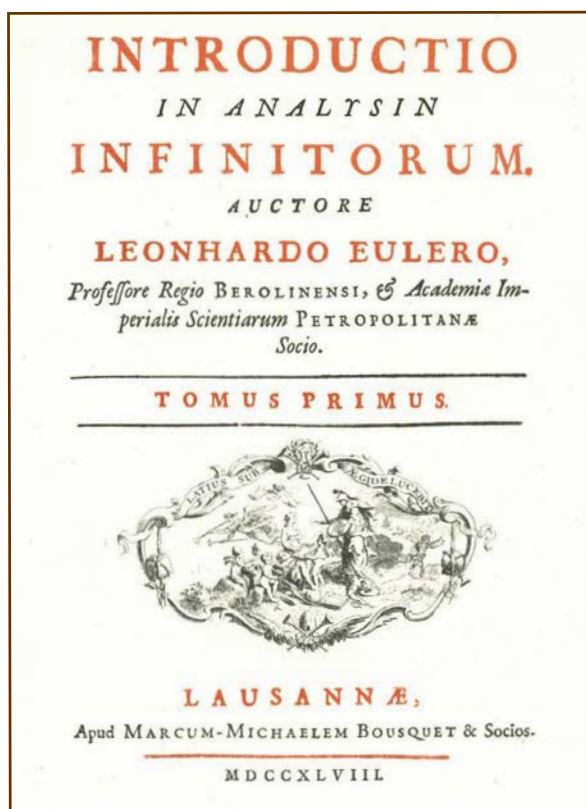
La Geometría Analítica goza de una serie de virtudes que hacen de ella una cómoda y didáctica herramienta matemática para el abordaje de los problemas geométricos. Por una parte permite que las cuestiones geométricas puedan formularse algebraicamente y que los objetivos geométricos puedan alcanzarse por medio del Álgebra, e inversamente, facilita la interpretación geométrica de los enunciados algebraicos, lo que propicia una percepción más intuitiva de su significado, con la posible apertura a la visión de nuevos problemas y conclusiones. Así lo ve Lagrange cuando escribe en sus *Leçons élémentaires de mathématiques* (1795):

«Mientras el Álgebra y la Geometría han estado separadas, su progreso ha sido lento y sus aplicaciones limitadas; pero cuando estas dos ciencias han sido vinculadas, se han prestado su fuerza mutuamente y han caminado juntas hacia la perfección.»

Ilustremos estas ideas de Lagrange mediante las originales motivaciones de Descartes, es decir, la asociación de curvas y ecuaciones. Toda curva construida según una regla geométrica se puede representar mediante su propia ecuación, que caracteriza a la curva y por ello es diferente de la que corresponde a otra curva distinta. De este modo, las propiedades geométricas de una curva pueden ser descubiertas sin más que examinar el comportamiento algebraico de su ecuación. Los vínculos entre curvas, por ejemplo, si se cortan o si son tangentes, se pueden predecir estudiando las relaciones algebraicas que existen entre sus ecuaciones. Por tanto, una vez que de la definición geométrica o cinemática de una curva hayamos derivado la ecuación algebraica que tiene asociada, el establecimiento de las propiedades geométricas restantes de la curva es una cuestión de cálculo algebraico. El poder algorítmico de la máquina simbólica creada por el Álgebra aplicado a la Geometría convierte a la Geometría Analítica en un magnífico instrumento de investigación. Así lo describe de forma magistral el historiador y filósofo de la ciencia Hull (1981, p.268):

«Su mérito consiste en que capacita para hallar resultados geométricos mediante un procedimiento sistemático que, si se aplica bien, no puede prácticamente fallar. El descubrimiento de nuevos teoremas particulares que en el caso de los métodos griegos, dependía siempre de la llama genial de la imaginación [que se fatiga según Descartes] o bien de la buena suerte [de la idea feliz], pasa a la esfera de la competencia profesional ordinaria. El progreso de la Geometría, esencial para el de la ciencia, se hace ahora mucho menos romántico, pero mucho más rápido de lo que fue. La Geometría Analítica ha afectado probablemente a la vida humana más profundamente, aunque menos violentamente, que la máquina de vapor o el aeroplano. La creación de nuevos métodos generales es de mucha mayor importancia que el descubrimiento de conocimientos particulares, por interesantes o útiles que éstos sean.»

EULER, EL SHAKESPEARE DE LAS MATEMÁTICAS



Portada de *Introductio in Analysin infinitorum* (1748) de Euler.

En la *Introductio* Euler trata sistemáticamente la Geometría con coordenadas Euler da un paso de gigante en la sistematización de la Geometría Analítica de dos y de tres dimensiones y es el introductor como Descartes de nuevas y definitivas notaciones.

De acuerdo con Descartes, Euler reconoce que «La naturaleza de una curva cualquiera viene dada por una ecuación en dos variables, x, y ». Euler sustituyó el término cartesiano de *construcción* por el de gráfico. La *Introductio* es uno de los primeros tratados donde se dan numerosos gráficos de curvas específicas dadas por sus ecuaciones indicando claramente las unidades utilizadas en el eje de abscisas. Quizá lo más sobresaliente de la *Introductio*, desde el punto de vista del desarrollo de la Geometría Analítica, sea el tratamiento general de los problemas. A partir de Euler surge una de las grandes ventajas de los métodos analíticos modernos frente al enfoque sintético de los antiguos: muchos casos específicos de las cuestiones geométricas pueden ser incluidos en una formulación global. Este aspecto de generalidad que permitía el Álgebra frente a la singularidad de cada problema en la Geometría de los griegos era uno de los rasgos más relevantes señalados por Descartes, pero había sido en parte pasado por alto durante la siguiente centuria, incluso en cuestiones muy básicas como por ejemplo en el estudio de la ecuación de la recta, que se subdividía en numerosos casos diferentes. Euler manejó ya una única forma general: $\alpha x + \beta y - a = 0$. Euler realizó un estudio exhaustivo de las cónicas y las cuádricas que alcanzó a su clasificación.

En Geometría elemental el resultado más famoso de Euler es la conocida *Recta de Euler*, sobre la que se sitúan tres de los puntos notables de un triángulo, el Ortocentro, el Baricentro y el Circuncentro, resultado de la más bella Geometría, que ignorado por todas las generaciones anteriores de geómetras, de Euclides a Descartes, de Apolonio a Fermat y de Arquímedes a Newton, fue obtenido por Euler como magistral aplicación de la Geometría Analítica.

La *Introductio* de Euler es una de las tratados más importantes de toda la Historia de la Matemática. C.B. Boyer dice sobre ella en su obra *History of Analytic Geometry* (Scripta Mathematica, New York, 1956), p.180:

«La *Introductio* es probablemente el libro de texto más influyente de los tiempos modernos. Es el trabajo que convirtió el concepto de función en básico para las Matemáticas [...]. La *Introductio* es para el Análisis elemental lo que Los Elementos de Euclides es para la Geometría.»

W.Dunham escribe: «Euler es el Shakespeare de las Matemáticas» (El Universo de las Matemáticas, Pirámide, Madrid, 1995, p.103).

Decía Euler: «Mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del cálculo algebraico».

LOS ARTÍFICES DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA MODERNA

MONGE Y LAGRANGE



Monge y Lagrange son dos de los matemáticos mas importantes de la época de la Revolución francesa. Ambos dieron un impulso inusitado a la Geometría Analítica.

Monge escribe algunas memorias, a modo de libros de texto para los cursos que se imparten en la Escuela Politécnica, que son auténticos manuales de Geometría Analítica. Sobresalen *Feuilles d'analyse appliquée a la géométrie* (1795) y *Application de l'algèbre à la géométrie* (1802), donde da una forma bastante definitiva a la Geometría Analítica. Además de generalizaciones de teoremas elementales como el Teorema de Pitágoras, aparecen las fórmulas de traslación y rotación de ejes para las ecuaciones del cambio de ejes de coordenadas, el tratamiento habitual de rectas y planos, la determinación del plano que pasa por tres puntos mediante coeficientes indeterminados, los cosenos directores, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad, los ángulos entre rectas y planos, la determinación de los planos principales de una cuádrica, etc. Monge extendió para el tetraedro ortocéntrico el resultado de la *Recta de Euler* demostrando que el Baricentro está a doble distancia del Ortocentro que del Circuncentro. Ante la impresionante profusión de importantes resultados sobre Geometría Analítica obtenidos por Monge, no es extraño que Lagrange asombrado exclamara:

«Con sus aplicaciones del Análisis a la Geometría este demonio de hombre [Monge] conseguirá hacerse inmortal».

Lagrange también realizó importantes contribuciones a la Geometría Analítica, siempre bajo la filosofía de aplicar el carácter algorítmico del Álgebra para superar toda representación concreta. En sus desarrollos analíticos, su formulación, de una brillante elegancia, ya está muy próxima a la escritura del Álgebra Lineal, por ejemplo en cálculos que se asemejan a aspectos matriciales y determinantes. En el artículo *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* (1775), Lagrange resolvió, de forma puramente analítica, diversas cuestiones ya conocidas sobre la geometría del tetraedro: las fórmulas, en función de las coordenadas de los vértices, del área, centro de gravedad y volumen, así como los centros y radios de las esferas inscrita y circunscrita. Al desconocer la ecuación normal del plano, Lagrange obtiene las alturas como problemas de mínima distancia mediante los recursos del Cálculo Infinitesimal. Estos resultados están redactados de tal forma analítica que pueden ser entendidos sin aludir a figura alguna, como el propio Lagrange escribe en el artículo:

«Me siento halagado por el hecho de que las soluciones que voy a dar serán ciertamente de interés para los geómetras tanto por los métodos como por los resultados. Estas soluciones son puramente analíticas y pueden entenderse incluso sin figuras.»

Y efectivamente, no hay ni una figura a lo largo de este trabajo, lo que prefigura la ulterior concepción y estructura de la Geometría Analítica.

Con los trabajos mencionados de Monge y Lagrange, que para algunos historiadores representan una auténtica «Revolución analítica», la Geometría Analítica se convirtió en una rama de las Matemáticas independiente y cerrada, muy próxima al enfoque actual en cuanto a los métodos y la notación, salvo en lo que se refiere a las cuestiones vectoriales.

A partir de Descartes habrá dos tipos de tratamiento de los problemas geométricos que darán lugar a dos Geometrías, la Analítica, que aplicará el nuevo lenguaje algebraico y la Sintética, que prescindirá del mismo. Gracias al lenguaje analítico podrán resolverse problemas para los que el lenguaje geométrico puro era impotente, como hallar la normal o la tangente a una curva, calcular el área encerrada por una curva, máximos y mínimos, y demás problemas infinitesimales, cuya resolución se inicia en simultaneidad con el trabajo cartesiano. Pero aunque un problema pueda ser tratado de las dos formas, la analítica dependerá menos de la geometría de la figura y por tanto será más simple y más general. Por ejemplo, para demostrar que las alturas o mediatrices de un triángulo se cortan en un punto, en Geometría Sintética hay que considerar por separado la forma del triángulo según los ángulos, porque ello condiciona si la intersección tiene lugar en el interior o en el exterior del triángulo. En Geometría Analítica, los dos casos se consideran de consuno.

Las maravillosas virtudes de la Geometría Analítica, ponderadas por todos los grandes matemáticos a partir de Descartes, no suponen ni obligan a abandonar la Geometría Sintética, simplemente el profesional sabe que hay dos métodos geométricos y utilizará uno u otro según el objetivo del problema o según el gusto y el sentido estético.

¿Por qué renunciar a las diversas herramientas del taller geométrico?

Por ejemplo, el gran maestro Euler, en un pequeño artículo de 1747 que lleva el poco original título de *Variae demonstrationes geometricae*, aplica Geometría Sintética pura para demostrar, con una elegancia incomparable, la clásica y famosa *Fórmula de Herón* para el área del triángulo en función de los lados (Dunham, 2000, p.215). Pero en otro artículo de 1767, haciendo gala de una increíble intuición geométrica y de una audaz perseverancia algebraica, Euler descubre y demuestra, con la más bella y brillante aplicación de Geometría Analítica, el resultado que ha pasado a los manuales de Geometría con el nombre de *Recta de Euler*:

«En cualquier triángulo el Ortocentro, el Baricentro y el Circuncentro están sobre la misma recta. Además, el Baricentro está dos veces más lejos del Ortocentro que del Circuncentro.»

Conocidos ambos ejemplos, podemos decir que la versatilidad analítica, sintética algebraica, geométrica, teórica y práctica de Euler no tiene límites. Las dos demostraciones eulerianas podrían representar en su propia persona a los dos bandos, el analítico y el sintético, enfrentados en una controversia que se remonta al umbral de la aplicación de los métodos cartesianos. Por fortuna, para los grandes artífices de la Matemática, como el propio Euler o Monge, la polémica es de lo más estéril y debe ceñirse a cuestiones de tipo exclusivamente estético, sin elevarla a juicios de valor acerca de cuál de las dos Geometrías es superior, aunque se esté de acuerdo en que, ciertamente, por el automatismo del Álgebra Simbólica que se aplica en la Geometría Analítica, la Geometría Sintética, como dice W.Dunham (*Euler, el maestro de todos los matemáticos*. Nivola, Madrid, 2000. Cap.7. pp.229-230):

«requiere a menudo un punto de intuición, que habitualmente se conoce como inspiración. [...] ¿Cómo sabía Euler qué hacer [en uno y otro problema]. En última instancia, la respuesta a esta pregunta se halla en el misterioso territorio de la imaginación humana. [...] Por supuesto, uno puede preguntarse si la Geometría Analítica es realmente Geometría. Carente de gracia y elegancia, dependiente de lo que Carnot llamó "los jeroglíficos del Análisis", ¿no es una mera aplicación de una fuerza algebraica inexorable?»

La fuerza incuestionable de la Geometría Analítica y su generalidad e independencia de la «*idea feliz que trae la divina inspiración*», permite entender que, por ejemplo, el discípulo de Monge, Poncelet, uno de los artífices de la Geometría Proyectiva moderna, autor de la importante obra *Traité des propriétés projectives des figures* (1822), y no precisamente un gran admirador de la Geometría Analítica, escribiera:

«Mientras la Geometría Analítica ofrece su característico método general y uniforme como forma de proceder en la resolución de problemas [...], la otra [la Geometría Sintética clásica] actúa al azar y depende completamente de la sagacidad de los que la emplean.»

Por la misma época, Lacroix, el matemático y profesor que más contribuyó a difundir la Geometría Analítica, formula, en su *Traité de calcul* (1810), un punto de vista próximo al actual:

«Obviando todas las construcciones geométricas se hará ver al lector que existe una manera de considerar la geometría que se podría llamar geometría analítica, y que consiste en deducir las propiedades de la extensión del mínimo número posible de principios por métodos puramente analíticos, de la misma manera que ha hecho Lagrange en su mecánica con respecto a las propiedades del equilibrio y del movimiento.»

Aun así, Lacroix fue algo reacio a titular sus obras con el nombre de «*Geometría Analítica*». Aunque este nombre había ido apareciendo subrepticamente a lo largo del siglo XVIII, parece que el primero que lo utiliza como título es Lefrançais en una edición de sus *Essais de géométrie* de 1804 y Biot en la edición de 1805 de sus *Essais de géométrie analytique*.

La Geometría Analítica se ha convertido en una poderosa herramienta de investigación y exploración científica, en el más útil instrumento para resolver con elegancia, rapidez y plenitud heurística las cuestiones geométricas. Al fundir en un único acto intelectual el descubrimiento y la demostración –el *ars inveniendi* y el *ars disserendi*– la Geometría Analítica permite alcanzar un objetivo básico que se había propuesto su fundador, Descartes:

«Ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación» (DM.AT,VI,17–18).

La Geometría Analítica, de origen remoto en el Análisis Geométrico de los griegos con su incipiente uso retórico de coordenadas en Apolonio y Pappus y su apoyo en la mecánica algorítmica del Álgebra simbólica de Vieta, domina el pensamiento matemático desde la época de Descartes hasta nuestros días. El empleo sistemático de las coordenadas tratadas con el cálculo algebraico, es una potente herramienta algorítmica de resolución de problemas geométricos, un método de un poder y una universalidad tan eficientes en la Matemática, que supera cualquier otro instrumento anterior, y más allá de la Geometría y de la Matemática, la Geometría Analítica ha revolucionado todas las ciencias relacionadas con el tiempo y el espacio, a través del concepto de función, la herramienta más importante para el conocimiento y dominio de la naturaleza. Como escribe Kline (1992, vol.1, p.425):

«La Geometría Analítica cambió la faz de las Matemáticas».

La fuerza algebraica inexorable de la Geometría Analítica, su universalidad y su autonomía de la «*fortuna de la inspiración*», democratiza la Geometría y la Matemática en general y pone al servicio de la Humanidad, es decir, de cualquier persona normal, de todo escolar que tenga pequeños rudimentos de Álgebra, un eficaz instrumento que potencia la intuición, facilita la investigación y promueve que no sea imprescindible un gran talento y una gran sagacidad y sutileza intelectual en la resolución de los problemas geométricos. Por eso nos permitimos completar la frase anterior de Kline para sentenciar:

«La Geometría Analítica cambió la faz de las Matemáticas y de la Educación matemática.»

Bibliografía

Obras de Descartes

1. DESCARTES, R.: *Vie et Oeuvres de Descartes*. Publiées par C. Adam y P. Tannery. 13 volúmenes. Léopold Cerf, imprimeur Paris, 1897-1913.
2. DESCARTES, R.: *La Geometría*. Espasa-Calpe. Buenos Aires, 1947.
3. DESCARTES, R.: *The Geometry*. Dover, New York, 1954.
4. DESCARTES, R.: *Oeuvres de Descartes*. Publiées par C. Adam y P. Tannery. 12 volúmenes. Librairie philosophique J. Vrin. Paris, 1964-74.
5. DESCARTES, R.: *Discurso del Método / Reglas para la dirección de la mente*. Orbis. Barcelona, 1983.
6. DESCARTES, R.: *Reglas para la dirección del espíritu*. Alianza Editorial, 1034, Madrid, 1989.
7. DESCARTES, R.: *Discurso del Método*. Alianza Editorial, 736, Madrid, 1991.
8. DESCARTES, R.: *La Geometría*. Institut d'Estudis Catalans. Barcelona, 1999.
9. DESCARTES, R.: *Discurso del Método / Meditaciones Metafísicas*. Austral. Madrid, 2002.

Obras sobre Descartes

10. ÁLVAREZ, C.: *Descartes y la ciencia del siglo XVII*. Siglo XXI. México, 2000. Caps. 1, 3, 4.
11. CHICA, A.: *Descartes, Geometría y Método*. Nivola. Madrid, 2001.
12. CROMBIE, A. C.: *Grandes Matemáticos. R. Descartes*. Investigación y Ciencia. Cap. 3. 18-24. Barcelona, 1995.
13. GARIN, E.: *Descartes*. Crítica, Barcelona, 1989.
14. GÓMEZ PIN, V.: *Descartes*. Barcanova. Barcelona, 1984.
15. MARITAIN, J.: *Le songe de Descartes*. Buchet/Chastel. Paris, 1922.
16. RODIS-LEWIS, G.: *Descartes et le Rationalisme*. PUF. Paris, 1996.
17. ROSSELLINI, R.: *Cartesius*. RAI, una produzione Orizzonte 2000. 180'.
18. SIRVEN, J.: *Les années d'apprentissage de Descartes*. Albi. Paris, 1928.
19. SHEA, W. R.: *La magia de los números y el movimiento: la carrera científica de Descartes*. Alianza Universidad, 746, Madrid, 1993.
20. TURRÓ, S.: *Descartes. Del Hermetismo a la nueva Ciencia*. Anthropos. Barcelona, 1985.
21. VALENSIN, A.: *Imágenes de Descartes*. Cuadernos Taurus. Madrid, 1963.
22. VUILLEMIN, J.: *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*. PUF. Paris, 1987.
23. WILLIAMS, B.: *Descartes*. Catedra, Teorema, Madrid, 1996.

Obras originales sobre La Matemática Griega

24. EUCLIDES: *Elementos*. Traducción y notas de M. L. Puertas. Gredos, Madrid, 1996.
25. HEAT, T. L.: *The thirteen books of The Elements*. 3 Vols. Dover, New York, 1956.
26. VER EECHE, P.: *Les Coniques d'Apolonius de Pergue*. Blanchard, Paris, 1959.
27. VER EECHE, P.: *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques*. Blanchard, Paris, 1959.
28. VER EECHE, P.: *Les Oeuvres complètes d'Archimède*. Vaillant-Carmanne, Liège, 1960.
29. VER EECHE, P.: *Pappus d'Alexandrie. La Collection Mathématique*. Blanchard. Paris, 1982.
30. VERA, F.: *Científicos griegos* (Ediciones en español de *Los Elementos* de Euclides, *Las Cónicas* de Apolonio, *La Aritmética* de Diofanto y *La Colección Matemática* de Pappus). Aguilar, Madrid, 1970.

Obras originales de otros autores

31. VIETA: *Introduction a l'Art Analytique*. Traduit par M. F. Ritter. 1867.
32. VIETA: *The Analytic Art*. Traslated by T. R. Witmer. The Kent University Press, Ohio, 1983.
33. VIETA: *Oeuvres Mathématiques*. Traduction du latin in français par J. Peyroux. Blanchard, Paris, 1991-92.
34. EULER, L.: *Introducción al Análisis de los infinitos*. Edición crítica con facsímil de A. Durán de la obra de Euler *Introductio in Analysin Infinitorum*. SAEM Thales, RSME, Sevilla, 2003.
35. FERMAT, P.: *Oeuvres*. 4 vols. C. Henry, P. Tannery, eds. Gauthier-Villars. Paris, 1891-1912.

Obras generales de Historia de las Matemáticas

36. BELL, E. T.: *Les grands mathématiciens*. Payot. Paris, 1950. Caps. 3, 4.
37. BELL, E. T.: *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica. México, D.F., 1985. Caps. 3, 6, 7.
38. BOYER, C. B.: *History of Analytic Geometry*. Scripta Mathematica. Yeshiva Univ. New York, 1956.
39. BOYER, C. B.: *Historia de las Matemáticas*. Alianza Universidad. Madrid. 1986. Caps. 4, 7, 9, 11, 16, 17, 21, 22.

40. CAJORI, F.: *A History of Greek Mathematics*. The MacMillan Company. Londres, 1919. Cap.11.
41. CAJORI, F.: *A History of mathematical notations*. Dover, New York, 1983.
42. COLERUS, E.: *Breve historia de las Matemáticas*, Vol.2, Cap.1. Doncel. Madrid, 1972.
43. DAINVILLE, F.: *L'éducation des jésuites (XVI-XVII siècles)*. Editions de minuit. París, 1978. Cap.3
44. D'ALEMBERT, J.: *Discurso preliminar de la Enciclopedia*. Losada, Buenos Aires, 1954.
45. D'ALEMBERT, J.: *Discurso preliminar de la Enciclopedia*. Orbis, Barcelona, 1984.
46. DEDRON, P.: *Mathématiques et Mathématiciens*. Magnard, París, 1959. Cap.X.3.
47. DUNHAM, W.: *Euler, el maestro de todos los matemáticos*. Nivola, Madrid, 2000. Cap.7.
48. EVES, H.: *An Introduction to the History of Mathematics*. CBS College Publishing, New York, 1983. Caps. 5,6,10.
49. EVES, H.: *Great Moments in Mathematics*. The math association of America, 1977. Vol.1, Cap.23.
50. GELFAND, E.: *EL método de las coordenadas*. MIR, Moscú, 1981
51. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII*. Alianza. Madrid, 1992. Cap.1.2.
52. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *El Pensament geomètric en el món grec*. ICE. Universitat de Barcelona, 1996. Caps. 8,10,12.
53. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *La Matemática de la Revolución Francesa*. Seminario Orotava de Historia de la Ciencia, Actas, año II, Las Palmas, 1997.
54. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *Matemáticas y matemáticos en el mundo griego (en El legado de las Matemáticas. De Euclides a Newton. Los genios a través de sus libros)*. Consejería de Cultura. Junta de Andalucía. Sevilla, 2000.
55. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia. Tenerife, 2003.
56. HEAT, T.L.: *A History of Greek Mathematics*. 2 Vols. Dover, New York, 1981. Caps.5,6,9,10,11,14,19,20.
57. KLEIN, J.: *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. Dover, New York, 1992. Caps.10,11.
58. KLINE, M.: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. 3 Vols. Alianza Univ. Madrid, 1992. Caps.3,4,5,15,23.
59. LABRADOR, C.: *La ratio studiorum de los Jesuitas*. Universidad Pontificia de Comillas, Madrid, 1986.
60. LORIA, G.: *Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique*. Gauthiers-Villars, París, 1929. Caps.2,3.
61. MALET, A.: *El Álgebra en el período renacentista. La recuperación de los clásicos griegos*. PPU. Barcelona, 1989. Caps.1,2, Ap.1,3,4.
62. MONTESINOS, J (Compilador): *Historia de la Geometría griega*. Seminario Orotava de Historia de la Ciencia. Tenerife, 1992.
63. MONTESINOS, J.: *Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*. Síntesis. Madrid.2000. Caps.1,6.
64. MONTUCLA, J.F.: *Histoire des Mathématiques*. Tomo II, Libro II, Cap.V. Blanchard. París, 1968.
65. NICOLAU, F.: *La Matemàtica i els matemàtics*. Claret, Barcelona, 2000. Cap.29.
66. REY PASTOR, J.; BABINI, J.: *Historia de la Matemática*. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1951. Caps. III.19, III.22, VI.33.
67. REY PASTOR, J.; BABINI, J.: *Historia de la Matemática*. Gedisa, 2 Vols. Barcelona, 1984. Caps. 3,4,7,8,9.
68. RÍBNIKOV, K.: *Historia de las Matemáticas*. MIR, Moscú, 1974. Cap. 5.2.
69. ROUSE BALL, W.: *Histoire des Mathématiques*. Libr. scientifique A.Hermann, París, 1906. Cap.15.
70. SCOTT, J.F.: *A History of Mathematics*. Taylor and Francis, New York, 1975. Cap.7.
71. SMITH, D.E.: *History of Mathematics*. Dover. New York, 1959. Vol.II, Cap.5.8.
72. SMITH, D.E.: *A Source Book in Mathematics*. Dover. 2 Vols. New York. Caps. III.14, III.15.
73. STRUIK, D.J.: *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Harvard University Press, Cambridge, 1969. Caps.2.5,3.1,3.3,3.4,3.5.
74. UNIVERSIDAD COMPLUTENSE: *Libros antiguos de Matemáticas*. Madrid, 2000.
75. VAN DER WAERDEN, B.L.: *Geometry and Algebra in Ancients civilizations*. Springer-V, Berlín, 1983. Caps.3,4.
76. VAN DER WAERDEN, B.L.: *A History of Algebra*. Springer-Verlag. Berlín, 1985. Cap.3.
77. VARIOS AUTORES: *Sigma, el mundo de las Matemáticas*. Grijalbo. Barcelona, 1969. Vol.I, Cap.7.
78. VARIOS AUTORES: *Mathématiques a fil des âges*. Gauthiers-Villars, París, 1990. Cap.6.
79. VERA, F.: *Breve Historia de la Geometría*. Losada. Buenos Aires. 1963. Caps. 2,3,4,5,7.
80. VERA, F.: *Veinte matemáticos célebres*. Mirasol. Buenos Aires, 1961. Cap.5.
81. WUSSING, H.: *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI. Madrid, 1989. Cap.7.2.

Obras de Filosofía de la Ciencia y de las Matemáticas

82. BRUNSCHVIC, G.L.: *Les étapes de la Philosophie Mathématique*. Blanchard, París, 1972. Cap. 7.
83. GARCÍA FONT, J.: *Historia de la Ciencia*. Barcelona, 1980. Caps. 5, 7, 14.
84. HULL, L.W.H.: *Historia y Filosofía de la Ciencia*. Ariel, Barcelona, 1981. Cap. 8.
85. KLINE, M.: *Matemáticas, la pérdida de la certidumbre*. Siglo XXI, Madrid, 1985. Caps. 2, 3.
86. LORENZO, J.: *Introducción al estilo matemático*. Tecnos, Madrid, 1971. Cap. 4.
87. MAGEE, B.: *Historia de la Filosofía*. Blume. Barcelona, 1999. Caps. 1, 4.
88. RUNES, D.: *Historia ilustrada de la Filosofía*. Grijalbo. México, 1967.
89. RUSSELL, B.: *Historia de la Filosofía occidental*. Austral. Madrid, 1995. Vol. 2. Libro 3. Cap. 9.
90. SPENGLER, O.: *La decadencia de Occidente*. Austral, Madrid, 1998. Cap. I. 1.
91. VARIOS AUTORES: *Historia del Pensamiento*. Orbis, Vol. 2. Cap. 3. Barcelona, 1983.

Artículos de revistas científicas

92. BERTHET, J.: *La méthode de Descartes avant le discours*. Rev. de Métaphisique, 1896, 388-415.
93. BOS, H.J.M.: *On the Representation of Curves in Descartes' Géométrie*. Archiv of History of Exactes Sciences, 24, 295-338, 1981.
94. BOYER, C.B.: *Early contributions to Analytic Geometry*. Scripta Mathematica, XIX, 1953, 97-108, 230-238.
95. BOYER, C.B.: *Analytic Geometry in the alexandrian age*. Scripta Mathematica, XX, 1954, 30-36, 143-154.
96. BOYER, C.B.: *Fermat and Descartes*. Scripta Mathematica, XX, 1955. 189-217.
97. BOYER, C.B.: *Post-Cartesian Analytic Geometry*. Scripta Mathematica, XXI, 1956, 101-135.
98. BOYER, C.B.: *Mathematiciens of the French Revolution*. Scripta Mathematica. XXV, 1960, 11-31.
99. CAÑÓN, C.: *El alcance de un sueño. La Mathesis Universales (en Descartes, el sueño y la razón)*. Revista Quark. UPF. Barcelona, abril-junio, 1996. 22-28.
100. COOLIDGE, J.L.: *The Origin of Analytic Geometry*. Osiris, I, 1936, 231-250.
101. DAINVILLE, F.: *L'enseignement des mathématiques dans les Collèges Jésuites de France du XVI^e au XVIII^e siècle*. Revue d'Histoire des Sciences, 1954, 6-21.
102. GALUZZI, M.: *Il Problema della Tangenti nella "Géométrie" di Descartes*. Archiv of History of Exactes Sciences, 22, 1980, 37-51.
103. GIBSON, B.: *La Géométrie de Descartes au point de vue de sa méthode*. Revue de Métaphisique, 1896, 387-398.
104. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *La aparición de los inconmensurables*. Mundo científico, nº 220, 2/2001.
105. MAHONEY, M.S.: *Another Look at Greek Geometrical Analysis*. Archiv of History of Exactes Sciences, 5, 1968-69, 318-348.
106. MOLLAND, G.: *Shifting the foundations: Descartes transformation of ancient geometry*. Historia Mathematica, 3, 1976, 21-49.
107. RITTER, F.: *François Viète, inventeur de l'algebre moderne, 1540-1603, essai sur sa vie et son oeuvre*. Revue occidentale philosophique sociale et politique, 10 (1895) 234-74.
108. VARIOS AUTORES. *Descartes, les nouvelles lectures* (Artículos sobre Descartes en el cuarto centenario de su nacimiento). Magazine littéraire, 342. París, abril, 1996.
109. VARIOS AUTORES. Artículos en la Prensa española sobre Descartes en el cuarto centenario de su nacimiento. LA VANGUARDIA, 26/3/96; EL PAÍS, 3/1/96, 2/3/96, 25/3/96, 30/3/96, 19/7/96; EL MUNDO, 23/3/96; AVUI 27/3/96, ABC, 29/3/96, 20/4/96, 4/5/96; HISTORIA Y VIDA, 341, 8/96.
110. WHITESIDE, D.T.: *Patterns of mathematical thought in de later 17th century*. Archiv of History of Exactes Sciences, 1, 1960-62, Cap. 7, págs. 290-311.

La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática

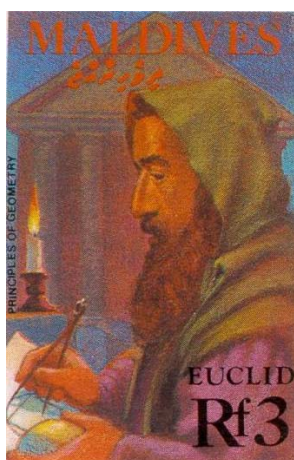
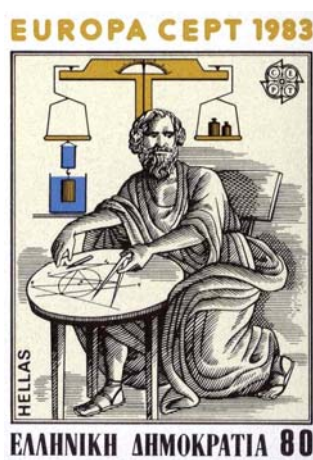
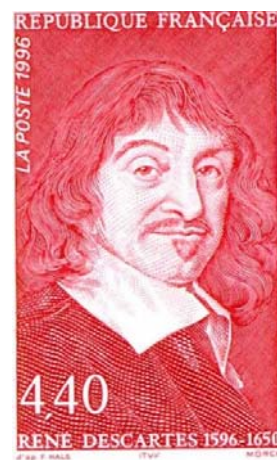
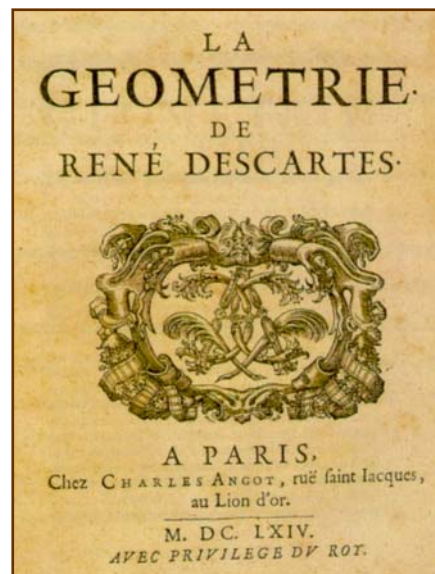
HISTORIA DE LA MATEMÁTICA PARA LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

ESTUDIO CRÍTICO DE TRES OBRAS CUMBRES DE LA LITERATURA MATEMÁTICA:

LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES



Pedro Miguel González Urbaneja
pgonzale@pie.xtec.es